A. M. Obukhov Institute
of Atmospheric Physics RAS

Université des Sciences
et Technologies de Lille

Асимптотические законы роста языков интрузии в канале

В. П. Гончаров, В. И. Павлов

Содержание

Abstracts

Модель Ферми и фон Неймана обсуждается в контексте изучения интрузии. Показано, что предсказанные моделью асимптотические законы роста языков интрузии в бесконечном горизонтальном канале не вполне укладываются в классический сценарий линейного роста. Классический сценарий линейного роста ($x_1 \propto t$) поддерживается только для длины нижнего (тяжелого) языка интрузии. Что же касается верхнего (легкого) языка интрузии, то его длина подчиняется существенно нестепенному закону ($x_2 \propto t/\ln t$).

Интрузия в канале

Бокс-модели для РТН и интрузии

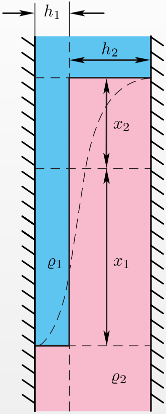

Рис. 1: Бокс-модель для РТН [4].

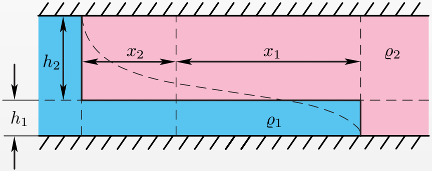

Рис. 2: Бокс-модель для интрузии.

Основная задача – получение уравнений движения в терминах габаритных (‘‘bulk’’) переменных x_1, x_2.

Оценка потенциальной энергии

Условие несжимаемости накладывает ограничение $h_1 x_1 = h_2 x_1$, а поскольку $h_1 + h_2 = h$, справедливы соотношения:

$$h_1 = h\frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad h_2 = h\frac{x_1}{x_1 + x_2}, \tag{1}$$

Зная вытесненные массы:
$m_1 = (\varrho_1 - \varrho_2)h_1 x_1$ и $m_2 = (\varrho_2 - \varrho_1)h_2 x_2$,
можно оценить изменение потенциальной энергии U:

$$U_{RTI} = -m_1 g\frac{x_1}{2} + m_2 g\frac{x_2}{2} = -g\frac{h}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)x_1 x_2, \tag{2}$$

$$U_{int} = -m_1 g\frac{h_1}{2} + m_2 g\frac{h_2}{2} = -g\frac{h^2}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}, \tag{3}$$

Оценка кинетической энергии

1. Кинетическая энергия K сосредоточена в зоне $(-x_2 \leq x \leq x_1)$ и обеспечивается главным образом x-компонентами скорости v_1 и v_2, зависящими от t и линейно x.
2. Полный расход жидкости в каждый момент и в любом сечении канала равен нулю.
3. На фронтах языков выполняются условия

$$v_1\big|_{x=x_1} = \dot{x}_1, \quad v_2\big|_{x=-x_2} = -\dot{x}_2. \tag{4}$$

Для этих условий Ферми и фон Нейман [4] нашли выражение для K:

$$K = h\frac{\varrho_2 x_2 + \varrho_1 x_1}{6x_1 x_2}\left(x_2^2\dot{x}_1^2 + x_1 x_2 \dot{x}_2 \dot{x}_1 + x_1^2 \dot{x}_2^2\right). \tag{5}$$

Лагранжиан для модели интрузии

$$L = h\frac{\varrho_2 x_2 + \varrho_1 x_1}{6x_1 x_2}\left(x_2^2\dot{x}_1^2 + x_1 x_2\dot{x}_2\dot{x}_1 + x_1^2\dot{x}_2^2\right) + \\ + g\frac{h^2}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}. \quad (6)$$

Уравнения движения следуют из принципа $\delta \int L dt = 0$.

Полубесконечный канал. Пусть более плотная жидкость ϱ_1 находится между закрытым левым торцом канала ($x = -l$) и затвором. Спустя некоторое время после открытия затвора для верхнего языка интрузии установится связь $x_2 = l$. Поэтому в приближении $x_1 \gg l$ из закона сохранения энергии получим

$$E = K + U = \frac{1}{6}hl\varrho_1\dot{x}_1^2 - glh^2\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} = 0. \quad (7)$$

Откуда для нижнего (тяжелого) языка интрузии следует закон

$$\dot{x}_1 = \sqrt{3gh\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1}}. \quad (8)$$

Численное интегрирование

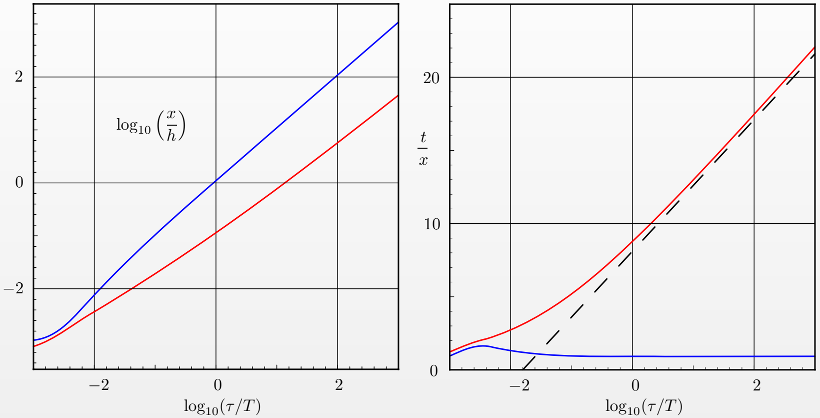

Рис. 3: Зависимости функций x_1, x_2 (график слева) и функций t/x_1, t/x_2 (график справа) от безразмерного времени $\tau = t/T$.
$(T = \sqrt{3h/(2g)}$, $A = 0.6$, $h_1(0) = 0.4)$.

Аналитический подход

$$x_1 = he^{s+q}, \quad x_2 = he^{s-q}, \tag{9}$$

$$t = \tau T, \quad T = \sqrt{\frac{3h}{2g}}, \quad A = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}. \tag{10}$$

$s(\tau)$, $q(\tau)$ – новые переменные, τ – новое время, T – его масштаб, A – число Атвуда.
Новый лагранжиан и уравнения модели:

$$L = e^{3s}\left(3\dot{s}^2 + \dot{q}^2\right)(\operatorname{ch} q + A \operatorname{sh} q) + \frac{9}{4} A \frac{e^s}{\operatorname{ch} q}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{s} e^{3s}\left(\operatorname{ch} q + A \operatorname{sh} q\right)\right) = \frac{3}{2} A \frac{e^s}{\operatorname{ch} q}, \tag{12}$$

$$3\dot{s}^2 + \dot{q}^2 = \frac{9}{4} \frac{A e^{-2s}}{\operatorname{ch} q \left(\operatorname{ch} q + A \operatorname{sh} q\right)}. \tag{13}$$

Приближенное интегрирование

Вводится вспомогательная функция $\varphi(q)$:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dq} = \frac{2}{3}\frac{dq}{ds}, \quad e^{2\varphi}\left[1 + \frac{3}{4}\varphi'^2\right] = 1 + A\,\mathrm{th}\, q. \tag{14}$$

Так как при достаточно больших q справедливо неравенство $\varphi' \ll 1$, уравнения (14) легко интегрируются

$$\frac{3A}{4}s = q + (A + \mathrm{th}\, q)\,\mathrm{ch}^2\, q, \quad s|_{q\to\infty} = \frac{A+1}{3A}e^{2q}. \tag{15}$$

В этом приближении, исключая q из уравнения (13), находим

$$\dot{s} \approx e^{-s}\,(2s)^{-1/2}\,, \quad s|_{\tau\to\infty} = \frac{1}{2}W(\tau^2), \tag{16}$$

где $W(z)$ – функция Ламберта [5]. Отметим, что эта функция обладает свойством $We^W = z$, и имеет нестепенную асимптотику $W|_{z\to\infty} = \ln z - \ln\ln z$.

Асимптотики интрузии

Используя свойства W-функции, можно восстановить асимптотики для длин языков интрузии

$$x_1 \approx h\sqrt{\frac{3A}{A+1}We^W} = t\sqrt{\frac{2ghA}{1+A}},$$

$$x_2 \approx \frac{h\tau}{3W}\sqrt{\frac{A+1}{A}} = \frac{t}{3W\left(\frac{2g}{3h}t^2\right)}\sqrt{2gh\frac{A+1}{A}}.$$

Линейный рост со временем имеет место лишь для длины нижнего языка интрузии более тяжелой жидкости, фронт которой движется асимптотически с постоянной скоростью. Для верхнего языка интрузии имеет место существенно нестепенная асимптотика.

Список литературы I

- J. E. Simpson, *Gravity currents: in the environment and the laboratory*, 2nd Ed (Cambridge University Press, Cambridge), 1997.
- M. Ungarish, *An Introduction to Gravity Currents and Intrusions*, (Chapman and Hall/CRC), 2009.
- R. J. Lowe, J. W. Rottman, P. F. Linden, J. Fluid Mech. **537**, 101 (2005).
- E. Fermi, *Collected Papers of Enrico Fermi* (University of Chicago Press, Chicago, 1965), Vol. II, Chap. 245, p. 821.
- А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков, *W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики*, Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.
- V. P. Goncharov, V. I. Pavlov, Asymptotic growth laws for intrusion tongues in lock-exchange flows. Physics of Fluids, **29**, 104101(5) (2017).