

# Точные решения для нелинейных стадий развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца свободной поверхности гелия-II

*Н.М. Зубарев<sup>1,2</sup>, П.М. Лушников<sup>3,4</sup>*

*<sup>1</sup>Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

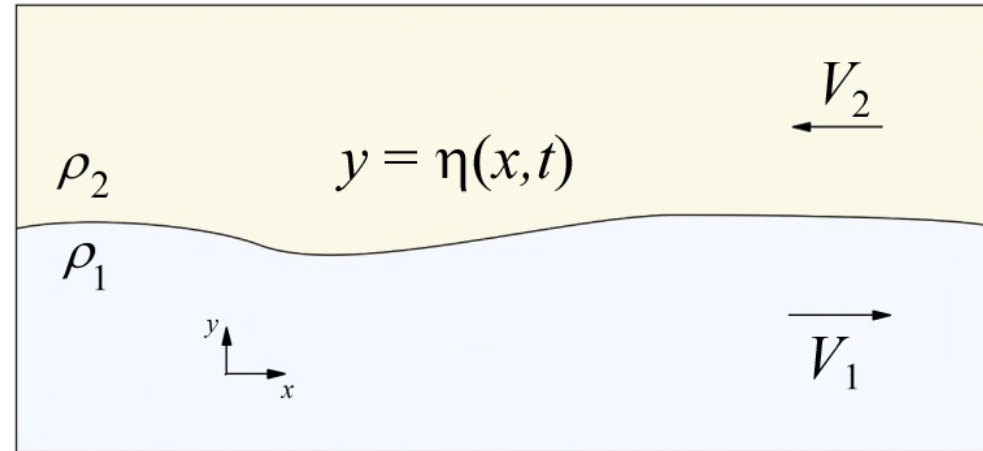
*<sup>2</sup>Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия*

*<sup>3</sup>Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва, Россия*

*<sup>4</sup>Department on Mathematics and Statistics, University of New Mexico, New Mexico, USA*

XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике,  
Москва, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 18-19 декабря 2017 г.

# Классическая неустойчивость Кельвина-Гельмгольца



Неустойчивость развивается на масштабе  $2\pi(\alpha / g)^{1/2}$  при

$$V > V_c \equiv \left[ 4g\alpha(\rho_1 + \rho_2)^3 \rho_1^{-2} \rho_2^{-2} \right]^{1/4}, \quad \text{где } V \equiv |V_2 - V_1|.$$

- [1] Г. Ламб, Гидродинамика, М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат (1947).
- [2] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика, М.: Наука (1988).
- [3] Ю.А. Степанянц, А.Л. Фабрикант, УФН **159**, 83 (1989).
- [4] Е.А. Кузнецов, П.М. Лушников, ЖЭТФ **108**, 614 (1995).
- [5] D.W. Moore, Proc. R. Soc. Lond. A **365**, 105 (1979).
- [6] Н.М. Зубарев, Е.А. Кузнецов, ЖЭТФ **146**, 194 (2014).

# «Квантовая» неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Свободная поверхность  ${}^4\text{He}$  в сверхтекучем состоянии (гелий-II) неустойчива при относительном движении сверхтекучей и нормальной компонент с достаточно большой разностью скоростей  $V = |V_s - V_n|$ .

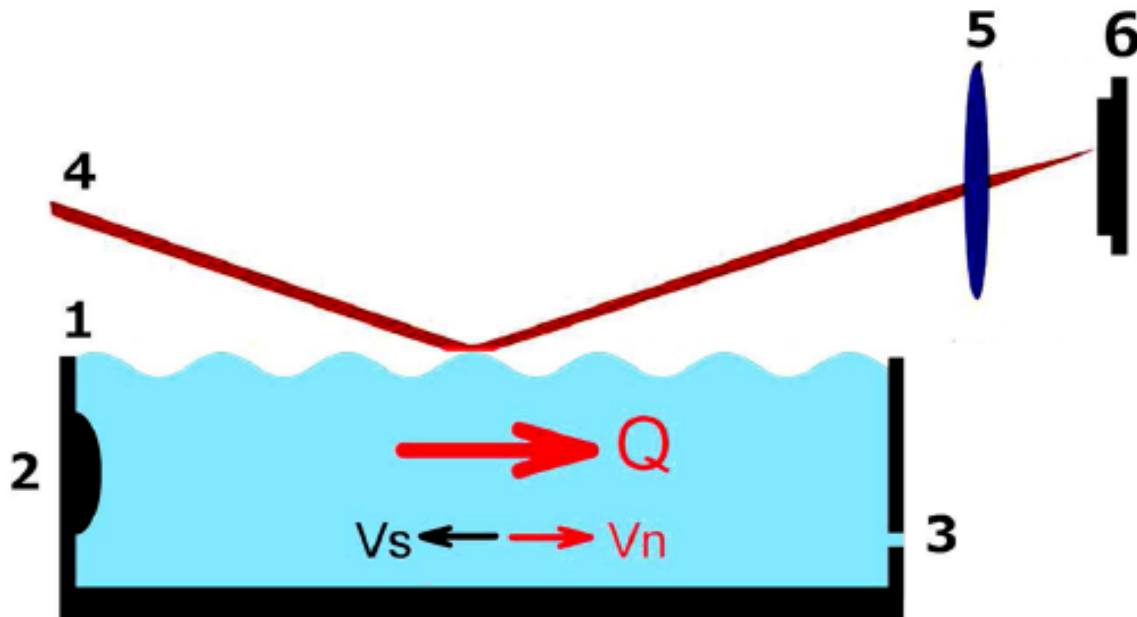
Условия развития неустойчивости [1,2]:

$$V > V_c, \text{ либо } V > V_c^* \equiv V_c \left( \rho_n / \rho \right)^{1/2}, \text{ где } \rho = \rho_s + \rho_n.$$

[1] S.E. Korshunov, Europhys. Letters 16, 673 (1991).

[2] S.E. Korshunov, JETP Letters 75, 496 (2002).

[3] I.A. Remizov, A.A. Levchenko, L.P. Mezhev-Deglin, J. Low Temp. Phys. 185, 324 (2016).

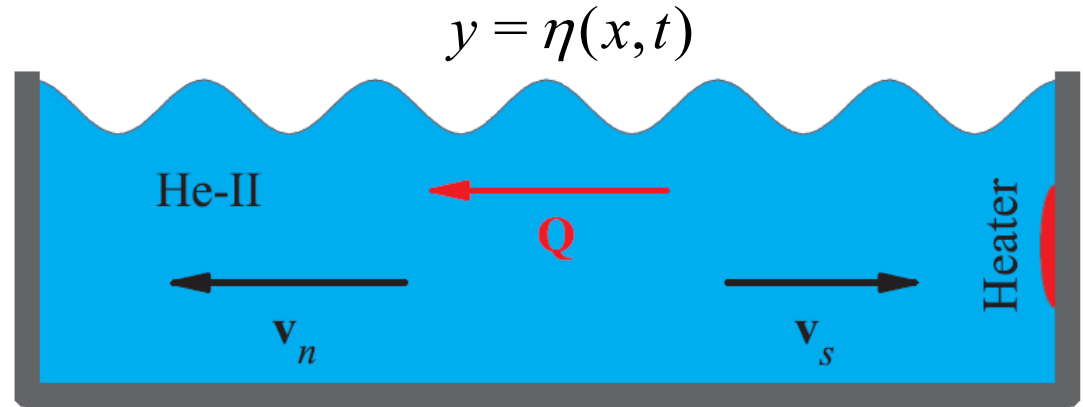


**Figure:** Scheme of the experiment: 1 - the rectangular container; 2 - the resistive heater; 3 - holes in the lateral walls (used in the main experiments, only); 4 - the laser beam; 5 - the lens and 6 - the photodetector [3].

# Исходные уравнения (non-dissipative two-fluid description)

$$\vec{v}_{s,n} = \nabla \Phi_{s,n}$$

$$\rho_{s,n} = \text{const}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi_{n,s} = 0, \\ \rho_n \left( \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi_n)^2}{2} \right) + \rho_s \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi_s)^2}{2} \right) = \Gamma - P_\alpha - P_g \quad \text{при } y = \eta, \\ \eta_t (1 + \eta_x^2)^{-1/2} = \partial_n \Phi_n = \partial_n \Phi_s \quad \text{при } y = \eta, \\ \Phi_{n,s} \rightarrow V_{n,s} x \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty, \end{array} \right.$$

где  $P_\alpha = -\alpha \eta_{xx} (1 + \eta_x^2)^{-3/2}$  - капиллярное давление,

$P_g = \rho g \eta$  - гравитационное давление,

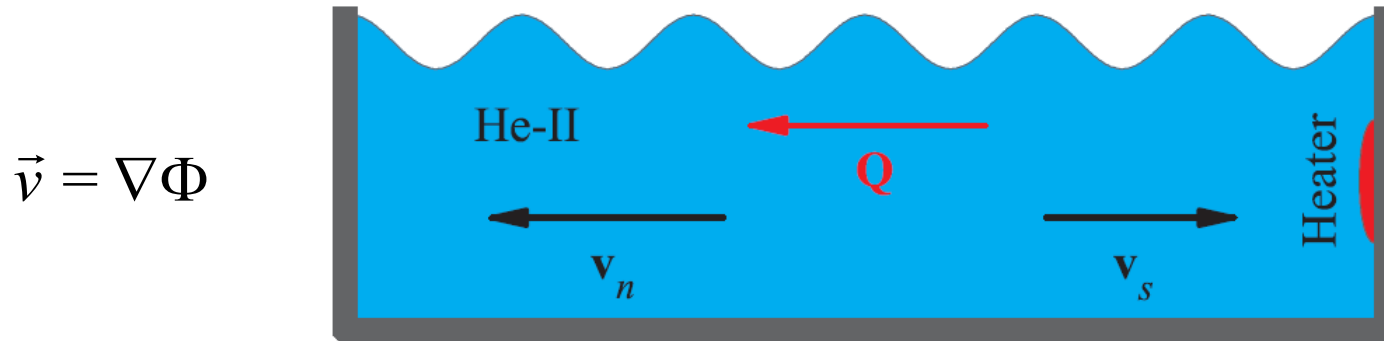
$\Gamma = \rho_n \rho_s V^2 / (2\rho)$  - постоянная Бернулли,

$V = V_s - V_n > 0$  - относительная скорость компонент гелия-II.

Уравнения записаны в системе центра масс:  $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$ .

Введем среднюю скорость  $\vec{v} = (\rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s)/\rho$  и вспомогательные потенциалы:

$$\Phi = (\rho_n \Phi_n + \rho_s \Phi_s)/\rho, \quad \phi = \sqrt{\rho_n \rho_s} (\Phi_n - \Phi_s)/\rho.$$



Уравнения движения переписутся в виде:

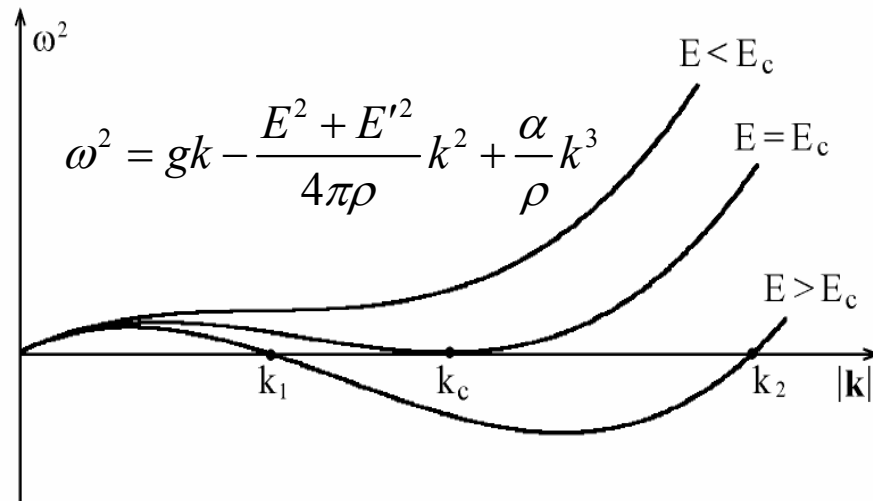
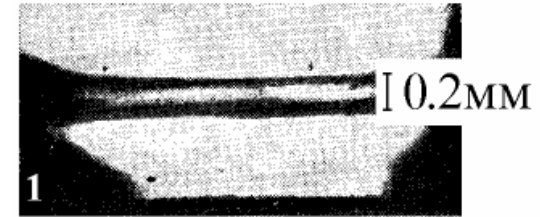
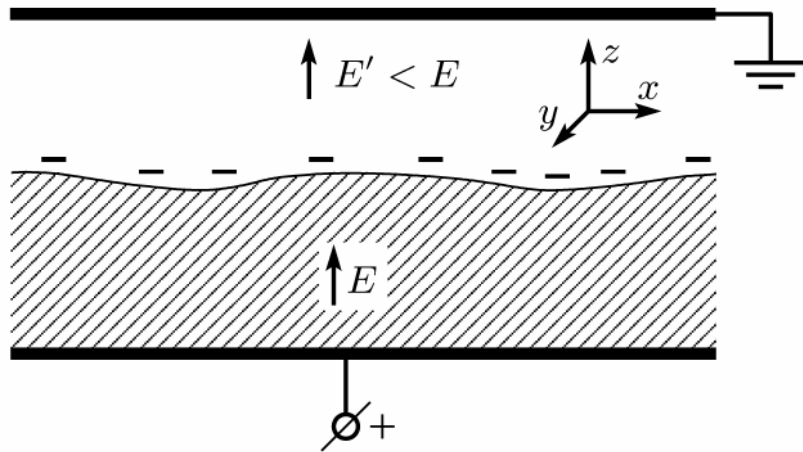
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} = \frac{\Gamma - P_\alpha + P_g}{\rho} \quad \text{при } y = \eta, \\ \eta_t (1 + \eta_x^2)^{-1/2} = \partial_n \Phi \quad \text{при } y = \eta, \\ \partial_n \phi = 0 \quad \text{при } y = \eta, \\ \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty, \\ \phi \rightarrow -Vx \sqrt{\rho_n \rho_s} / \rho \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty. \end{array} \right.$$

Заменим теперь потенциал  $\phi$  на гармонически сопряженную функцию  $\psi$  (они связаны условиями Коши-Римана  $\phi_x = \psi_y$  и  $\phi_y = -\psi_x$ ). Получим в итоге:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{(\nabla \psi)^2}{2} = \frac{c^2}{2} - \frac{P_\alpha + P_g}{\rho} \quad \text{при } y = \eta, \\ \eta_t (1 + \eta_x^2)^{-1/2} = \partial_n \Phi \quad \text{при } y = \eta, \\ \partial_\tau \psi = 0 \quad \text{при } y = \eta, \\ \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty, \\ \psi \rightarrow -cy \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty, \text{ где } c = \sqrt{2\Gamma/\rho}. \end{array} \right.$$

Примечательно, что эти уравнения с точностью до тривиальных замен переменных эквивалентны уравнениям, описывающим развитие электрогидродинамической (ЭГД) неустойчивости заряженной электронами границы жидкого гелия в пределе, когда заряд полностью экранирует электрическое поле над жидкостью. В последнем случае  $\Phi$  имеет смысл потенциала скорости единственной, сверхтекучей компоненты гелия-II, а  $\psi$  – потенциала электрического поля в жидкости.

# ЭГД неустойчивость заряженной поверхности жидкого гелия



А.П. Володин, М.С. Хайкин,  
В.С. Эдельман, Письма в ЖЭТФ  
26, 707 (1977).

Предел сильного поля:  $E^2 \gg E_c^2 = 8\pi\sqrt{\rho g \alpha}$ . Для волновых чисел в диапазоне  $\rho g / E^2 \ll k \ll E^2 / \alpha$  можно пренебречь влиянием капиллярных и гравитационных сил. В этом приближении уравнения движения могут быть решены аналитически [Н.М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ, 2000; ЖЭТФ, 2002].

# Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца поверхности гелия-II

Пренебрежем в нестационарном уравнении Бернулли слагаемыми  $P_\alpha$  и  $P_g$ .

Введем пару новых гармонических потенциалов:

$$F^{(\pm)} = (\Phi \pm \psi \pm cy) / 2.$$

Уравнения движения запишутся в симметричном виде:

$$\begin{cases} \nabla^2 F^{(+)} = 0, \\ F_t^{(+)} - cF_y^{(+)} + (\nabla F^{(+)})^2 = 0 \text{ при } y = \eta, \\ F^{(+)} \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 F^{(-)} = 0, \\ F_t^{(-)} + cF_y^{(-)} + (\nabla F^{(-)})^2 = 0 \text{ при } y = \eta, \\ F^{(-)} \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$c\eta = F^{(+)} - F^{(-)} \Big|_{y=\eta}.$$

Они совместны с условием, что  $F^{(+)} = 0$ , либо  $F^{(-)} = 0$ .

Если вернуться к физическим потенциалам скоростей  $\Phi_{n,s}$  и функциям тока  $\Psi_{n,s}$  (они связаны условиями Коши-Римана), эти условия запишутся как:

$$\mp \sqrt{\rho_n \rho_s} (\Psi_n - \Psi_s + Vy) = \rho_n \Phi_n + \rho_s \Phi_s.$$



# В чем физический смысл найденных редукций?

Дисперсионное соотношение для линейных поверхностных волн:

$$\omega^2 = -c^2 k^2.$$

У него имеется две ветви решений,

$$\omega^{(\pm)} = \pm i c k,$$

соответствующих экспоненциально нарастающим и затухающим возмущениям поверхности:

$$\eta = a^{(+)} \exp(ikx - i\omega^{(+)}t) + a^{(-)} \exp(ikx - i\omega^{(-)}t),$$
$$F^{(\pm)} = \pm c a^{(\pm)} \exp(ikx + ky - i\omega^{(\pm)}t).$$

Использование условия  $F^{(+)} = 0$ , либо условия  $F^{(-)} = 0$  выделяет одну из двух ветвей решений в полных нелинейных уравнениях движения.

Естественно рассматривать нарастающие со временем решения, полагая  $F^{(-)} = 0$ .

# Редуцированные уравнения движения

При  $F^{(-)} = 0$  справедливо:  $F^{(+)} = \Phi = \psi + cy$ , т.е. потенциалы связаны.

Получим в итоге:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = 0, \\ (\eta_t - c)(1 + \eta_x^2)^{-1/2} = \partial_n \psi \quad \text{при } y = \eta, \\ \psi = 0 \quad \text{при } y = \eta, \\ \psi \rightarrow -cy \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ и } y \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Осуществим конформное преобразование  $z = z(w, t)$  области, занимаемой жидкостью в физической плоскости  $z = x + iy$ , в нижнюю полуплоскость ( $-\infty < v < 0$ ,  $-\infty < u < \infty$ ) комплексной переменной  $w = u + iv$ . Поверхность задается параметрическими выражениями

$$y = Y(u, t) \equiv \text{Im } z(u, t), \quad x = X(u, t) \equiv \text{Re } z(u, t).$$

Система сводится к единственному уравнению на функцию  $G(u, t) = z(u, t) - ict$ :

$$\text{Im}(\bar{G}_t G_u) = c.$$

Это – уравнение лапласовского роста.

# Уравнение лапласовского роста (УЛР); точные частные решения

$$\text{Im}(\bar{G}_t G_u) = c$$

- [1] P.Ya. Polubarinova-Kochina, Dokl. Akad. Nauk SSSR **47**, 254 (1945).
- [2] L.A. Galin, Dokl. Akad. Nauk SSSR **47**, 246 (1945).
- [3] B.I. Shraiman and D. Bensimon, Phys. Rev. A **30**, 2840 (1984).
- [4] S.D. Howison, SIAM J. Appl. Math. **46**, 20 (1986).
- [5] D. Bensimon, L.P. Kadanoff, S. Liang, B.I. Shraiman, and C. Tang, Rev. Mod. Phys. **58**, 977 (1986).
- [6] M.B. Mineev-Weinstein and S.P. Dawson, Phys. Rev. E **50**, R24 (1994).

# Периодическое решение УЛР

Подстановка:

$$z(w, t) = w - ikA^2(t)/2 - iA(t)e^{-ikw},$$

где  $k$  – волновое число, а  $A$  – амплитуда, удовлетворяющая ОДУ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{ckA}{1 - k^2 A^2}.$$

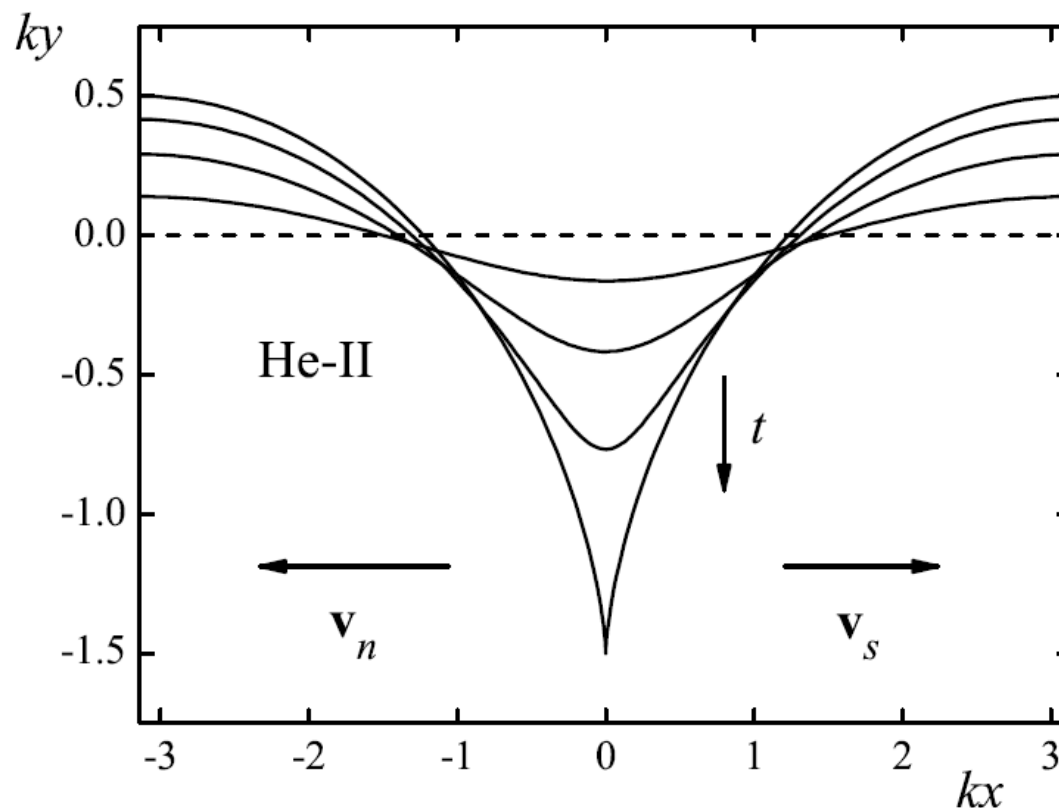
Формирование особенности:

$$y \approx -\frac{3}{2k} + 2\sqrt{\frac{c(t_c - t)}{k}}$$

при  $x = 0$  и  $t \rightarrow t_c$  ( $A(t_c) = 1/k$ );

$$y + 3/(2k) \sim |x|^{2/3}$$

при  $u \rightarrow 0$  и  $t = t_c$ .



В особой точке в бесконечность обращаются кривизна границы и скорости обеих компонент гелия-II.

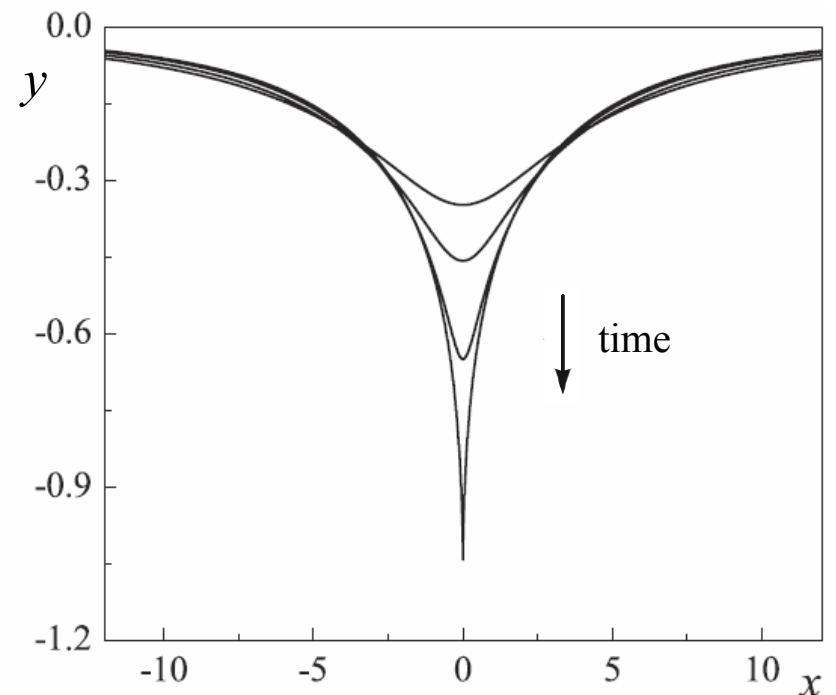
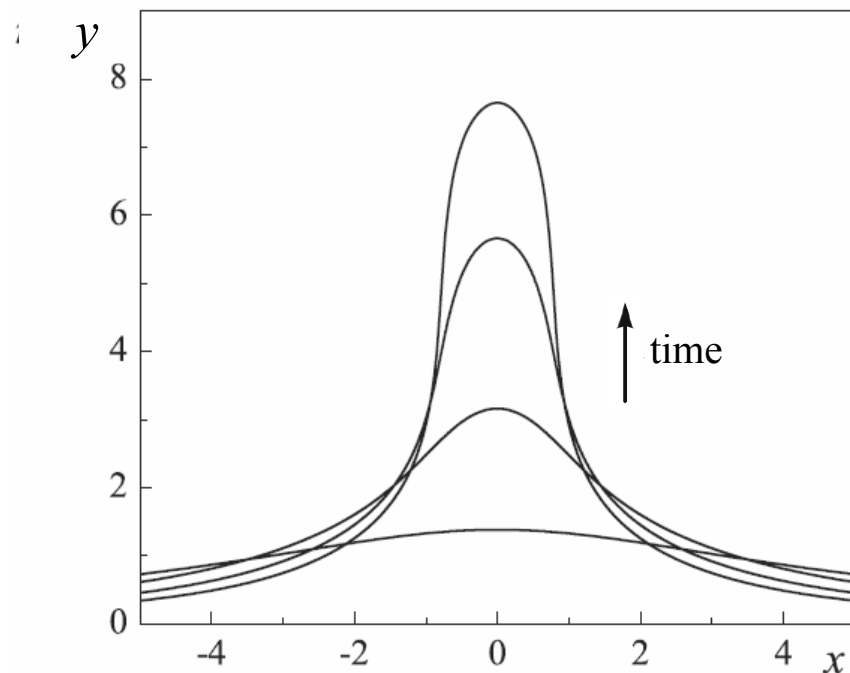
# Пространственно локализованные решения УЛР

Подстановка:

$$G(u, t) = u - ict - i \sum_{n=0}^N a_n \ln(u - w_n(t)), \quad a_0 = - \sum_{n=1}^N a_n,$$

$$w_n + ict + i \sum_{m=0}^N \bar{a}_m \ln(w_n - \bar{w}_m) = C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

На рисунках изображены решения для  $N = 1$ ,  $a_1 = \pm 1$ .



# Заключение

Исследована неустойчивость Кельвина-Гельмгольца общей свободной поверхности нормальной и сверхтекучей компонент гелия-II, развивающаяся при их относительном движении. Получены точные решения уравнений движения, описывающие нелинейные стадии развития этой неустойчивости. В отличие от обычной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца границы раздела между двумя жидкостями, для гелия-II удастся выделить в уравнениях движения отдельные ветви, соответствующие затухающим, либо нарастающим со временем решениям. В итоге задача сводится к единственному уравнению лапласовского роста, допускающему бесконечное число точных решений. В частности, его решения описывают формирование на свободной поверхности гелия-II заостренных лунок за конечное время.

**Спасибо за  
внимание!**