1D уравнение Захарова

Дьяченко А.И.

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН
Новосибирский государственный университет

Уравнения глубокой воды

$$
\begin{aligned}
\phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \qquad (\phi_z \to 0, z \to -\infty),\\
\eta_t + \eta_x \phi_x &= \phi_z \Big|_{z=\eta}\\
\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta &= 0\Big|_{z=\eta};
\end{aligned}
$$

здесь $\eta(x,t)$ - профиль поверхности, $\phi(x,z,t)$ - потенциал скорости потока.

$$
H = \frac{1}{2}\int\Big[[g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi] + [\psi_x^2 - (\hat{k}\psi)^2]\eta + [\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi + \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))]\Big]\,dx
$$

$$
\eta(x,t) \qquad \psi(x,t) = \phi(x,z,t)\Big|_{z=\eta}
$$

Каноническое преобразование

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k + a^*_{-k}) \qquad \psi_k = -i\sqrt{\frac{g}{2\omega_k}}(a_k - a^*_{-k})$$

$$a_k = b_k + \int\left[2\tilde{V}^{k_1}_{kk_2} b_{k_1} b^*_{k_2} - \tilde{V}^{k}_{k_1 k_2} b_{k_1} b_{k_2} - \tilde{U}_{kk_1 k_2} b^*_{k_1} b^*_{k_2}\right] dk_1 dk_2 +$$
$$+\int\left[A^{k}_{k_1 k_2 k_3} b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} + A^{kk_1 k_2}_{k_3} b^*_{k_1} b^*_{k_2} b_{k_3} + A^{kk_1 k_2 k_3} b^*_{k_1} b^*_{k_2} b^*_{k_3}\right] dk_1 dk_2 dk_3 +$$
$$+\int\left(A^{kk_1}_{k_2 k_3} + \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathbf{kk}_1}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}\right) b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

Гамильтониан после преобразования:

$$H = \int \omega_k b_k b^*_k dk \quad + \quad \frac{1}{2}\int\left[\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2 k_3} - (\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3})\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathbf{kk}_1}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}\right] \times$$
$$\times \quad b^*_k b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3 + \ldots.$$

$H=\int \omega_k |b_k|^2 dk + \frac{1}{2}\int T^{kk_1}_{k_2k_3} b^*_k b^*_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2k_3} = W^{kk_1}_{k_2k_3} - \\
&-V^{k+k_1}_{kk_1} V^{k_2+k_3}_{k_2k_3} \left[\frac{1}{\omega_{k+k_1}-\omega_k-\omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_{k_2+k_3}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}}\right] - \\
&-U_{-k-k_1kk_1} U_{-k_2-k_3k_2k_3} \left[\frac{1}{\omega_{k+k_1}+\omega_k+\omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_{k_2+k_3}+\omega_{k_2}+\omega_{k_3}}\right] - \\
&-V^{k_1}_{k_3k_1-k_3} V^{k_2}_{kk_2-k} \left[\frac{1}{\omega_{k_3}+\omega_{k_1-k_3}-\omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_k+\omega_{k_2-k}-\omega_{k_2}}\right] - \\
&-V^{k}_{k_2k-k_2} V^{k_3}_{k_1k_3-k_1} \left[\frac{1}{\omega_{k_2}+\omega_{k-k_2}-\omega_k} + \frac{1}{\omega_{k_1}+\omega_{k_3-k_1}-\omega_{k_3}}\right] - \\
&-V^{k_1}_{k_2k_1-k_2} V^{k_3}_{kk_3-k} \left[\frac{1}{\omega_{k_2}+\omega_{k_1-k_2}-\omega_{k_1}} + \frac{1}{\omega_k+\omega_{k_3-k}-\omega_{k_3}}\right] - \\
&-V^{k}_{k_3k-k_3} V^{k_2}_{k_1k_2-k_1} \left[\frac{1}{\omega_{k_3}+\omega_{k-k_3}-\omega_k} + \frac{1}{\omega_{k_1}+\omega_{k_2-k_1}-\omega_{k_2}}\right],
\end{aligned}
$$

$k + k_1 = k_2 + k_3$

Резонанс по частотам не нужен

$$
\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2k_3} = \begin{cases} \frac{|kk_1k_2k_3|^{1/4}}{4\pi}\left[\frac{kk_1}{\sqrt{|kk_1|}} + \frac{k_2k_3}{\sqrt{|k_2k_3|}}\right]\mathbf{D}^{\mathbf{kk}_1}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} & \text{все } k + \text{ или -}, \\ \frac{|kk_1k_2k_3|^{1/4}}{8\pi}\left[\frac{kk_3-|kk_3|}{\sqrt{|kk_3|}} + \frac{k_1k_2-|k_1k_2|}{\sqrt{|k_1k_2|}} + \right. & \\ \qquad \left. + \frac{k_1k_3-|k_1k_3|}{\sqrt{|k_1k_3|}} + \frac{kk_2-|kk_2|}{\sqrt{|kk_2|}}\right]\mathbf{D}^{\mathbf{kk}_1}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} & \text{если } kk_1 < 0 \text{ и } k_2k_3 < 0, \\ \mathbf{0}!!! & \text{если } kk_1k_2k_3 < 0. \end{cases}
$$

$$
\mathbf{D}^{\mathbf{kk}_1}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \begin{cases} \min(|k|, |k_1|, |k_2|, |k_3|) & kk_1k_2k_3 > 0, \\ 0 & kk_1k_2k_3 < 0. \end{cases}
$$

Имеется явная формула для $\mathbf{D}^{\mathbf{kk}_1}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$.

$\mathbf{D}^{\mathbf{kk_1}}_{\mathbf{k_2k_3}} \equiv 0$ if $kk_1k_2k_3 < 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\mathbf{kk_1}}_{\mathbf{k_2k_3}} = \quad & \frac{1}{2}\left(|k| + |k_1| + |k_2| + |k_3|\right) - \frac{1}{4}\left(|k+k_1| + |k_2+k_3|\right) - \\
& -\frac{1}{4}\left(|k-k_2| + |k-k_3| + |k_1-k_2| + |k_1-k_3|\right)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{D}^{\mathbf{kk_1}}_{\mathbf{k_2k_3}}$ в x-пространстве соответствует простым операторам:

$$
\begin{aligned}
k &\Rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x} b, \\
|k| &\Rightarrow \hat{k} b, \\
|k+k_1|, |k_2+k_3| &\Rightarrow \hat{k}(bb), \\
|k-k_2|, |k-k_3|, |k_1-k_2|, |k_1-k_3| &\Rightarrow \hat{k}(bb^*).
\end{aligned}
$$

Расщепление уравнения движения

Это важно

$$\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2k_3} = 0 \qquad \text{если } kk_1k_2k_3 < 0.$$

Специфическая структура $\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$ позволяет разделить комплексную функцию b на две аналитических функции:

$$\begin{aligned} b(x,t) &= b^+(x,t) + b^-(x,t), \qquad b_k = b_k^+ + b_k^-, \\ b^+(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty b_k^+ e^{ikx} dk, \\ b^-(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 b_k^- e^{ikx} dk \end{aligned}$$

$b^+(x,t)$ - аналитична в верхней полуплоскости, $b^-(x,t)$ - аналитична в нижней. Подставляя $b_k = b_k^+ + b_k^-$ в уравнение движения и используя важное свойство $\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2k_3}$ и $k + k_1 = k_2 + k_3$, получаем два уравнения для b_k^+ и b_k^-:

Два гамильтоновых уравнения

$$
\begin{aligned}
i\dot{b}_k^+ = \omega_k b_k^+ \quad &+ \quad \int \left[b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 2(b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^-)\, b_{k_3}^+ \right] \times \\
&\times \mathbf{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \\
i\dot{b}_k^- = \omega_k b_k^- \quad &+ \quad \int \left[b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- + 2(b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+)\, b_{k_3}^- \right] \times \\
&\times \mathbf{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H \quad = \quad & \int \omega_k \left[|b_k^+|^2 + |b_k^-|^2 \right] dk + \\
+ \quad & \frac{1}{2} \int \left[b_k^{+^*} b_{k_1}^{+^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^+ + 4 b_k^{+^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^+ b_{k_3}^- + b_k^{-^*} b_{k_1}^{-^*} b_{k_2}^- b_{k_3}^- \right] \times \\
& \times \mathbf{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3.
\end{aligned}
$$

$$
i \frac{\partial b_k^+}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta b_k^{+^*}}, \qquad i \frac{\partial b_k^-}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta b_k^{-^*}},
$$

Последнее каноническое преобразование

$$\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2k_3} = \begin{cases} \frac{|kk_1k_2k_3|^{1/4}}{4\pi}\left[\frac{kk_1}{\sqrt{|kk_1|}} + \frac{k_2k_3}{\sqrt{|k_2k_3|}}\right]\mathbf{D}^{\mathbf{kk_1}}_{\mathbf{k_2k_3}} & \text{все } k + \text{ или -}, \\ \frac{|kk_1k_2k_3|^{1/4}}{8\pi}\left[\frac{kk_3-|kk_3|}{\sqrt{|kk_3|}} + \frac{k_1k_2-|k_1k_2|}{\sqrt{|k_1k_2|}} + \right. & \\ \left. + \frac{k_1k_3-|k_1k_3|}{\sqrt{|k_1k_3|}} + \frac{kk_2-|kk_2|}{\sqrt{|kk_2|}}\right]\mathbf{D}^{\mathbf{kk_1}}_{\mathbf{k_2k_3}} & \text{если } kk_1 < 0 \text{ и } k_2k_3 < 0, \\ \mathbf{0}!!! & \text{если } kk_1k_2k_3 < 0. \end{cases}$$

Каноническое преобразование:

$$\mathbf{T}^{kk_1}_{k_2k_3} \Rightarrow \tilde{\mathbf{T}}^{kk_1}_{k_2k_3} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{|kk_1k_2k_3|}\mathbf{D}^{\mathbf{kk_1}}_{\mathbf{k_2k_3}}$$

Уравнения в k-пространстве

$$\sqrt{|k|}b_k^+ \Rightarrow c_k^+, \qquad \sqrt{|k|}b_k^- \Rightarrow c_k^-,$$

$$i\frac{\partial c_k^+}{\partial t} = |k|\frac{\delta H}{\delta c_k^{+^*}}, \qquad i\frac{\partial c_k^-}{\partial t} = |k|\frac{\delta H}{\delta c_k^{-^*}},$$

$$\begin{aligned} i\dot{c}_k^+ = \omega_k c_k^+ \quad + \quad & \frac{|k|}{2\pi}\int \left[c_{k_1}^{+^*} c_{k_2}^+ c_{k_3}^+ - 2(c_{k_1}^{-^*} c_{k_2}^-)\, c_{k_3}^+\right] \times \\ & \times \mathbf{D}_{\mathbf{k_2k_3}}^{\mathbf{kk_1}} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\dot{c}_k^- = \omega_k c_k^- \quad + \quad & \frac{|k|}{2\pi}\int \left[c_{k_1}^{-^*} c_{k_2}^- c_{k_3}^- - 2(c_{k_1}^{+^*} c_{k_2}^+)\, c_{k_3}^-\right] \times \\ & \times \mathbf{D}_{\mathbf{k_2k_3}}^{\mathbf{kk_1}} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{k_2k_3}}^{\mathbf{kk_1}} = \qquad & \frac{1}{2}\left(|k| + |k_1| + |k_2| + |k_3|\right) - \frac{1}{4}\left(|k + k_1| + |k_2 + k_3|\right) - \\ & -\frac{1}{4}\left(|k - k_2| + |k - k_3| + |k_1 - k_2| + |k_1 - k_3|\right) \end{aligned}$$

Гамильтониан в x-пространстве

$$H = \int c^{+^*} \hat{V} c^+ dx + \frac{1}{2} \int |c^+|^2 \left[\frac{i}{2} (c^+ c_x^{+^*} - c^{+^*} c_x^+) - \hat{k} |c^+|^2 \right] dx +$$
$$+ \int c^{-^*} \hat{V} c^- dx + \frac{1}{2} \int |c^-|^2 \left[\frac{i}{2} (c^{-^*} c_x^- - c^- c_x^{-^*}) - \hat{k} |c^-|^2 \right] dx +$$
$$+ \int \left[|c^+|^2 \hat{k} |c^-|^2 + c^{+^*} c^{-^*} \hat{k} (c^+ c^-) + i (c^{+^*} c^-) \frac{\partial}{\partial x} (c^+ c^{-^*}) \right] dx$$

Два уравнения для волн в обеих направлениях

$$\frac{\partial c^+}{\partial t} + \partial_x^+ \frac{\delta H}{\delta c^{+^*}} = 0, \qquad \frac{\partial c^-}{\partial t} - \partial_x^- \frac{\delta H}{\delta c^{-^*}} = 0.$$

$$\partial_x^+ \Leftrightarrow ik\theta(k) \qquad \partial_x^- \Leftrightarrow ik\theta(-k)$$

Уравнения в x-пространстве

$$\frac{\partial c^+}{\partial t} + i\hat{\omega} c^+ = \partial_x^+ \Big[i(|c^+|^2 - |c^-|^2)c_x^+ + c^+ k(|c^+|^2 - |c^-|^2) - $$
$$ - ic^+ c^- {c_x^-}^* - {c^-}^* \hat{k}(c^+ c^-) \Big]$$

$$\frac{\partial c^-}{\partial t} + i\hat{\omega} c^- = \partial_x^- \Big[i(|c^-|^2 - |c^+|^2)c_x^- - c^- k(|c^-|^2 - |c^+|^2) - $$
$$ - ic^- c^+ {c_x^+}^* + {c^+}^* \hat{k}(c^+ c^-) \Big]$$

$c(x,t) \quad \Rightarrow \quad \eta(x,t), \ \psi(x,t)$

$$\eta(x) = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)}, \qquad \psi(x) = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)}.$$

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2} g^{\frac{1}{4}}} \hat{k}^{-\frac{1}{4}} (c(x) + c(x)^*),$$
$$\eta^{(2)} = \frac{\hat{k}}{4\sqrt{g}} \left[\hat{k}^{-\frac{1}{4}} (c^+(x) - {c^+}^*(x) - c^-(x) + {c^-}^*(x)) \right]^2$$

Две встречных волны

$$c(x,t) = Ae^{i(k_+ x - \omega_A t)} + Be^{i(k_- x - \omega_B t)}, \qquad k_+ > 0, k_- < 0$$

$$\begin{aligned} \omega_A &= \omega_{k_+} + k_+ \left[k_+|A|^2 - 2k|B|^2\right] \\ \omega_B &= \omega_{k_-} + k_- \left[k_-|B|^2 + 2k|A|^2\right] \qquad k = \min(|k_+|, |k_-|) \end{aligned}$$

Если $|A| = |B|$, и $k = k_+ = -k_-$ тогда это простая стоячая волна:

$$c(x,t) = 2Ae^{-i\omega_A t} \cos kx, \qquad \omega_A = \omega_k - k^2|A|^2.$$

Для физической переменной η имеем:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0(\cos\omega_A t \cos kx + \frac{\eta_0 k}{4} \cos 2\omega_A t \cos 2kx + \dots) - \\ &+ \eta_0 \frac{\eta_0 k}{4} \cos 2kx + \dots \qquad \omega_A = \omega_k \left(1 - \frac{\eta_0^2 k^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Нелинейная стоячая волна:

$$c^+ = e^{-i\Omega t}\mathbf{C}(x), \qquad c^- = e^{-i\Omega t}\mathbf{C}^*(x),$$

тогда

$$(\Omega - \hat{\omega})\mathbf{C} = \partial_x^+ \left[|\mathbf{C}|^2 \mathbf{C}_x - i\mathbf{C}\hat{k}|\mathbf{C}|^2\right]$$

Два НУШа для слабомодулированных волн

$$c^+ = C^+(x,t)e^{ik_+x - i\omega_+ t}, \qquad c^- = C^-(x,t)e^{ik_-x - i\omega_- t}$$

Два уравнения на огибающие

$$\frac{\partial C^+}{\partial t} + v_g^+ C_x^+ + i\frac{\omega_+}{8k_+^2}C_{xx}^+ + i\left[k_+^2|C^+|^2 - 2k_+k|C^-|^2\right]C^+ = 0$$
$$\frac{\partial C^-}{\partial t} + v_g^- C_x^- + i\frac{\omega_-}{8k_-^2}C_{xx}^- + i\left[k_-^2|C^-|^2 - 2k|k_-||C^+|^2\right]C^- = 0$$

$$k_+ > 0, \qquad k_- < 0, \qquad \omega_k = \sqrt{g|k|}$$
$$v_g^+ = \left.\frac{\partial \omega_k}{\partial k}\right|_{k=k_+} > 0, \quad v_g^- = \left.\frac{\partial \omega_k}{\partial k}\right|_{k=k_-} < 0$$

Точное решение системы НУШ

$$C^+(x,t) = C(x)e^{i\Omega t}, \quad C^-(x,t) = C^*(x)e^{i\Omega t}, \quad k_- = -k_+ = k$$

$$i\Omega C + v_g C_x + i\frac{\omega_k}{8k^2}C_{xx} - ik^2|C|^2 C = 0 \qquad C = Re^{i\phi}$$

$$\frac{v_g}{4k}R_{xx} + \left[\Omega + v_g k\right]R - v_g k\frac{r_0^4}{R^3} - k^2 R^3 = 0 \qquad \Big| R_x$$

$$R^2 = \mathcal{P}$$

Точное решение системы НУШ

$$\frac{1}{8}\frac{v_g}{k}\mathcal{P}_x^2 = k^2\mathcal{P}^3 - 2\big[\Omega + v_g k\big]\mathcal{P}^2 + c\mathcal{P} - 2v_g k r_0^4 = 0$$

$\mathcal{P}$ – Фунция Вейерштрасса. Если корни $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_1$, тогда

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_\infty - \frac{\omega}{k^2}\frac{\lambda^2}{\cosh^2(2\lambda kx)} = R^2, \qquad \lambda^2 \simeq \frac{k^2}{\omega}(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_0) << 1$$

$$R = \sqrt{R_\infty^2 - \frac{\omega}{k^2}\frac{\lambda^2}{\cosh^2(2\lambda kx)}}$$

$$\tan(\lambda\mu\phi) = -\frac{1}{\mu}\tanh(2\lambda kx), \qquad \mu^2 = \frac{R_\infty^2 k^2}{\lambda^2\omega} - 1$$

???

- Модуляционная неустойчивость - ЕСТЬ
- Предельная стоячая волна ?
- Интегрируемость -?

1D уравнение Захарова

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c^+}{\partial t} + i\hat{\omega} c^+ &= \partial_x^+ \Big[i(|c^+|^2 - |c^-|^2) c_x^+ + c^+ k(|c^+|^2 - |c^-|^2) - \\
&\quad - i c^+ c^- {c_x^-}^* - {c^-}^* \hat{k}(c^+ c^-) \Big] \\
\frac{\partial c^-}{\partial t} + i\hat{\omega} c^- &= \partial_x^- \Big[i(|c^-|^2 - |c^+|^2) c_x^- - c^- k(|c^-|^2 - |c^+|^2) - \\
&\quad - i c^- c^+ {c_x^+}^* + {c^+}^* \hat{k}(c^+ c^-) \Big]
\end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} \int \Big[[g\eta^2 + \psi \hat{k} \psi] + [\psi_x^2 - (\hat{k}\psi)^2]\eta + [\psi_{xx}\eta^2 \hat{k}\psi + \psi \hat{k}(\eta \hat{k}(\eta \hat{k}\psi))] \Big] dx$$

Уравнение для волн, бегущих в одну сторону

Пусть $c^- = 0$. Тогда

Суперкомпактное уравнение

$$\frac{\partial c^+}{\partial t} + i\hat{\omega} c^+ - i\partial_x^+ \left(|c^+|^2 \frac{\partial c^+}{\partial x} \right) = \partial_x^+ (\mathcal{U} c^+) \qquad \mathcal{U} = \hat{k} |c^+|^2.$$