КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ

Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт проблем механики РАН

E-mail: aksenov.av@gmail.com, s.dobrokhotov@gmail.com, konstantin.druzhkov@gmail.com

XXVI научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике.
Институт океанологии РАН. 18 декабря 2017 г.

1. Основные уравнения

В безразмерных переменных система уравнений мелкой воды с профилем дна $h(x) = -x$ имеет вид [Stoker J.J., 1948]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \eta_x &= 0\,, \\ \eta_t + \big[u(\eta + x)\big]_x &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Линеаризованная система уравнений мелкой воды имеет вид

$$\begin{aligned} U_\tau + N_y &= 0\,, \\ N_\tau + (yU)_y &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В работе [Carrier G. F. and Greenspan H. P., 1958] было показано, что система (1.1) может быть линеаризована точечным преобразованием. В работе [Доброхотов С.Ю., Тироцци Б., 2010] это преобразование было записано в виде

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{N} + \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2\,, \\ &\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{U}\,, \\ &\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}\,, \\ &\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{N} - \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Замечание 1.1. В работе [Pelinovsky E.N. and Mazova R.Kh., 1992] решение нелинейной системы уравнений (1.1) было записано через решение уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0\,.$$

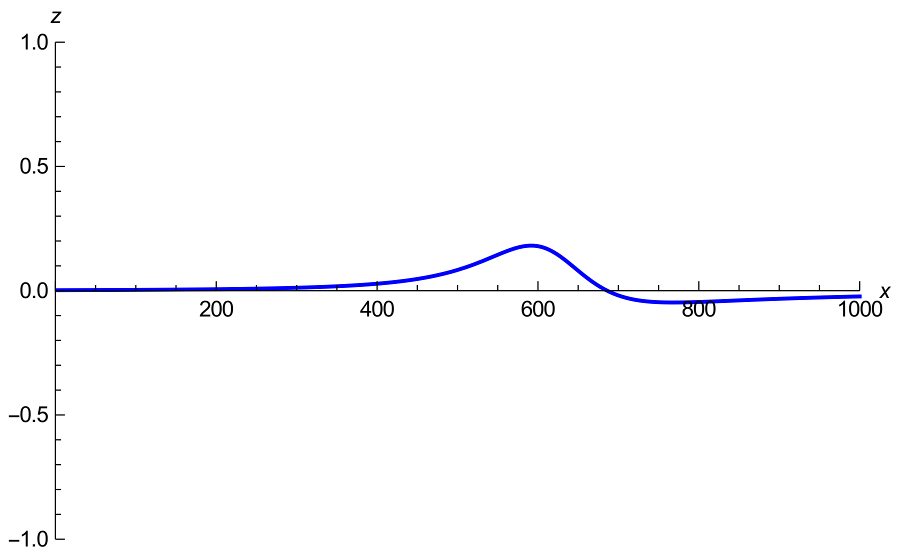
Замечание 1.2. В работе [Аксенов А.В., Дружков К.П., 2016] была решена задача групповой классификации системы уравнений мелкой воды (1.1) и было показано, что система уравнений (1.1) линеаризуема точечной заменой переменных только в случаях постоянного или линейного профилей дна (в остальных случаях алгебра Ли операторов симметрии системы уравнений мелкой воды конечномерна).

2. Постановка задачи

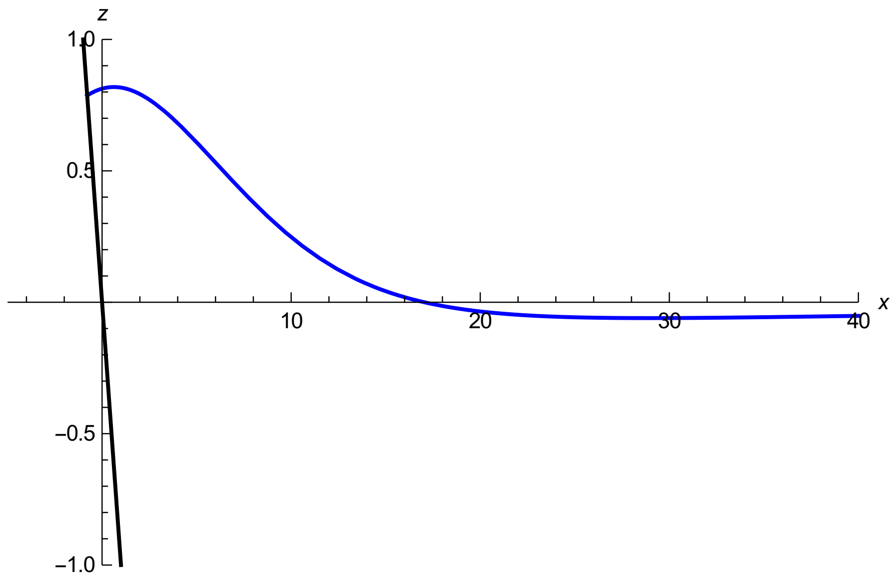
В работе [Доброхотов С.Ю., Тироцци Б., 2010] было получено следующее семейство точных решений линейной системы уравнений (1.2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N_0} &= \mathrm{Re}\,\frac{\boldsymbol{A(\tau + ib)}}{\left(\boldsymbol{y} - \dfrac{\boldsymbol{(\tau+ib)^2}}{\boldsymbol{4}}\right)^{3/2}}, \\ \boldsymbol{U_0} &= \boldsymbol{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\boldsymbol{A}}{\left(\boldsymbol{y} - \dfrac{\boldsymbol{(\tau+ib)^2}}{\boldsymbol{4}}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

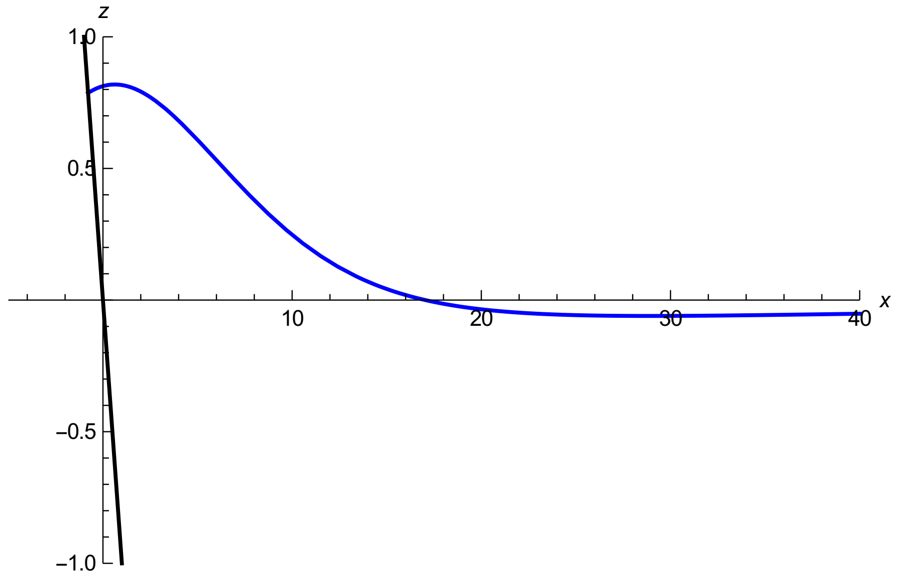
Графики "шапочки" при $A = 4$, $b = 4$:



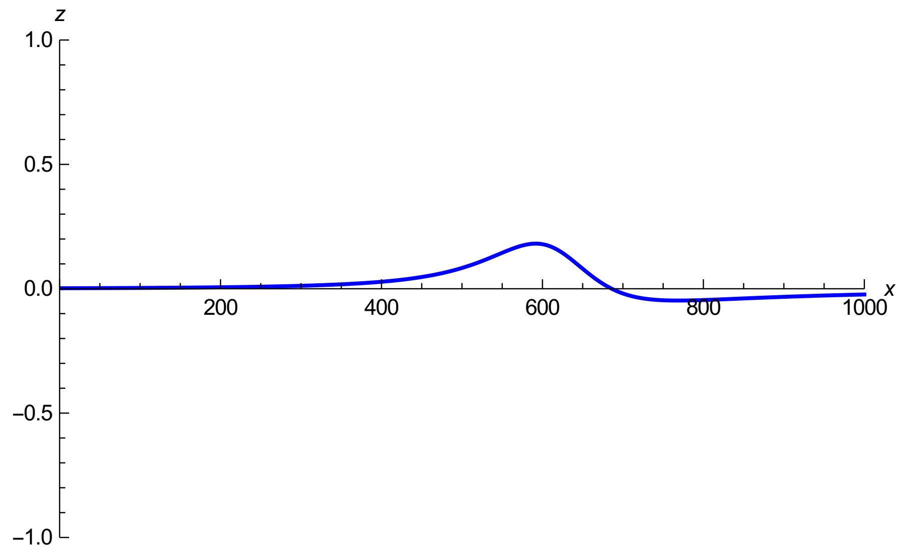
$t = -50.0$



$t = -5.0$



$t = 5.0$



$t = 50.0$

В настоящей работе рассматривается решение системы уравнений (1.2)

$$
\begin{aligned}
N &= 4A\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{\sqrt{y-\dfrac{(\tau+ib)^2}{4}}},\\
U &= 2A\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau+ib}{y\sqrt{y-\dfrac{(\tau+ib)^2}{4}}},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

полученное из решения (2.1) интегрированием по τ. Здесь $y \geqslant 0$, $\tau \neq 0$, $A \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (условие $\mathrm{Im}\,A = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы U была непрерывна при $y \geqslant 0$).

Замечание 2.1. Интегрирование решения (2.1) по переменной τ позволяет получать решение типа ”ступеньки”.

Замечание 2.2. С помощью решения (2.1) можно также получать новые решения линейной системы уравнений (1.2), дифференцируя это решение по переменной τ.

3. Основные результаты

Запишем решение (2.2) в действительной форме:

$$\boldsymbol{N = 2\sqrt{2}A\,\mathrm{sgn}\,(-\tau b)\,\frac{\sqrt{\sqrt{\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)^2+\frac{\tau^2 b^2}{4}}+\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)}}{\sqrt{\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)^2+\frac{\tau^2 b^2}{4}}}},$$

$$\boldsymbol{U = \frac{\sqrt{2}A}{y}\left(\tau\,\mathrm{sgn}\,(-\tau b)\,\frac{\sqrt{\sqrt{\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)^2+\frac{\tau^2 b^2}{4}}+\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)}}{\sqrt{\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)^2+\frac{\tau^2 b^2}{4}}}+\right.}$$
$$\boldsymbol{\left.+\,b\,\frac{\sqrt{\sqrt{\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)^2+\frac{\tau^2 b^2}{4}}-\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)}}{\sqrt{\left(y-\frac{\tau^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)^2+\frac{\tau^2 b^2}{4}}}\right).} \qquad \mathbf{(3.1)}$$

Якобиан преобразования (1.3) можно записать в виде

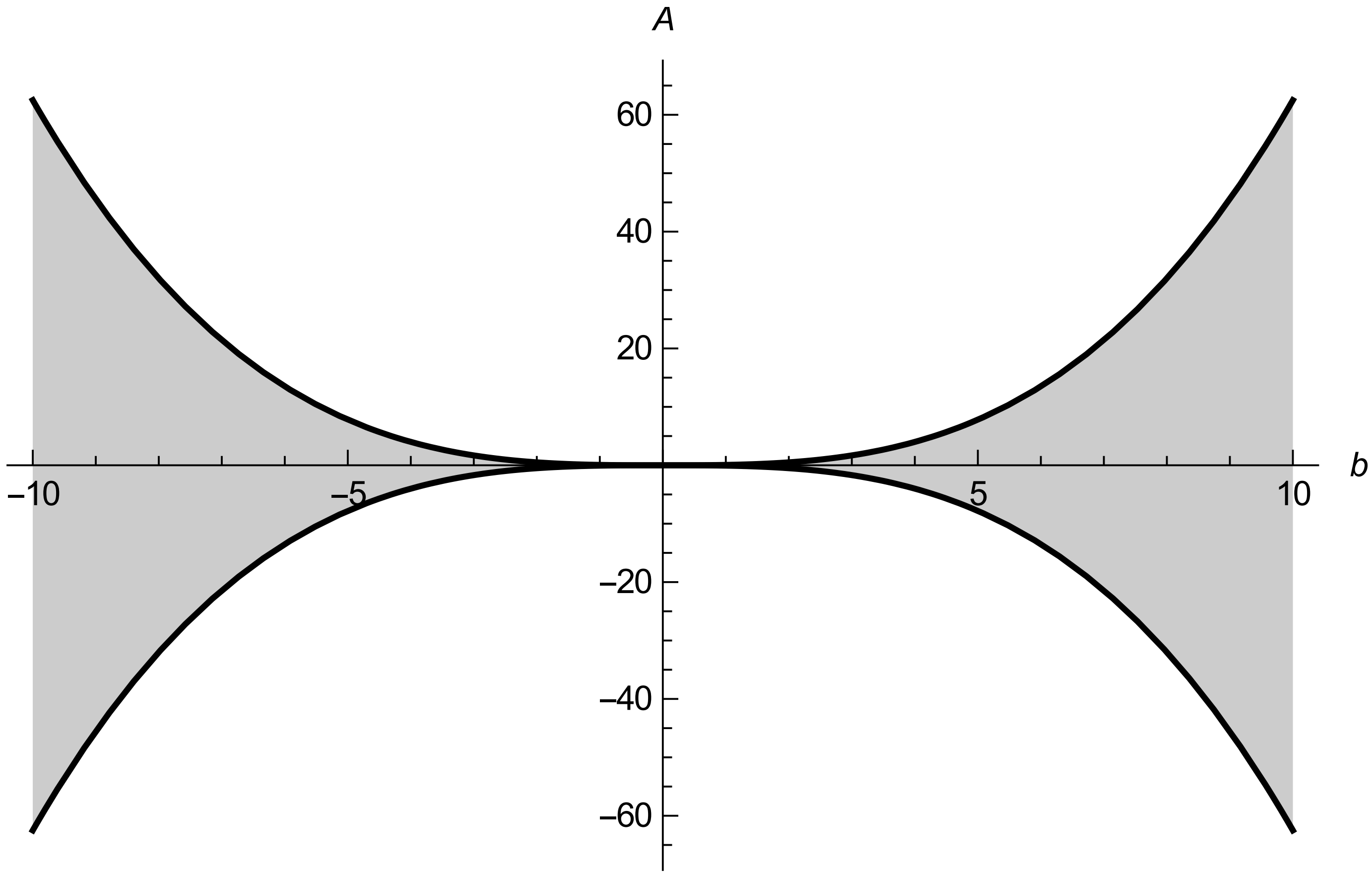
$$J = (1 + U_\tau)^2 - yU_y^2 \,.$$

Доказано следующее утверждение.

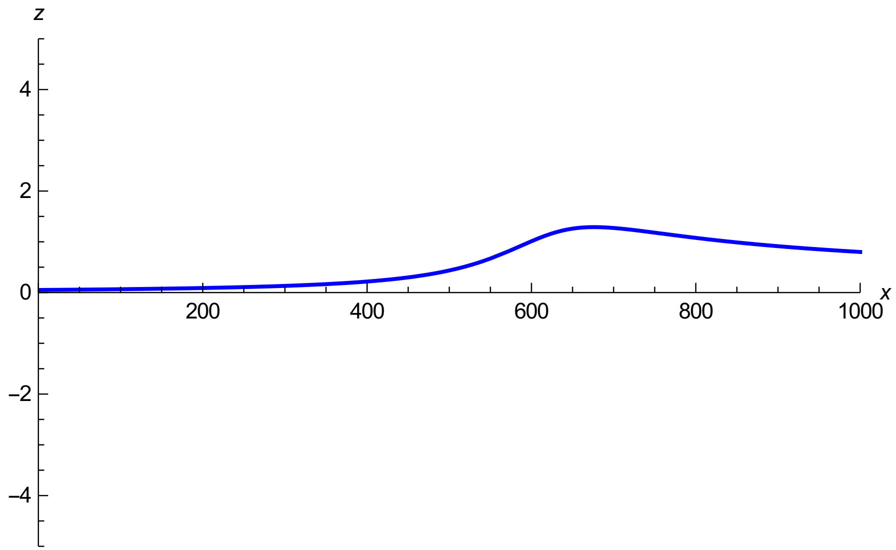
Предложение 3.1. *Якобиан J преобразования* (1.3) *в силу решения* (3.1) *отличен от* 0 *всюду при* $y \geqslant 0$, $\tau \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $|A| \leqslant \dfrac{|b|^3}{16}$.

Основная идея доказательства: выбором новых переменных можно свести доказательство к задаче поиска области значений функции двух переменных. Далее можно показать, что максимум ее модуля достигается при $y = 0$, $\tau = 0$.

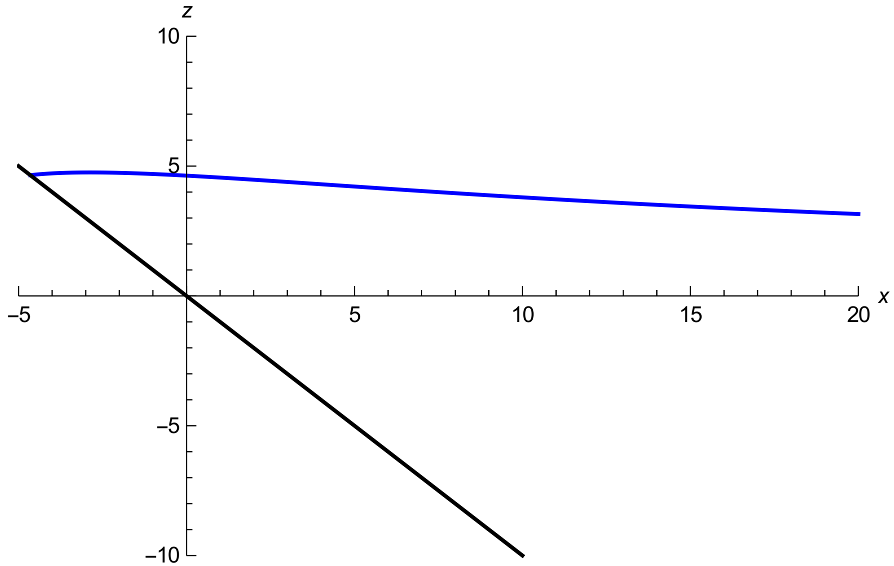
На плоскости параметров (b, A) область $|A| \leqslant \dfrac{|b|^3}{16}$ выглядит следующим образом



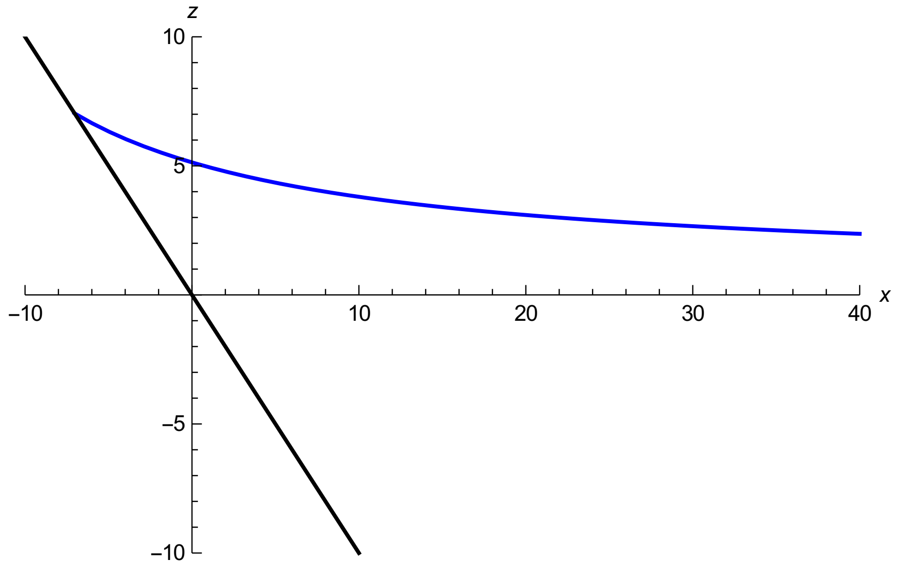
Графики "ступеньки" при $A = 4$, $b = 4$:



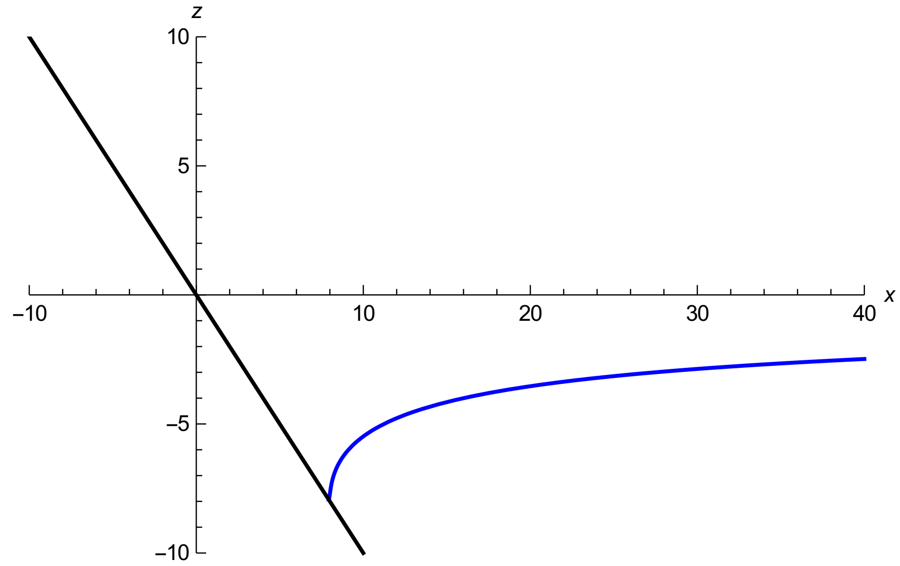
$t = -50.0$



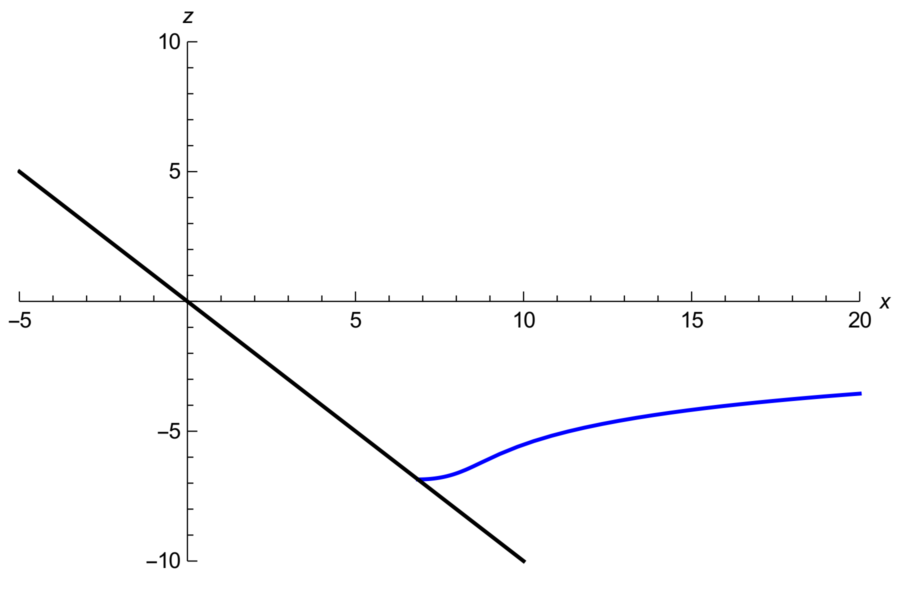
$t = -4.0$



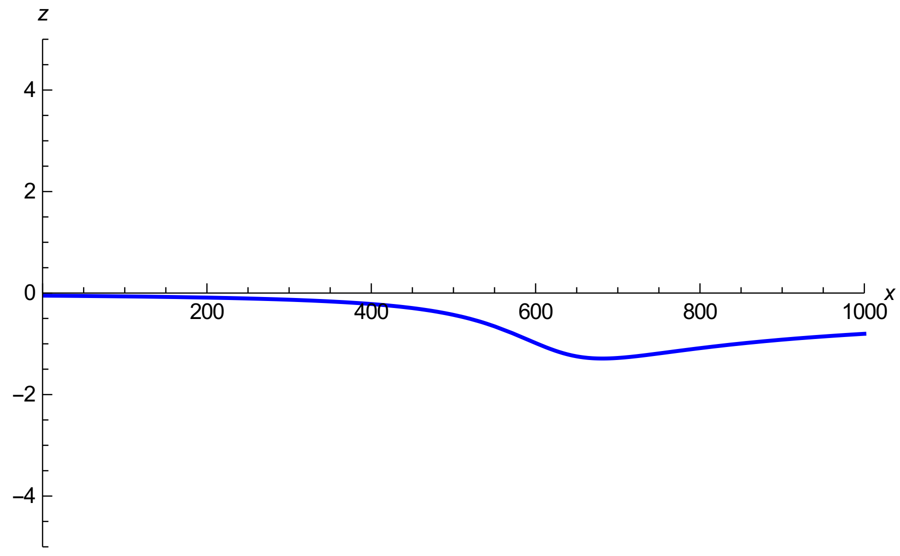
$t = -2.0$



$t = 0.1$

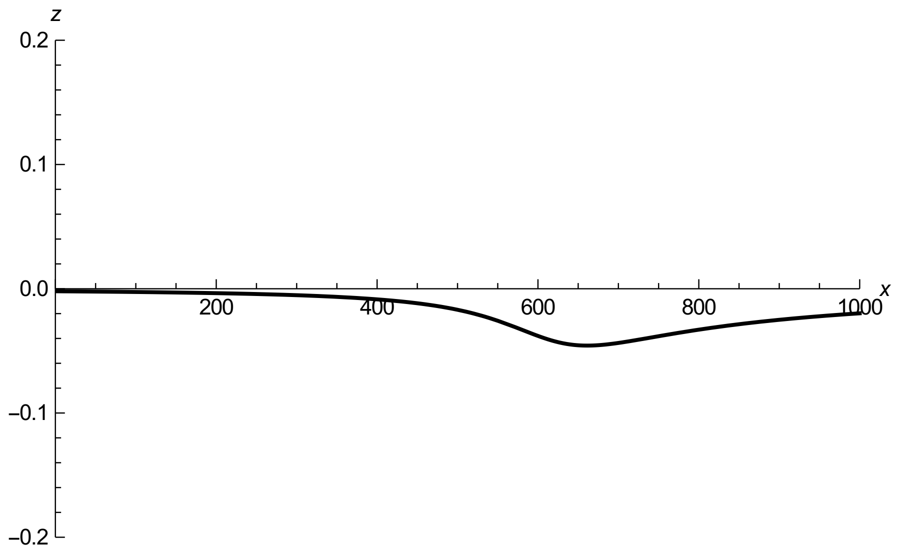


$t = 1.0$

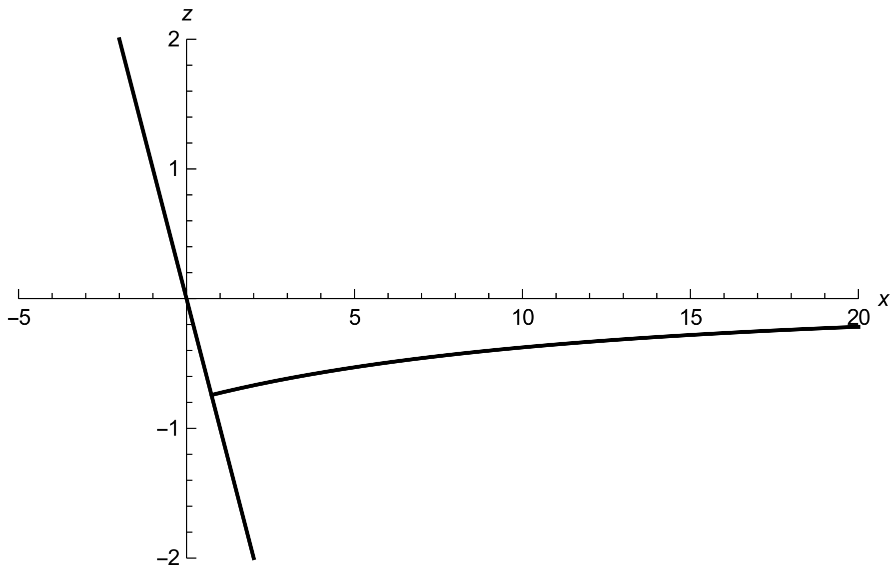


$t = 50.0$

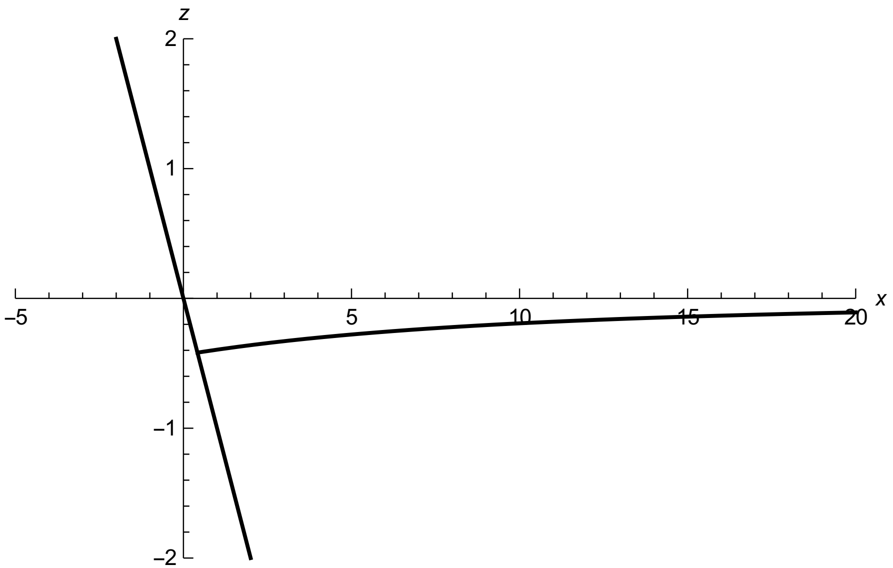
Графики скорости $u = u(x,t)$ "ступеньки" при $A = 4$, $b = 4$:



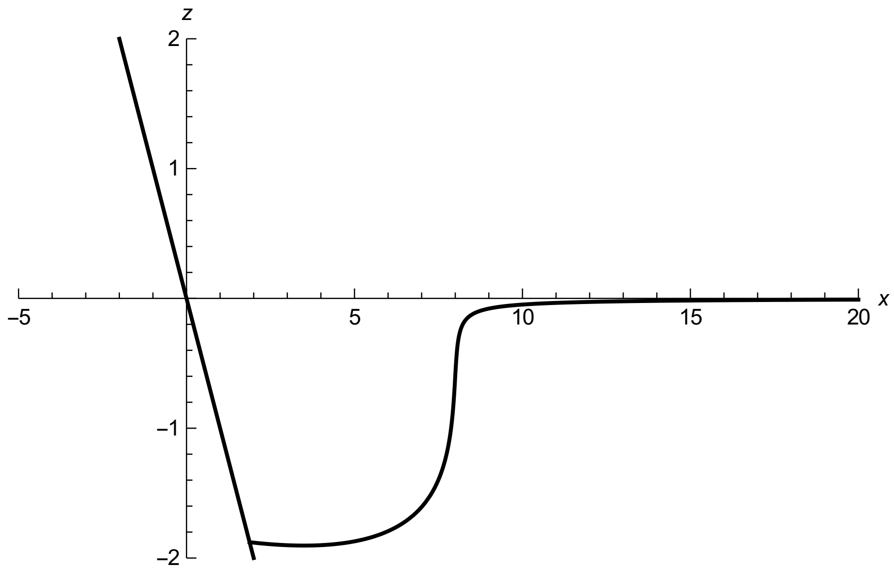
$$t = -50.0$$



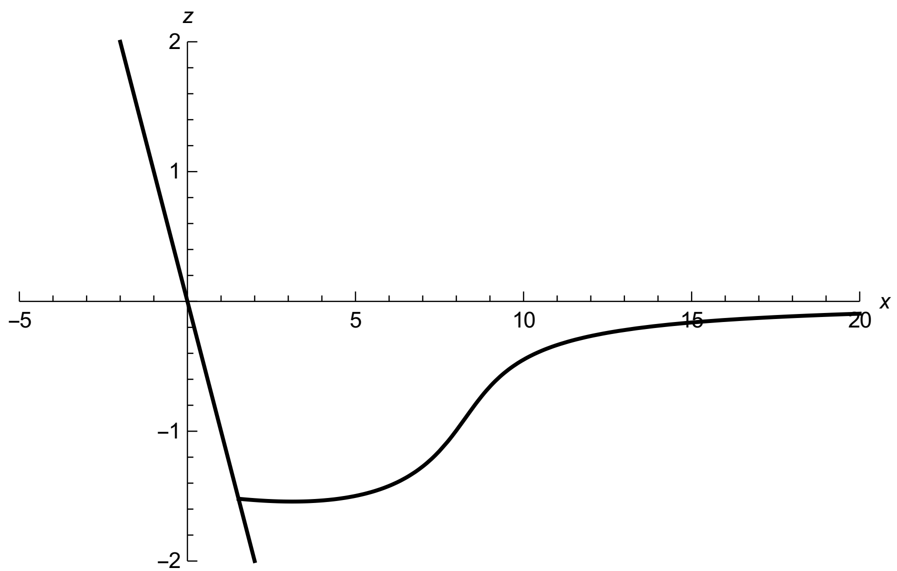
$$t = -4.0$$



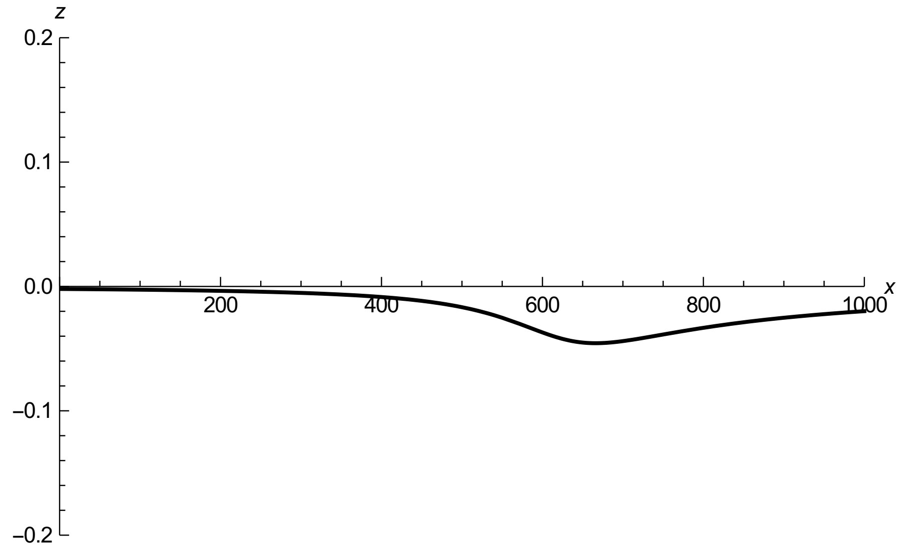
$\boldsymbol{t = -2.0}$



$\boldsymbol{t = 0.1}$



$t = 1.0$



$t = 50.0$

Литература

1. *Stoker J.J.* The formation of breakers and bores. The Theory of Nonlinear Wave Propagation in Shallow Water and Open Channels // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. V. 1. № 1. P. 1–87.

2. *Carrier G. F. and Greenspan H. P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach //Journal of Fluid Mechanics. 1958. V. 4. № 1. P. 97–109.

3. *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.* Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. Вып. 1 (391). С. 185–186.

4. *Pelinovsky E.N. and Mazova R.Kh.* Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles // Natural Hazards. 1992. V. 6, № 3. P. 227–249.

5. *Аксенов А.В., Дружков К.П.* Законы сохранения, симметрии и точные решения уравнений мелкой воды над неровным дном // Вестник Национального исследовательского ядерного университета ”МИФИ”. 2016. Т. 5. № 1. С. 38–46.