

Уравнение Хассельманна (кинетическое уравнение

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \pi g^2 \int_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} (T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4))^2 \times \\ \times (NN_3N_4 + N_2N_3N_4 - NN_2N_3 - NN_2N_4) \times \\ \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4$$

(Нумерация векторов выбрана для удобства в дальнейшем)

The Quadruplets

Интегрирование в кинетическом уравнении выполняется по квадруплетам векторов, удовлетворяющих резонансным условиям

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \quad \omega + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$$

Эти квадруплеты инвариантны относительно поворотов. Для случая глубокой воды ($\omega = \sqrt{gk}$) они также инвариантны относительно масштабирования. Мы фиксируем масштаб и положение квадруплетов, нормируя их на базовый вектор:

$$\mathbf{k}_B = \frac{1}{2}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Ниже мы обозначаем нормирование символом тильда.

Основным параметром нормированного квадруплета является безразмерный модуль s

$$s = \frac{1}{2\sqrt{gk_B}}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2\sqrt{gk_B}}(\omega_3 + \omega_4)$$

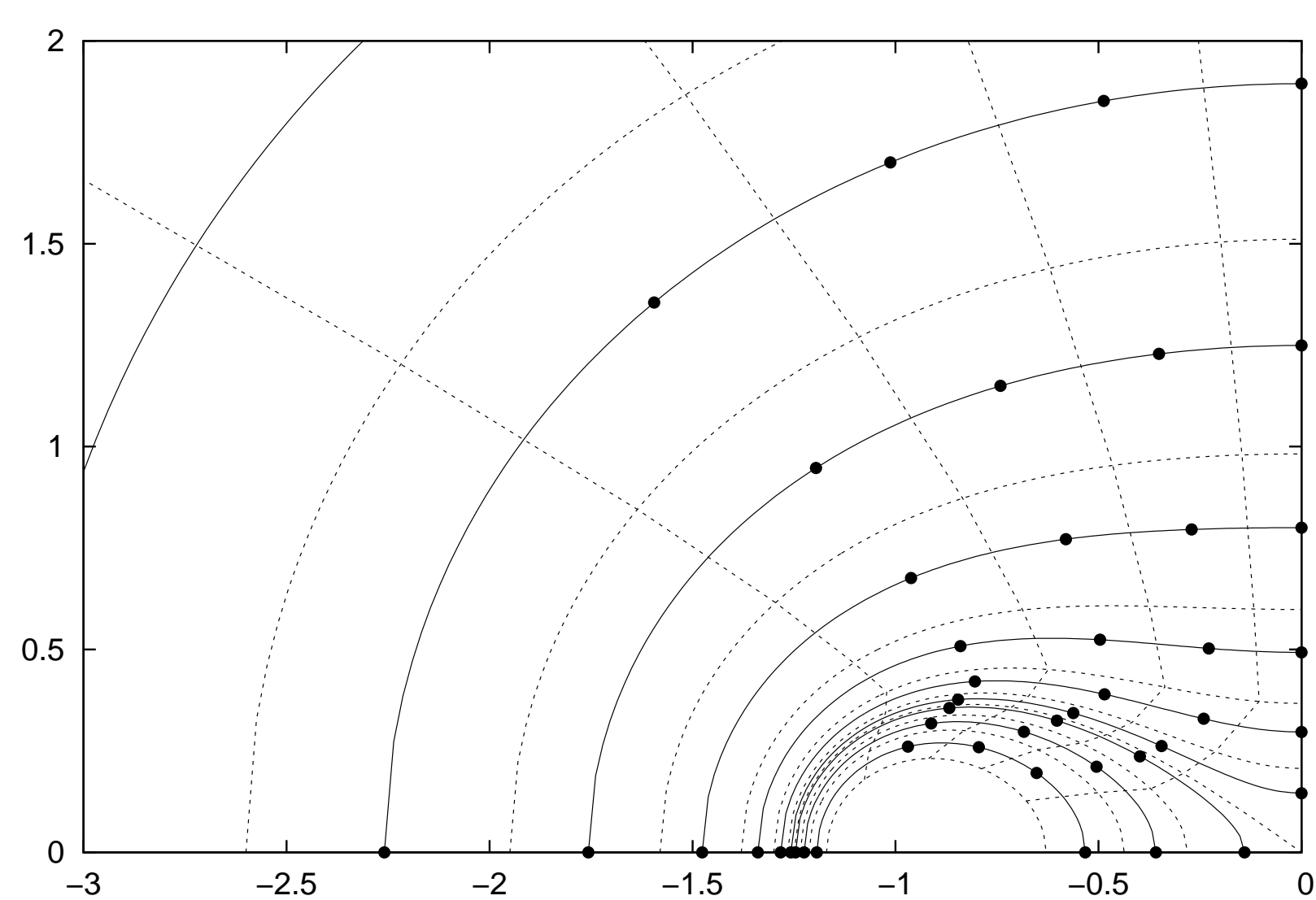
Классификация

На кривой Филлиписа $s = 1$.

Значения s , близкие к минимальному $\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют длинно-коротким взаимодействиям ($k_1, k_3 \ll k_2, k_4$). При счёте эти взаимодействия надо ограничить. Это ограничение является естественным, поскольку коэффициент T для них быстро убывает.

Большие s соответствуют угловым квадруплетам ($\mathbf{k}_1 \sim -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \sim -\mathbf{k}_4$). Эти квадруплеты обеспечивают непосредственное взаимодействие между волнами, распространяющимися под разными углами.

Сетка для вычислений



На рисунке показана минимальная сетка квадруплетов, дающая приемлемую точность вычислений. Квадруплет задаётся любой парой точек с одинаковым модулем s .

Выбор углового распределения точек по изолиниям s основан на том, что естественные волновые спектры весьма сильно зависят от частоты. Поэтому точки выбраны распределёнными равномерно по модулю k , а не по углу.

Уравнение Хассельманна в безразмерных переменных

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\pi g^{3/2} k^{19/2} \int_{\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_3} (\tilde{T}_{\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2, \tilde{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{k}}_4})^2 \tilde{k}_1^{-23/2} \times \\ \times (NN_3N_4 + N_2N_3N_4 - NN_2N_3 - NN_2N_4) \delta(s - s') d\tilde{\mathbf{k}}_1 d\tilde{\mathbf{k}}_3$$

Переменные в этом уравнении связаны резонансными соотношениями. Вектор $\tilde{\mathbf{k}}_1$ представляет собой вектор \mathbf{k} нормированный на $\tilde{\mathbf{k}}_B$. Последний, в свою очередь, определяется переменными интегрирования. $\tilde{\mathbf{k}}_3$ — это вектор \mathbf{k}_3 нормированный на $\tilde{\mathbf{k}}_B$.

Модуль s определяется частотами, ω_1, ω_2 в то время как s' определяется частотами ω_3, ω_4 . Дельта-функция обеспечивает их равенство.

Метрика

Интегрирование по квадруплетам требует введения метрики на пространстве квадруплетов. Мы не можем объявить какие-то отдельные квадруплеты "несущественными" основываясь на их малом вкладе в интеграл взаимодействий, поскольку может оказаться, что таких квадруплетов много.

Отдельно встает вопрос о "сходстве" между квадруплетами: насколько близки должны быть квадруплеты, чтобы их можно было объединить в одну ячейку сетки. Практика показывает, что ячейки сетки можно делать довольно большими без существенной потери точности.

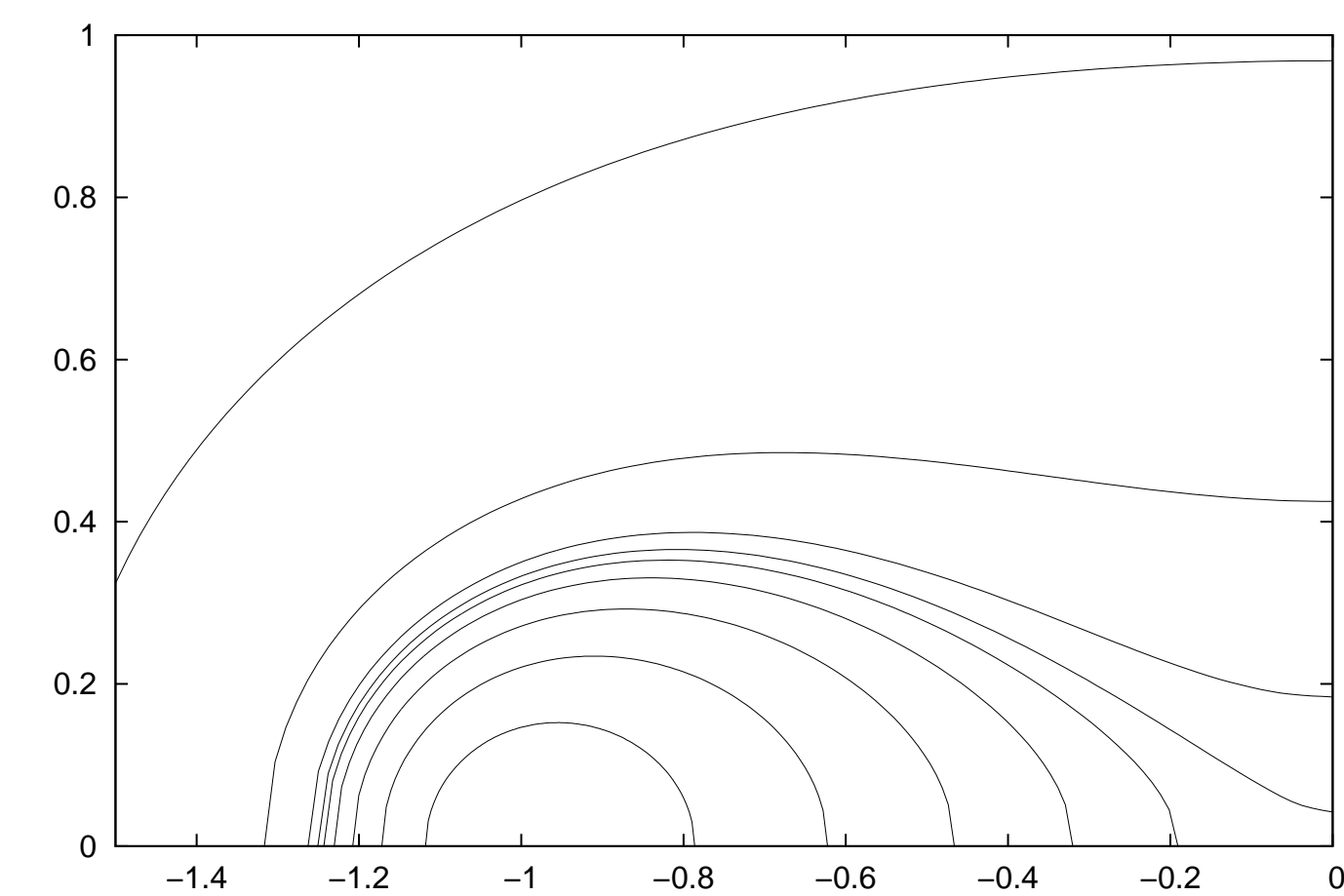
Представленная выше геометрическая конструкция позволяет нам использовать вместо отдельных точек сетки разбиение плоскости $\tilde{\mathbf{k}}$ на ячейки и использовать при интегрировании непосредственно площади этих ячеек. Такой подход полезен и при устранении сингулярности координатной системы.

В приведённом выше интеграле $d\tilde{\mathbf{k}}_1$ и $d\tilde{\mathbf{k}}_3$ соответствуют площадям ячеек сетки, а $\delta(s - s')$ — обратному значению шага сетки по s .

Как сравнить значимость квадруплетов?

Дальнейшее улучшение скорости вычислений возможно путём устранения из них несущественных квадруплетов. Некоторые квадруплеты не вносят вклада в интеграл из-за малого значения коэффициента T , другие — по геометрическим причинам.

Типичные решения включают в себя колмогоровский спектр $\varepsilon = \omega^{-4}$. Рисунок ниже показывает вклад квадруплетов с различными s в передачу энергии в этом спектре. На нём пространство квадруплетов разделено на 10 частей, вклады всех частей одинаковы.



Центральная точка

1. Окрестность центральной точки представляет собой большую область, где s почти не меняется. Более того, при смещении от центральной точки два волновых вектора меняются противоположным образом и в первом порядке эти изменения компенсируются.

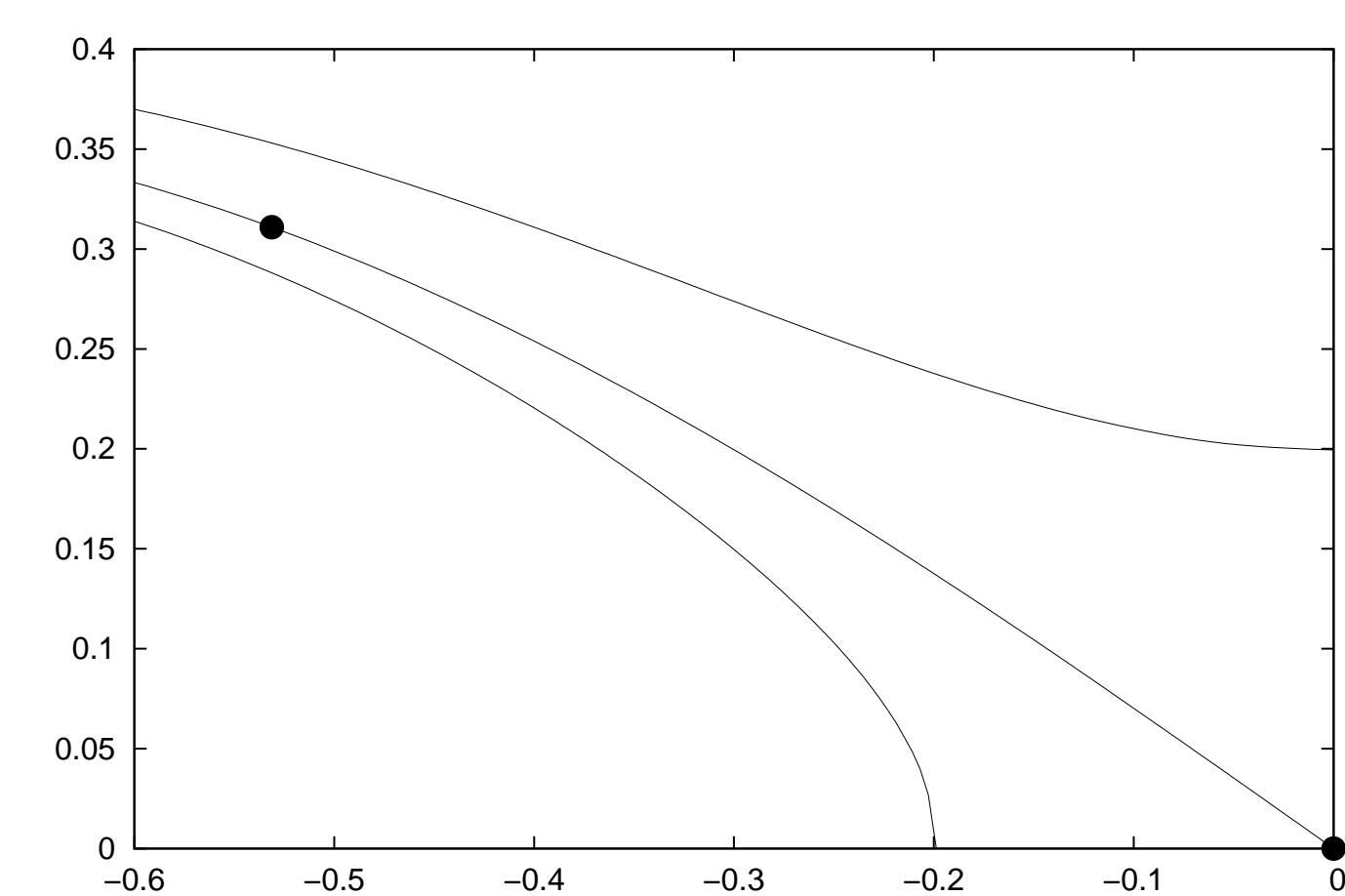
2. Коэффициент T в окрестности этой точки велик.

3. Форма изолиний $s = \text{const}$ такова, что центральная область взаимодействует только с узкой областью вдоль кривой Филлиписа.

Этим объясняется значимость центральной точки и взаимодействующей с ней области кривой Филлиписа.

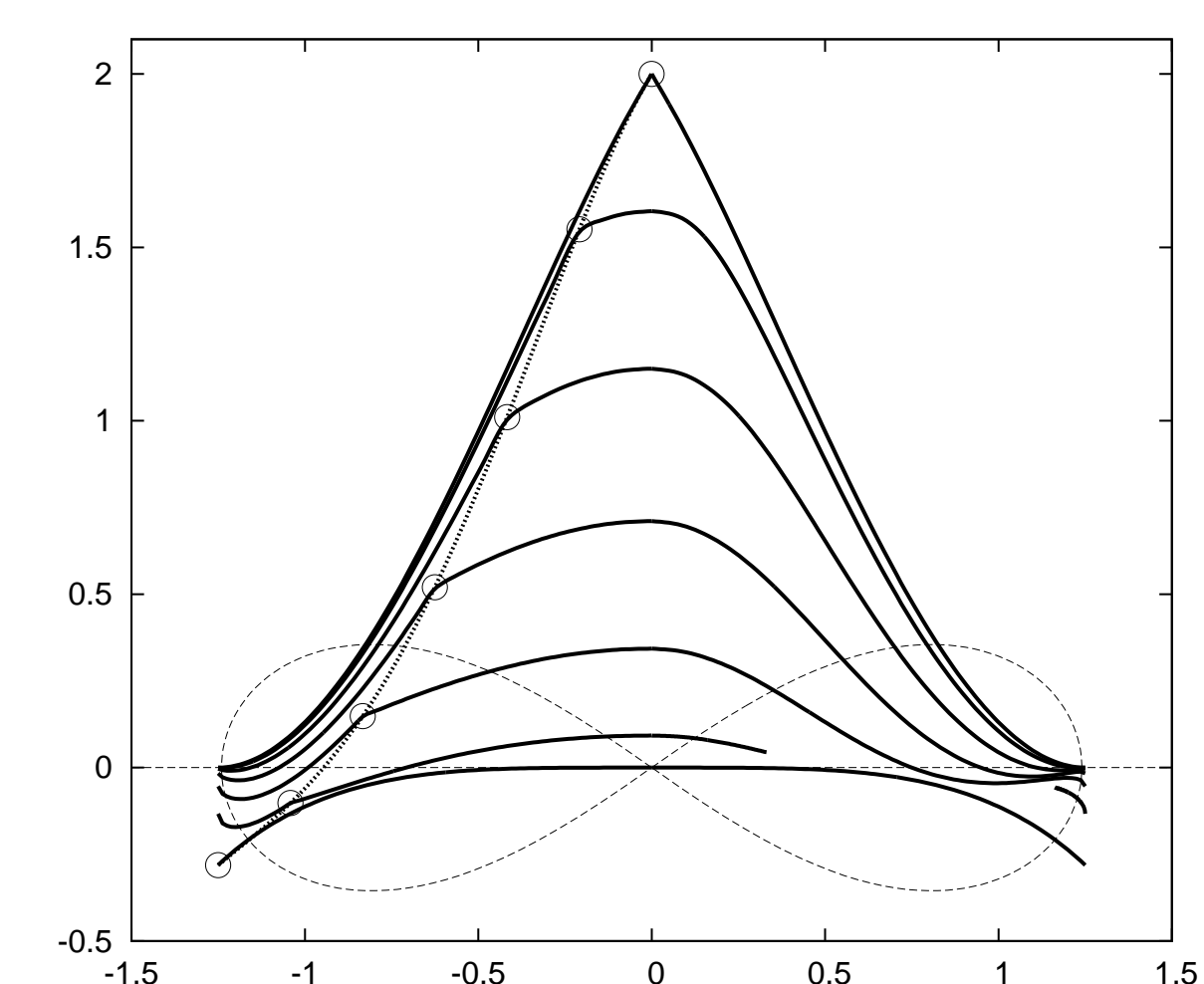
Применимость метода DIA является результатом этих свойств центральной точки.

Рисунок изображает область центра. Показаны изолинии s и квадруплет DIA.



Коэффициент T

На рисунке изображена серия графиков коэффициента T для различных пар точек восьмёрки Филлиписа. Верхняя кривая соответствует центральной точке.



Видно, что тыльная сторона восьмёрки практически не участвует во взаимодействии. Взаимодействия между близкими точками мало по геометрическим причинам; таким образом, основным является взаимодействие между центром восьмёрки и её боковой частью.

Реальный график распределения взаимодействий на "восьмёрке" выглядит следующим образом:

