

Институт машиноведения УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
Казанский национальный исследовательский
университет им. А.Н. Туполева – КАИ

XXVI научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ ПРОТИВОТЕЧЕНИЙ

Просвиряков Евгений Юрьевич
evgen_pros@mail.ru, +79826545223

Система уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Класс точных решений Линя, предложенный для уравнений магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned}V_x &= U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y, \\ V_y &= V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y, \quad V_z = w(z, t). \\ P &= P_0(z, t) + xP_1(z, t) + yP_2(z, t) + \\ &+ \frac{x^2}{2}P_{11}(z, t) + xyP_{12}(z, t) + \frac{y^2}{2}P_{22}(z, t).\end{aligned}\tag{2}$$

Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395.

Euler L. Principia motus fluidorum // Novi Commentarii Acad. Sci. Imp. Petrop. – 1761. – Vol. 6. – P. 271–371.

Последний обзор, посвященный изотермическим решениям (4):

Аристов С.Н. Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. – 2009. – Т 43. – № 5. – С. 547–566.

Класс (4) дважды, на сколько известно, открывался заново.

1. Для задач конвекции с профилем температуры

$$T = T_0(z, t) + xT_1(z, t) + yT_2(z, t) :$$

Сидоров А.Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции. Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды // УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1981. – С. 101–117.

2. Для задач конвекции проводящей магнитно жидкости с профилем температуры

$$T = T_0(z, t) + xT_1(z, t) + yT_2(z, t) + \frac{x^2}{2}T_{11}(z, t) + xyT_{12}(z, t) + \frac{y^2}{2}T_{22}(z, t) ,$$

Аристов С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.02.05 – Владивосток: ИАПУ, 1990. – 32 с.

Последнее обобщение (4) было получено для уравнений термодиффузии с учетом перекрестных диссипативных эффектов Сюре и Дюфора

$$V_x = U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y,$$

$$V_y = V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y, \quad V_z = w(z, t).$$

$$P = P_0(z, t) + xP_1(z, t) + yP_2(z, t) + \\ + \frac{x^2}{2}P_{11}(z, t) + xyP_{12}(z, t) + \frac{y^2}{2}P_{22}(z, t).$$

$$T = T_0(z, t) + xT_1(z, t) + yT_2(z, t) + \frac{x^2}{2}T_{11}(z, t) + xyT_{12}(z, t) + \frac{y^2}{2}T_{22}(z, t),$$

$$C = C_0(z, t) + xC_1(z, t) + yC_2(z, t) + \frac{x^2}{2}C_{11}(z, t) + xyC_{12}(z, t) + \frac{y^2}{2}C_{22}(z, t).$$

Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. – 2016. – Т. 50. – № 3. – С. 294–301.

1. Точные решения Стокса (первая, вторая и третья задачи Стокса)

$$(U(z, t); 0; 0), \quad P = \text{const.}$$

Stokes, G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Camb. Philo. Trans. – 1851. – Vol. 9. – P. 8–106.

2. Течение Куэтта

$$(U(z); 0; 0), \quad P = \text{const.}$$

Couette, M. Études sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys. – 1890. – T. 21. – P. 433–510.

3. Течение Экмана

$$(U(z) - \Omega x; (V(z) + \Omega y; 0), \quad P = \text{const.}$$

Ekman, V.W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents // Ark. Mat. Astron. Fys. – 1905. – Vol. 2. – P. 1–52.

4. Течение Пуазёйля, Хагена-Пуазёйля

$$(U(z); 0; 0), \quad P = Ax.$$

Hagen, G. Über die Bewegung des Wasser in engencylindrischen Röhren // Pogg. Ann. – 1839. – Vol. 46. – P. 423–442.

Poiseuille, J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres / J. Poiseuille // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. – 1840. – Vol. 11. – P. 961–967. – P. 1041–1048.

Сдвиговые (обобщенные слоистые) течения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Изобарические течения жидкости (3) описываются уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Уравнения (4) можно записать следующим образом:

$$-V_y \Omega_z = -\frac{\partial E}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right),$$

$$V_x \Omega_z = -\frac{\partial E}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Здесь $\Omega_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ — вертикальная компонента завихренности;

$E = \frac{1}{2} (V_x^2 + V_y^2)$ — нормированная на плотность кинетическая энергия.

Стационарное неоднородное течение Куэтта

$$V_x = U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y,$$

$$V_y = V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y,$$

Порождающее решение

$$(U(z) + yu(z); V(z); 0), \quad P = \text{const.} \quad (5)$$

Неизвестные функции U , V и u вычисляются из системы:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \quad \nu \frac{d^2 U}{dz^2} = Vu. \quad (6)$$

Граничные условия при $z = 0$: $U = V = 0, u = 0$.

На границе $z = h$ заданы скорости: $U = W \cos \varphi, V = W \sin \varphi, u = \Omega$.

Неизвестные функции U , V и u вычисляются из системы:

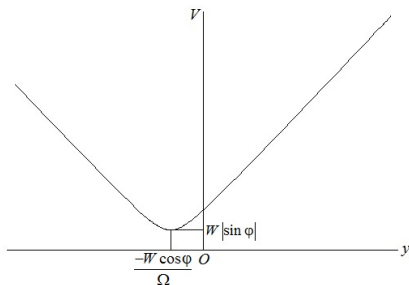
$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \quad \nu \frac{d^2 U}{dz^2} = Vu. \quad (7)$$

Граничные условия при $z = 0$:

$$V_x = 0, \quad V_y = 0 \text{ или } U = V = 0, u = 0.$$

На верхней границе $z = h$ заданы скорости:

$$V_x = W \cos \varphi + y\Omega, \quad V_y = W \sin \varphi \text{ или } U = W \cos \varphi, V = W \sin \varphi, u = \Omega.$$



Точное решение в безразмерной форме имеет вид:

$$V_Y = Z \sin \varphi,$$

$$V_X = Z \left[\frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{24} (Z^3 - 1) + \cos \varphi + \frac{1}{2\text{Ro}} Y \right].$$

Здесь $Z = \frac{z}{h}$, $Y = \frac{y}{l}$; $\text{Re} = \frac{Wl}{\nu}$, $\text{Ro} = \frac{W}{2\Omega l} = \frac{\text{Re}}{\text{Ta}}$ и $\text{Ta} = \frac{2\Omega l^2}{\nu}$ — соответственно числа Рейнольдса, Россби и модифицированное число Тейлора второго рода.

Полученное точное решение редуцируется к классическому течению Куэтта при $\text{Ta} = 0$ ($\Omega = 0$)

$$V_Y = Z \sin \varphi, \quad V_X = Z \cos \varphi;$$

при $\text{Re} = 0$ ($W = 0$) моделирует течение в прямом угле:

$$V_X = \frac{1}{2\text{Ro}} ZY, \quad V_Y = 0.$$

Анализ решения при регистрации противотечений

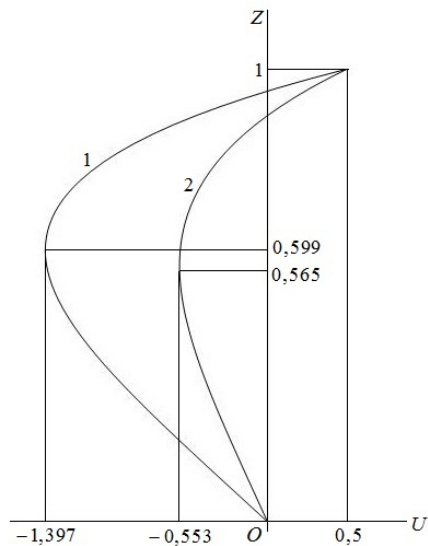
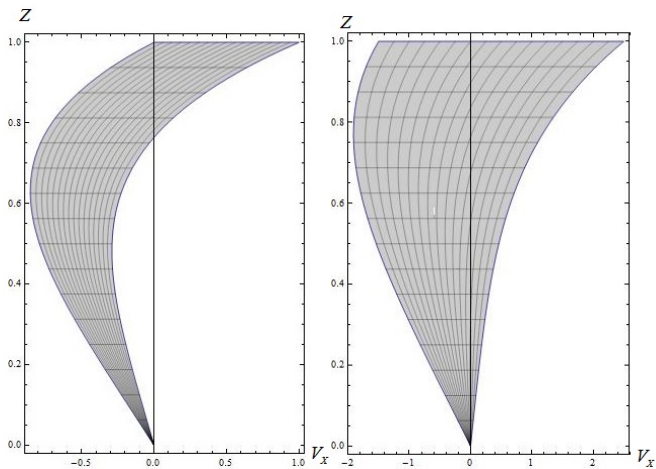


Рис. 2. Профиль скорости U при $Ta\delta^2 = 100$ (кривая 1) и при $Ta\delta^2 = 50$ (кривая 2)

Анализ решения при регистрации противотечений



а

б

Рис. 2. Веер годографов вектора скорости $(V_x; V_y; 0)$

а — при $Ta\delta^2 = 50$, $Ro = 20$, $Y \in [-1; 1]$;

б — при $Ta\delta^2 = 50$, $Ro = 0, 5$, $Y \in [-1; 1]$

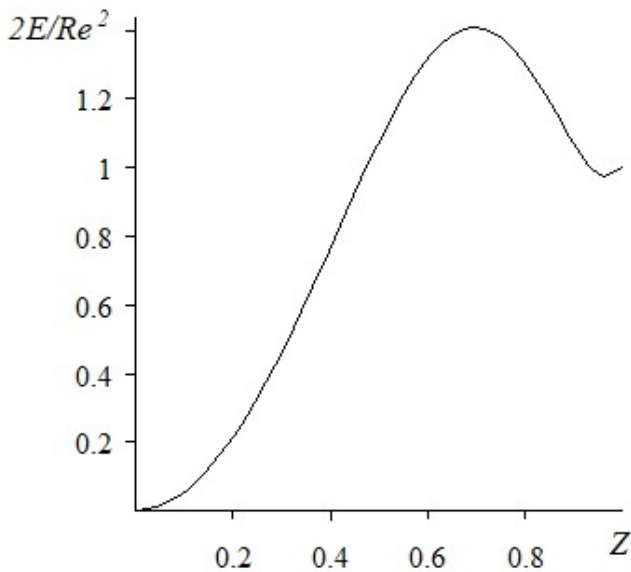


Рис. 3. График кинетической энергии в слое жидкости

Точное решение (5) справедливо для неоднородного течения Пуазёйля при задании давления по закону

$$P = S - g(Z - 1) + XP_1 + YP_2.$$

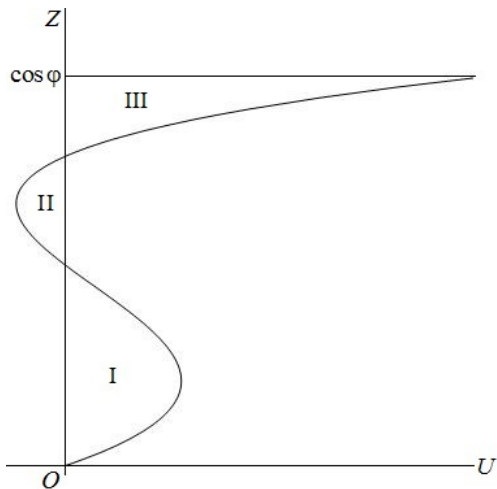


Рис. 4. Профиль скорости $V_X = U$ при наличии двух застойных точек

Переопределенная система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для слоистых течений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= g\beta T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Обобщение установившихся течений Остроумова-Бириха

$$\begin{aligned}V_x &= U(z), \quad V_y = V(z), \\ P &= P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z), \quad T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z)\end{aligned}\tag{9}$$

При подстановке выражений (9) в систему (8) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T_2}{dz^2} = 0, \quad \frac{dP_1}{dz} = g\beta T_1, \quad \frac{dP_2}{dz} = g\beta T_2, \\ \nu \frac{d^2 U}{dz^2} = P_1, \quad \nu \frac{d^2 V}{dz^2} = P_2, \quad \chi \frac{d^2 T_0}{dz^2} = UT_1 + VT_2, \quad \frac{dP_0}{dz} = g\beta T_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия на нижней абсолютно твердой границе $z = 0$ имеют вид:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0; \quad (11)$$

на верхней границе $z = h$ справедливы условия:

$$\begin{aligned} P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = A, \quad T_2 = B, \\ \eta \frac{dU}{dz} = -\sigma T_1, \quad \eta \frac{dV}{dz} = -\sigma T_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Точное решение краевой задачи (10), (12):

$$\begin{aligned} T_1 = A \frac{z}{h}, \quad T_2 = B \frac{z}{h}, \quad P_1 = \frac{Ag\beta h}{2} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right), \quad P_2 = \frac{Bg\beta h}{2} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right), \\ U = -\frac{A\sigma h}{\eta} \frac{z}{h} + \frac{Ag\beta h^3}{24\nu} \frac{z}{h} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^3 - 6 \left(\frac{z}{h} \right) + 8 \right), \\ V = -\frac{B\sigma h}{\eta} \frac{z}{h} + \frac{Bg\beta h^3}{24\nu} \frac{z}{h} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^3 - 6 \left(\frac{z}{h} \right) + 8 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Краевая задача (10), (12) может быть сведена к одномерной преобразованием поворота:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{V}{U}.$$

Существует такая толщина слоя

$$h = \sqrt{\frac{3\sigma}{g\beta\rho}}$$

что касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ при $z = 0$, если $\sigma > 0$ (для классических жидкостей).

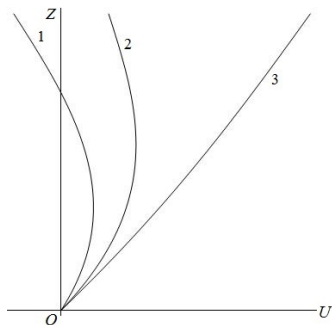


Рис. 5. Профили скоростей U и V при конвективном течении Марангони

Профили данных гидродинамических полей представлены на рис. 6, 7.

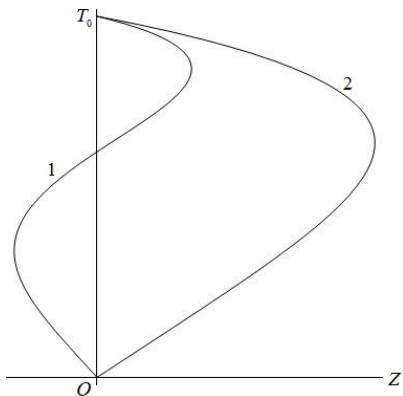


Рис. 6. Профили температуры $T = T_0$ ($x = y = 0$)

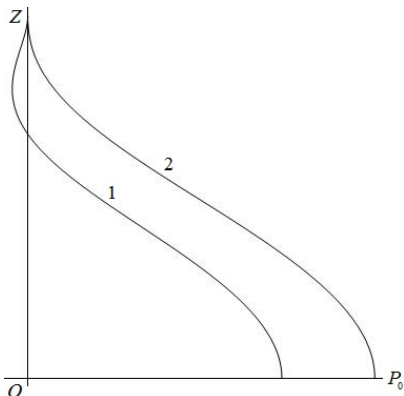


Рис. 7. Профили давления $P = P_0$ ($x = y = 0$)

Неоднородное конвективное уравнение Куэтта

$$\begin{aligned} V_x(y, z) &= U(z) + yu(z), \quad V_y = V(z), \\ P &= P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z), \quad T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z). \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия на нижней границе $z = 0$:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad u = 0, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0; \quad (15)$$

Краевые условия на верхней границе $z = h$:

$$\begin{aligned} U &= W \cos \varphi, \quad V = W \sin \varphi, \quad u = \Omega, \\ P_0 &= 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = A, \quad T_2 = B. \end{aligned} \quad (16)$$

У краевой задачи (9), (14), (15), (16) не может быть понижена размерность из-за возникающего вертикального вихря в жидкости.

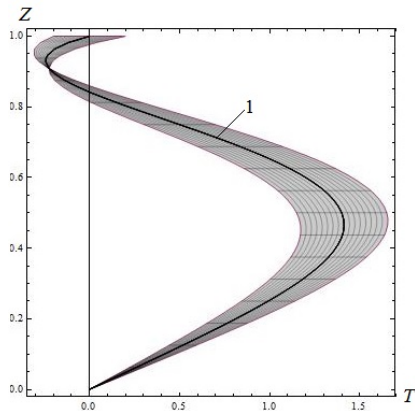


Рис. 8. Качественный вид веера профилей температуры $T = T_0 + T_2 y$ при существовании двух точек расслоения

Нестационарные решения уравнений Навье-Стокса

$$(U(z, t) + yu(z, t); V(z, t); 0), \quad P = \text{const.} \quad (17)$$

Поле скоростей (17) вычисляется из системы уравнений, которая следует из уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - uV. \quad (18)$$

На нижней границе $z = 0$ использовалось условие Стокса:

$$U = 0, \quad V = A \sin \omega t, \quad u = 0; \quad (19)$$

верхняя граница $z = h$:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad u = \Omega = \text{const.} \quad (20)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\Omega}{h}.$$

Далее ограничиваемся стационарным решением для функции

$$u = \frac{\Omega z}{h}.$$

Скорости V_x и V_y в результате решения краевой задачи методом Фурье:

$$\begin{aligned}
 V_y = & \frac{A \exp(-kz)}{1 + 2 \exp(2kh) \cos(2kh) + \exp(4kh)} \times \\
 & \times [(\exp(2hk) - \exp(2k(h+z))) \sin(k(2h-z)) - \\
 & - (\exp(4hk) - \exp(2kz)) \sin(kz)] \cos(\omega t) + \\
 & \frac{A \exp(-kz)}{1 + 2 \exp(2kh) \cos(2kh) + \exp(4kh)} \times \\
 & \times [\exp(2hk)(1 + \exp(2kz)) \cos(k(2h-z)) + \\
 & + (\exp(4hk) + \exp(2kz)) \cos(kz)] \sin(\omega t); \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_x = & \Omega \frac{z}{h} y + \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(kz) \cos(kz + \omega t) \times \\
 & \times \left[\frac{kh}{2} + \frac{1}{4kh} + \right. \\
 & \left. + \frac{-kz^2 (1 + \exp(2kh) \cos(2kh) + \sin(2kh)) + z (1 + \exp(2kh) \cos(2kh))}{h [1 + 2 \exp(2kh) \cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(kz) \sin(kz + \omega t) \times \\
& \quad \times \left[-\frac{kh}{2} + \frac{1}{4kh} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{kz^2 (1 + \exp(2kh) \cos(2kh) - \sin(2kh)) + z \sin(2kh)}{h [1 + 2 \exp(2kh) \cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right] + \\
& \quad \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(-kz) \cos(kz - \omega t) \times \\
& \quad \times \left[-\frac{kh}{2} - \frac{1}{4kh} + \right. \\
& \quad \left. + \exp(2kh) \frac{kz^2 (\exp(2kh) + \cos(2kh) - \sin(2kh)) + z (\exp(2kh) + \cos(2kh))}{h [1 + 2 \exp(2kh) \cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right] - \\
& \quad - \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(-kz) \sin(kz - \omega t) \times \\
& \quad \times \left[\frac{kh}{2} - \frac{1}{4kh} + \right. \\
& \quad \left. + \exp(2kh) \frac{kz^2 (\exp(2kh) + \cos(2kh) + \sin(2kh)) + z \sin(2kh)}{h [1 + 2 \exp(2kh) \cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Здесь $k^2 = \frac{\omega}{2\nu}$ — дисперсионное соотношение.

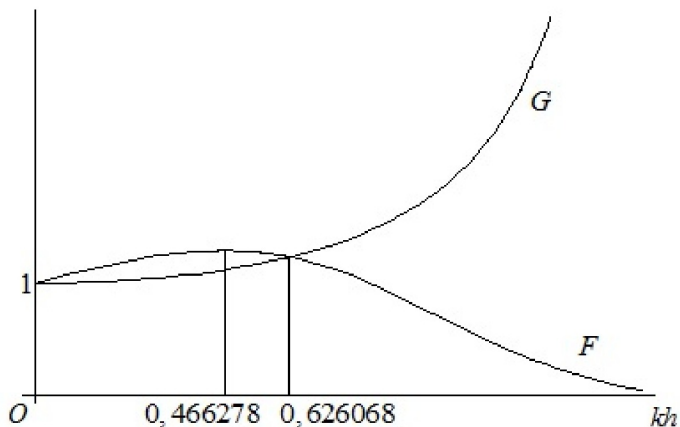


Рис. 9. Графики огибающей F скорости V_y при $z = h$ и огибающей G нижней границе $z = 0$ слоя вязкой несжимаемой жидкости

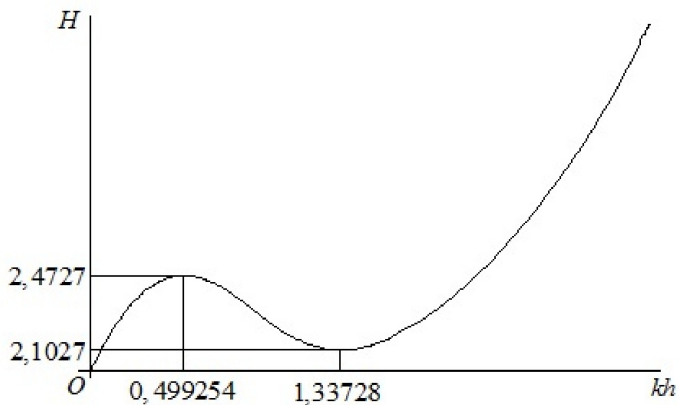


Рис. 10. График результирующей огибающей скорости V_x на свободной и нижней границах слоя вязкой несжимаемой жидкости

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!