

**Численное моделирование развития волн
под действием ветра на основе полных трёхмерных
уравнений.**

*Д. В. Чаликов,
Санкт-Петербургский филиал ИОРАН
19.12.2017*

Уравнения

$$\xi = x, \quad \vartheta = y, \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau), \quad \tau = t \quad \eta(\xi, \vartheta, \tau) = \sum_{-M_x < k < M_x} \sum_{-M_y < l < M_y} h_{k,l}(\tau) \Theta_{k,l}$$

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \varphi_\xi - \eta_\vartheta \varphi_\vartheta + (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2} \left(\varphi_\xi^2 + \varphi_\vartheta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta^2 \right) - \eta - p$$

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\vartheta\vartheta} + \Phi_{\zeta\zeta} = \Upsilon(\Phi)$$

$$\Upsilon(\cdot) = 2\eta_\xi(\cdot)_{\xi\zeta} + 2\eta_\vartheta(\cdot)_{\vartheta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta})(\cdot)_\zeta - (\eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2)(\cdot)_{\zeta\zeta}$$

$$j = \bar{j} + \tilde{j}, \quad F = \bar{F} + \tilde{F}$$

$$\tilde{\Phi}_{\xi\xi} + \tilde{\Phi}_{\vartheta\vartheta} + \tilde{\Phi}_{\zeta\zeta} = \Upsilon(\tilde{\Phi}) + \Upsilon(\bar{\Phi})$$

$$\zeta = 0: \quad \tilde{\Phi} = 0$$

$$\zeta \rightarrow -\infty: \quad \tilde{\Phi}_\zeta \rightarrow 0$$

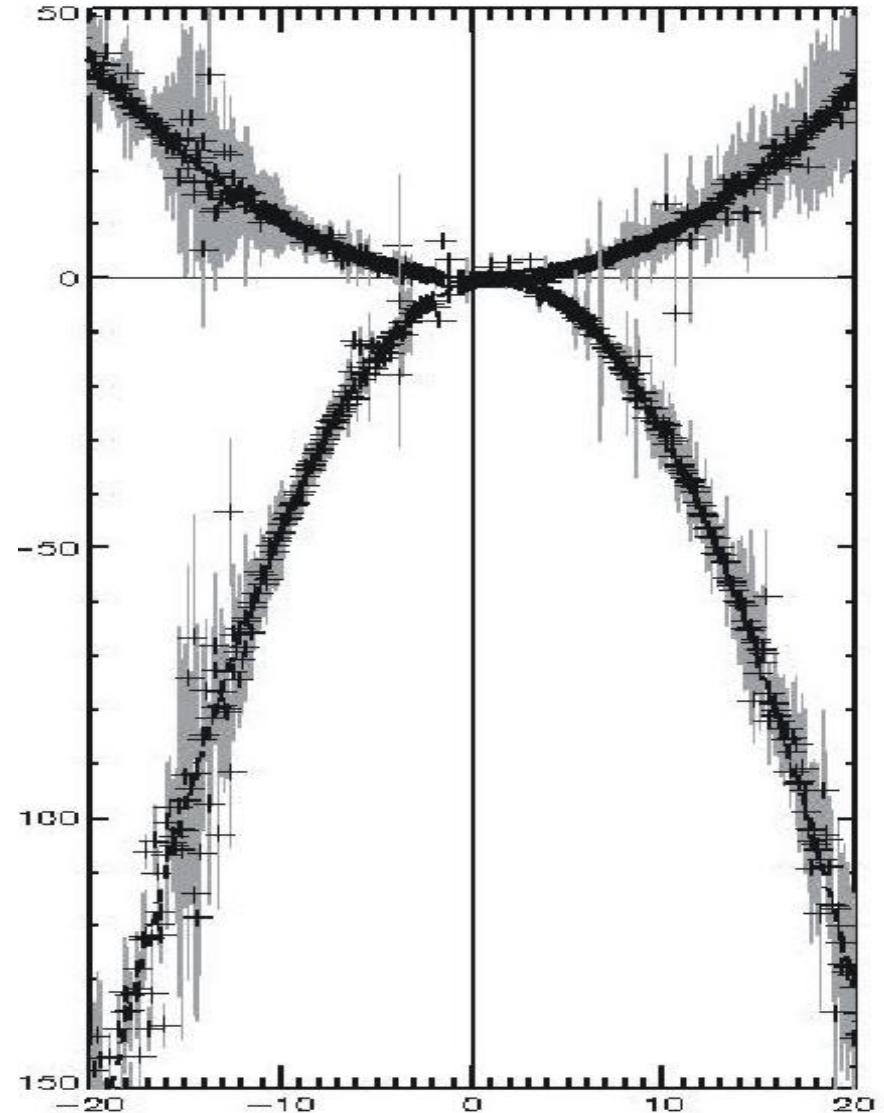
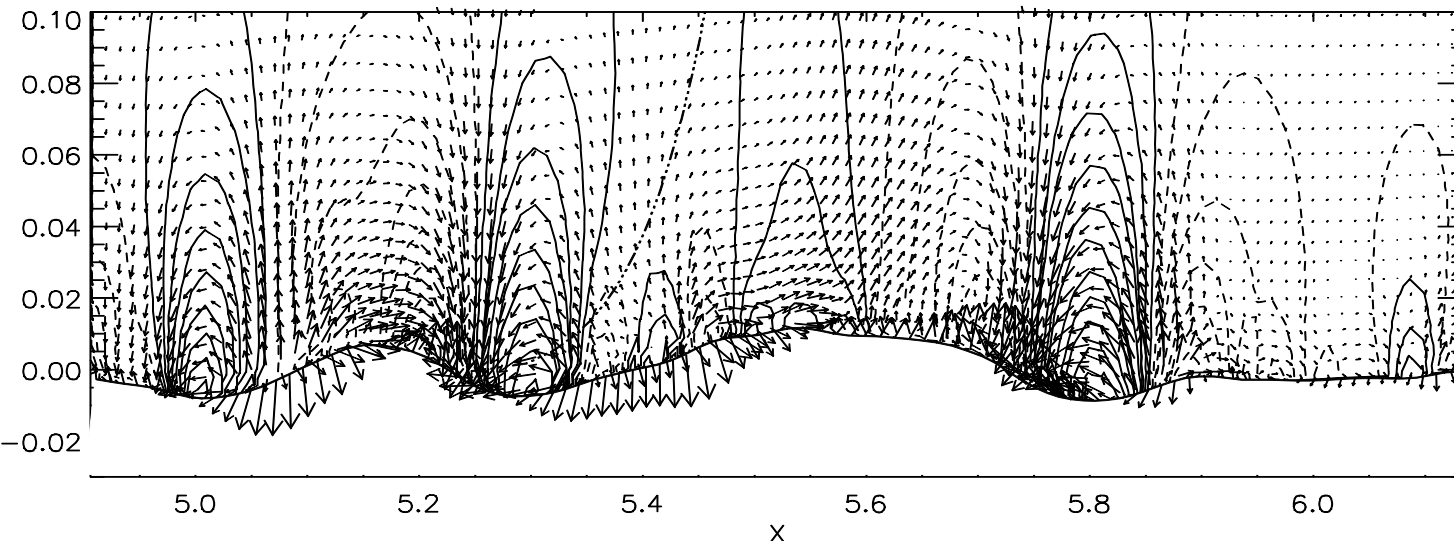
Приток энергии и импульса от ветра через давление P

$$p_{k,l} + ip_{-k,-l} = \frac{\rho_a}{\rho_w} (\beta_{k,l} + i\beta_{-k,-l}) (h_{k,l} + ih_{-k,-l}),$$

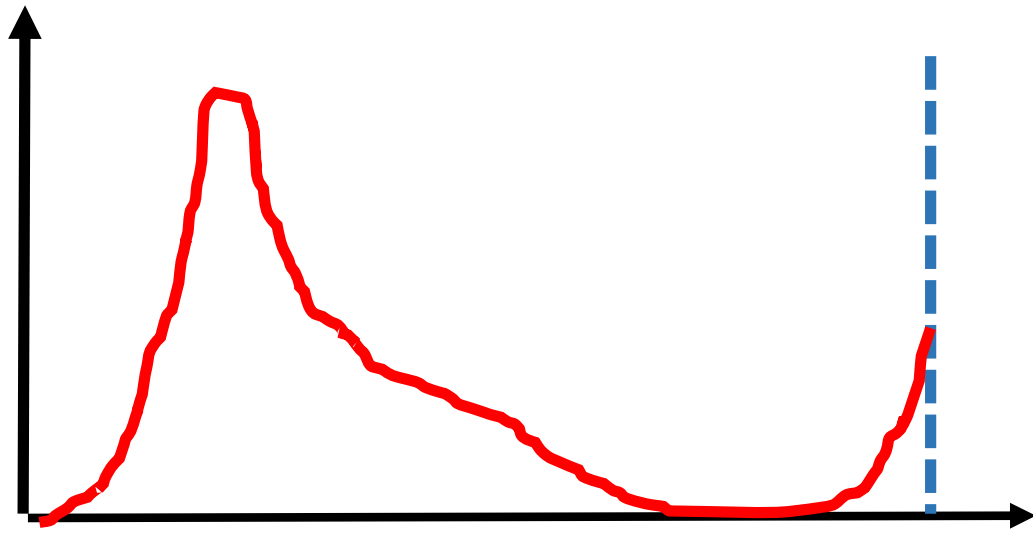
$$\Omega_{k,l} = \omega_{k,l} U \cos \psi = U / c_{k,l} \cos \psi_{k,l}$$

Действительная и мнимая (знак обратный) части
Функции β полученные в ходе численного эксперимента
с интерактивной вода-воздух моделью.

Крестики соответствуют первичным данным,
вертикальные отрезки – их дисперсии



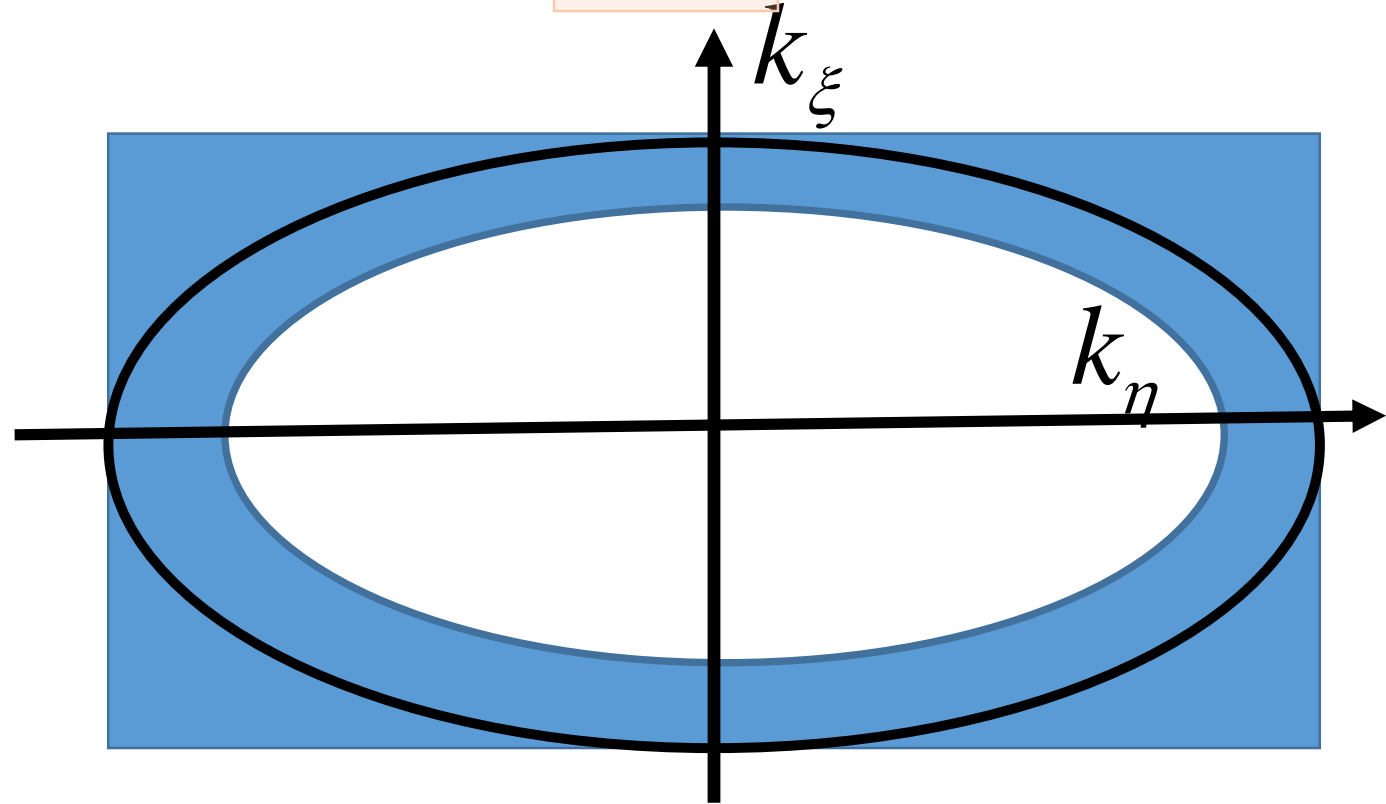
Стабилизация высокочастотной части спектра ('Tail dissipation')



$$\mu_{k,l} = \begin{cases} 0 & |k| < k_d \\ c_m k_0 \left(\frac{|k| - k_d}{(k_0 - k_d)} \right)^2 & k_d \leq |k| \leq k_0 \\ c_m k_0 & |k| > k_0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \eta_{k,l}}{\partial \tau} = E_{k,l} - \mu_{k,l} \eta_{k,l}$$

$$\frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial \tau} = F_{k,l} - \mu_{k,l} \varphi_{k,l}$$



Параметризация обрушения волн (breaking dissipations)

Единственным реальным критерием обрушения является появление неоднозначной поверхности (уклон более 90 градусов). Этот критерий нельзя использовать даже в конформных координатах, поскольку вычислительная неустойчивость уже наступила и счёт должен прерваться.

В простой следящей системе координат вычислительная неустойчивость наступает ещё раньше ($\partial\eta / \partial x > 3.$, 80°)

Следовательно, алгоритм обрушения должен поддерживать более или менее гладкую поверхность.

Требования к схеме параметризации диссипации за счёт обрушения.

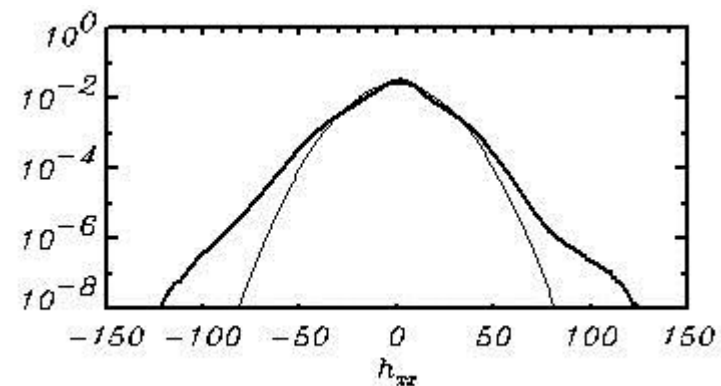
1. Алгоритм должен надёжно предотвращать развитие вычислительной неустойчивости возникающей при больших значениях крутизны и криволинейности поверхности (и связанных с ними градиентов потенциала скорости).
2. Алгоритм должен сохранять объём и уменьшать горизонтальный и вертикальный импульс и энергию
3. Алгоритм должен действовать локально и не затрагивать поля вне участка обрушения, т.е. он должен быть высоко селективным.
4. Алгоритм должен сохранять динамический баланс между потенциальной и кинетической энергией.

Параметризация эффекта обрушения волн

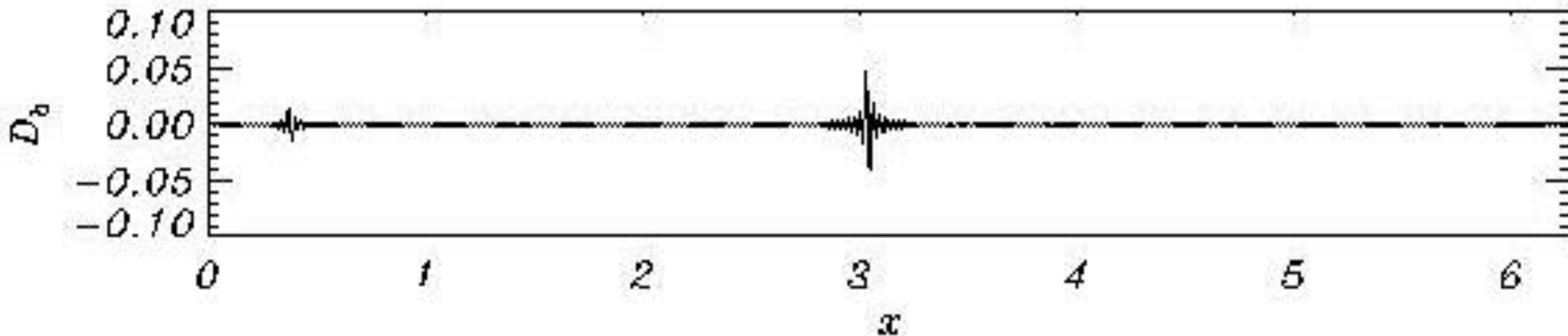
$$\eta_\tau = E_\eta + J^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} B_\xi \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} B_\vartheta \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right)$$

$$\varphi_\tau = F_\varphi + J^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} B_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} B_\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)$$

$$B_\xi = \begin{cases} \Delta \xi C_B \eta_{\xi\xi}^2 & -\eta_{\xi\xi} > \eta_{\xi\xi}^{cr} \\ 0 & -\eta_{\xi\xi} \leq \eta_{\xi\xi}^{cr} \end{cases} \quad B_\vartheta = \begin{cases} \Delta \xi C_B \eta_{\xi\xi}^2 & -\eta_{\xi\xi} > \eta_{\xi\xi}^{cr} \\ 0 & -\eta_{\xi\xi} \leq \eta_{\xi\xi}^{cr} \end{cases}$$



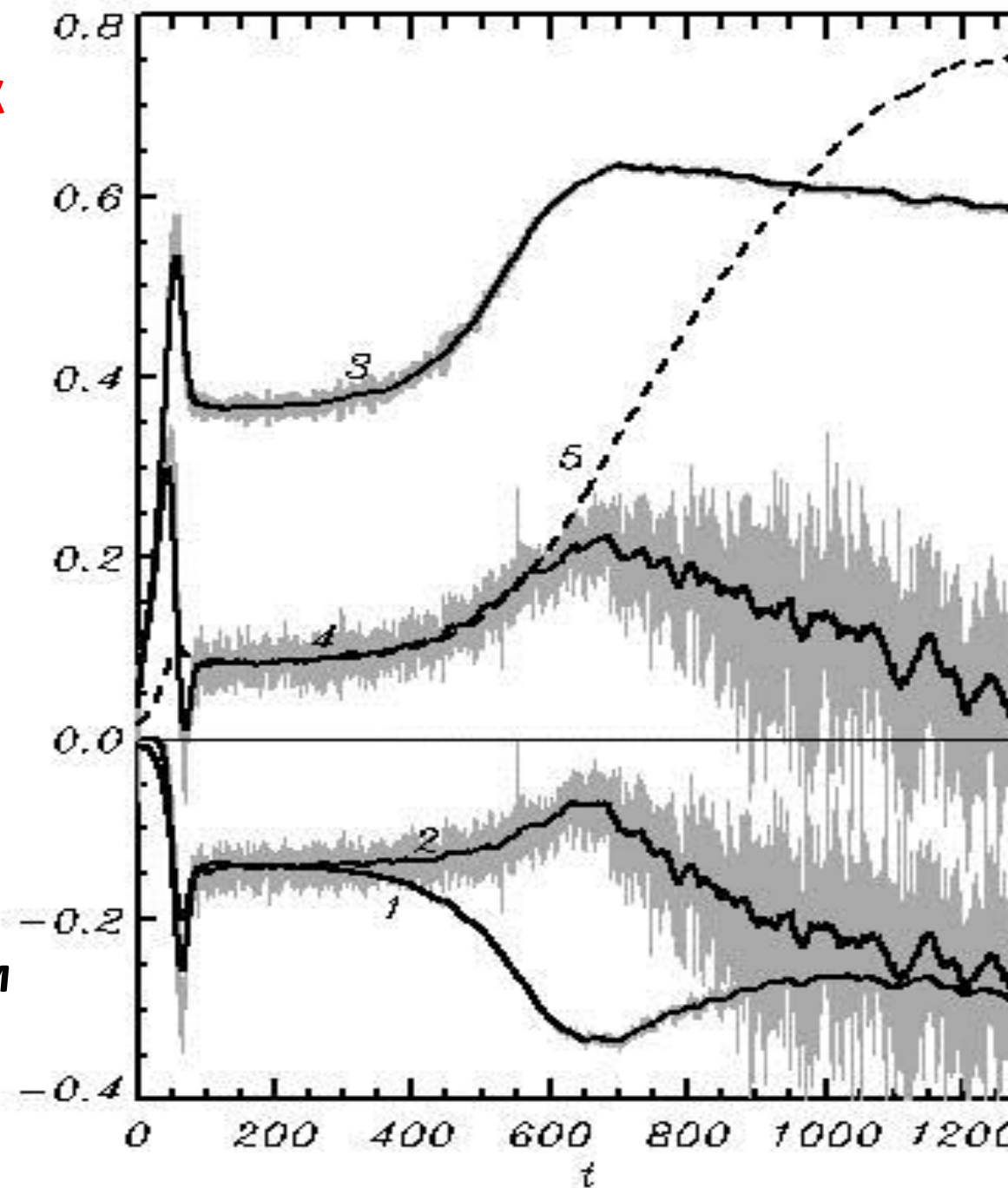
Пример профиля скорости эволюции поверхности за счёт обрушения



Эволюция интегральных характеристик

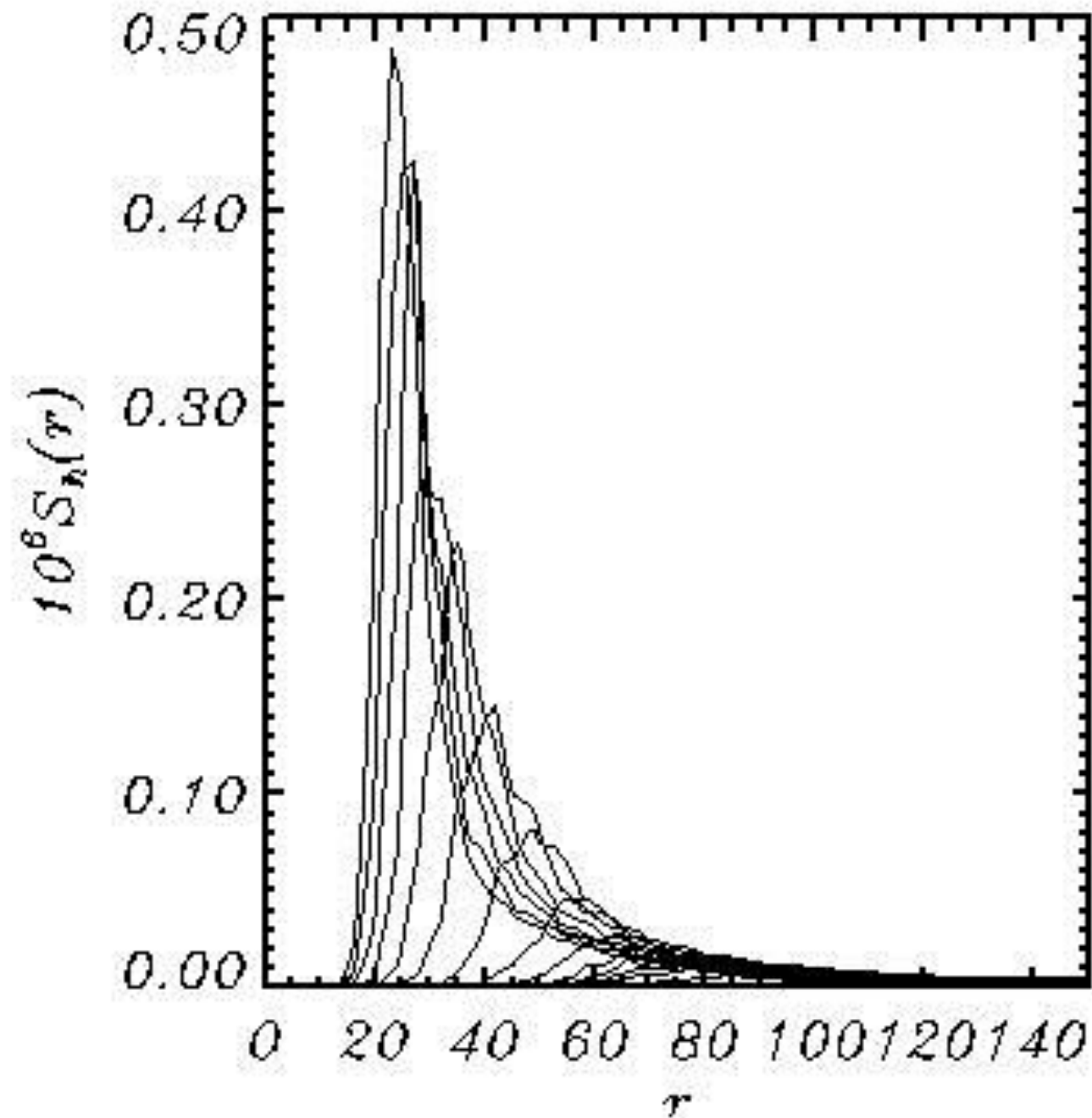
1. Диссипация энергии за счёт фильтрации высокочастотных мод
2. Диссипация энергии за счёт обрушения
3. Приток энергии от ветра
4. Баланс притока и стоков энергии
5. Полная энергия

Серые линии соответствуют мгновенным значениям, жирные – сглаженным



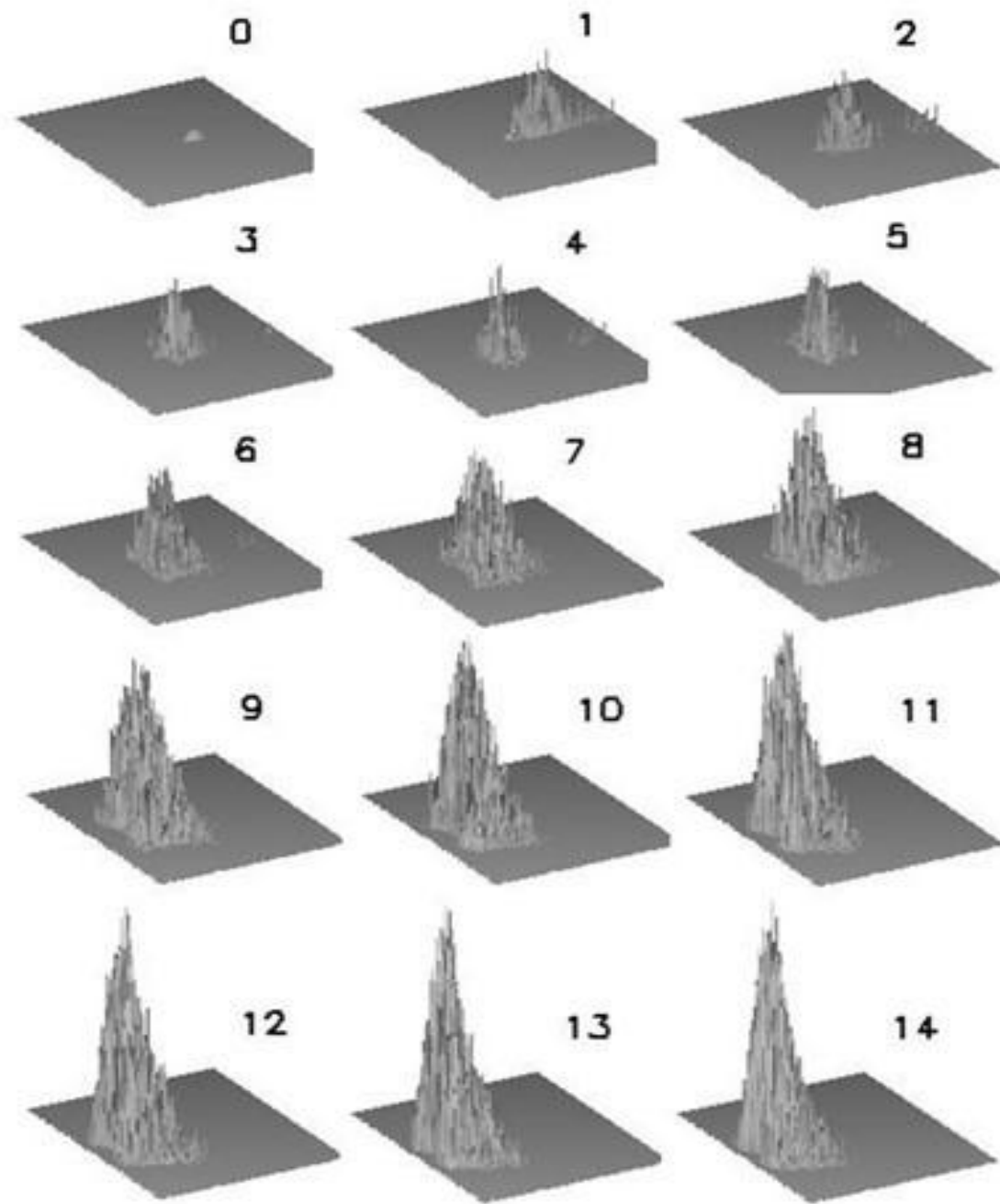
Эволюция спектра волн

Спектры получены осреднением по 13 периодам длиной $t=100$



Эволюция спектра волн

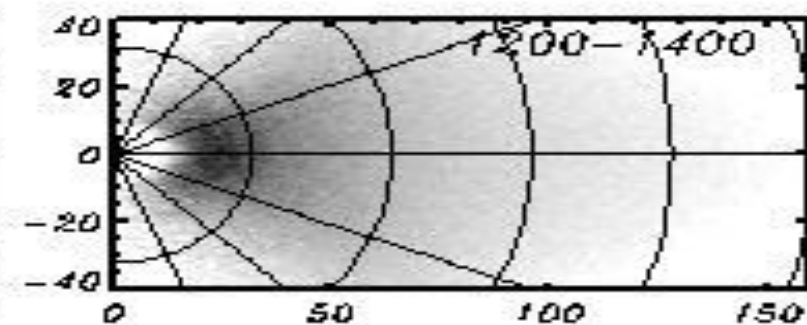
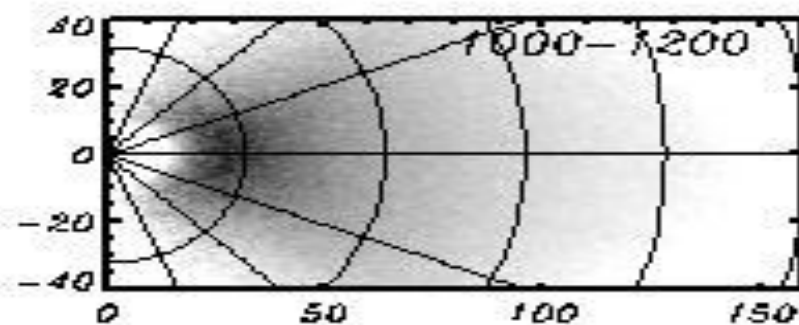
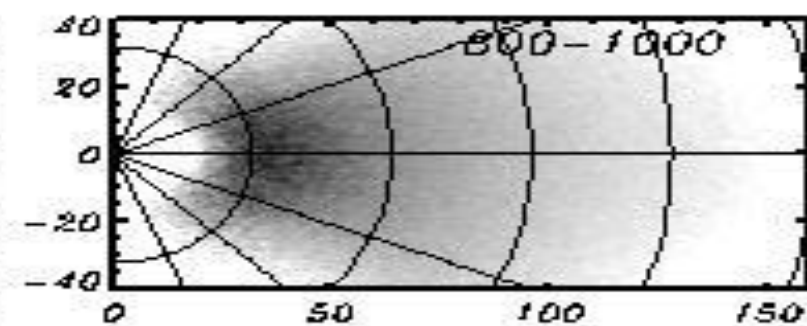
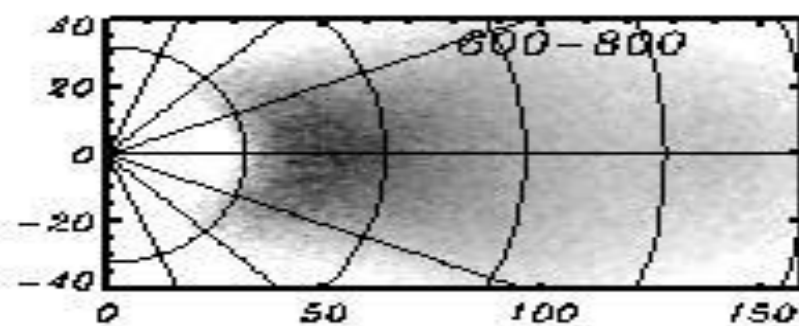
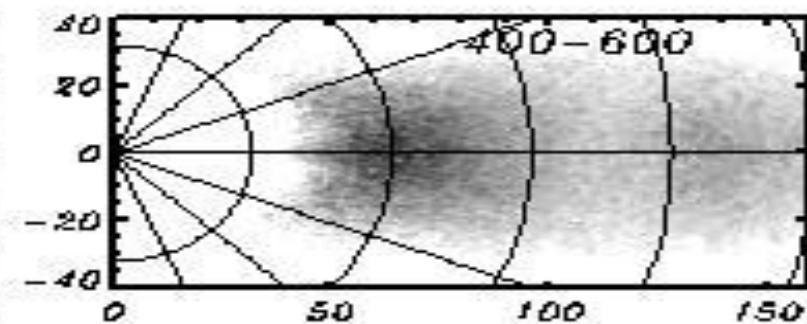
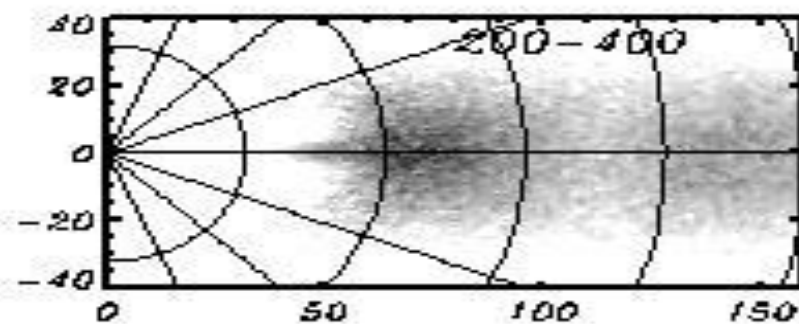
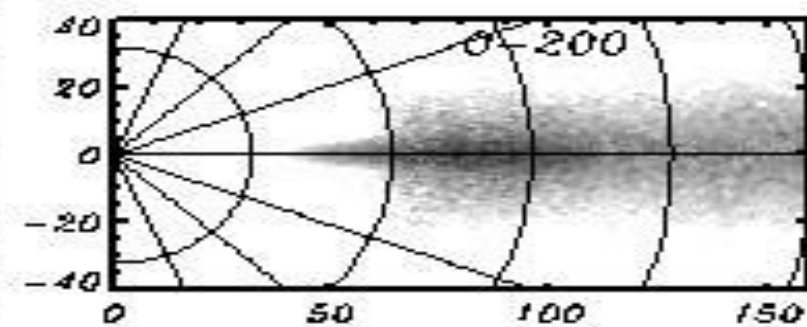
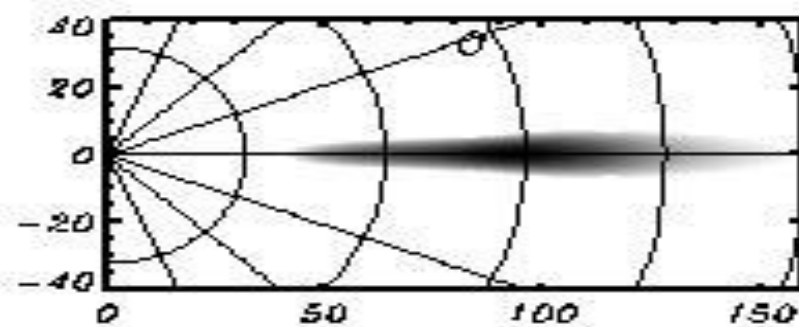
Спектры получены осреднением по 13 периодам длиной $t=100$
Тем не менее спектры сильно изрезаны.



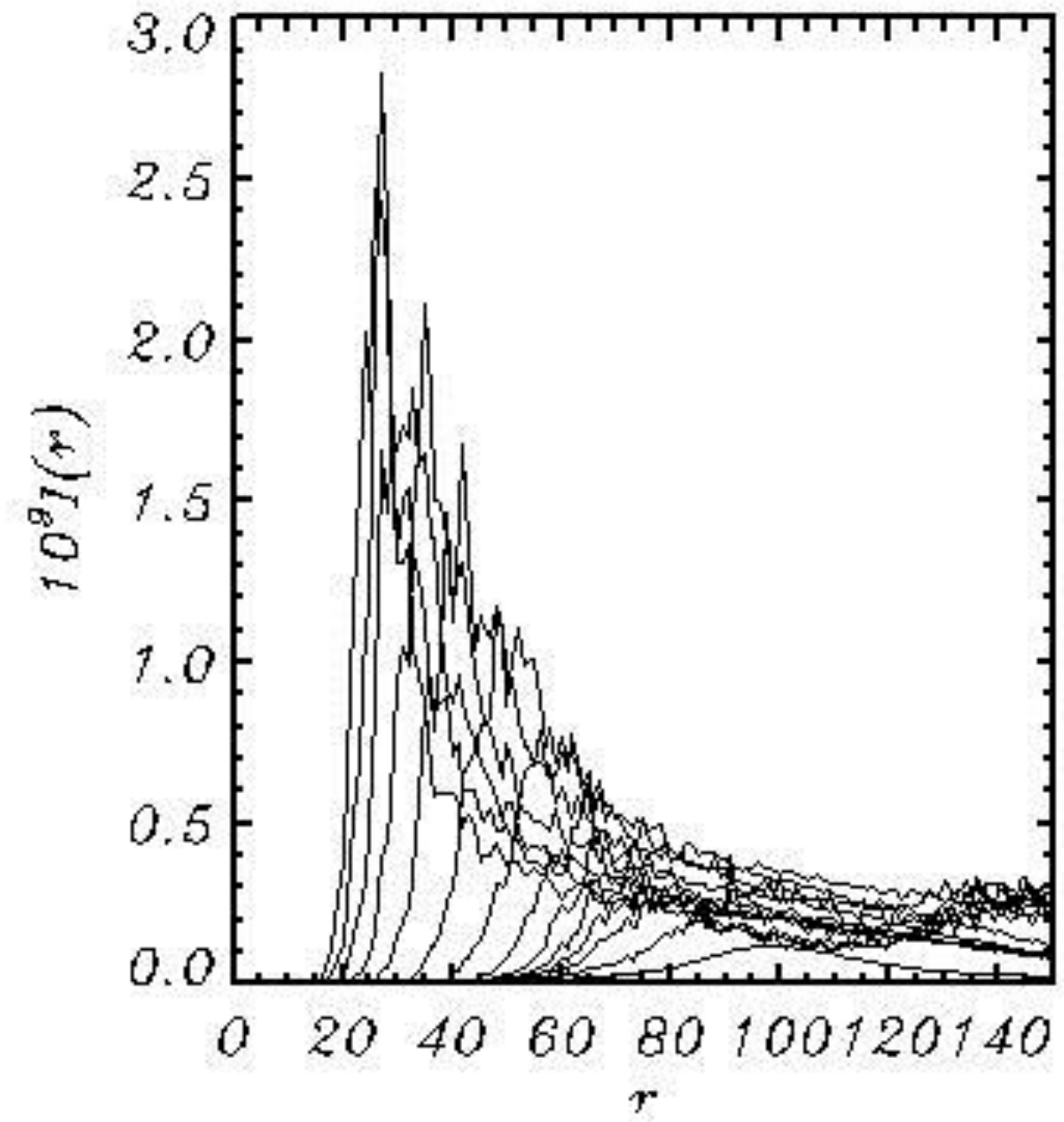
Волновые спектры больше напоминают собор La Sagrada Família ('Гауди') в Барселоне, чем St. Mary Axe ('Огурец') в Лондоне.



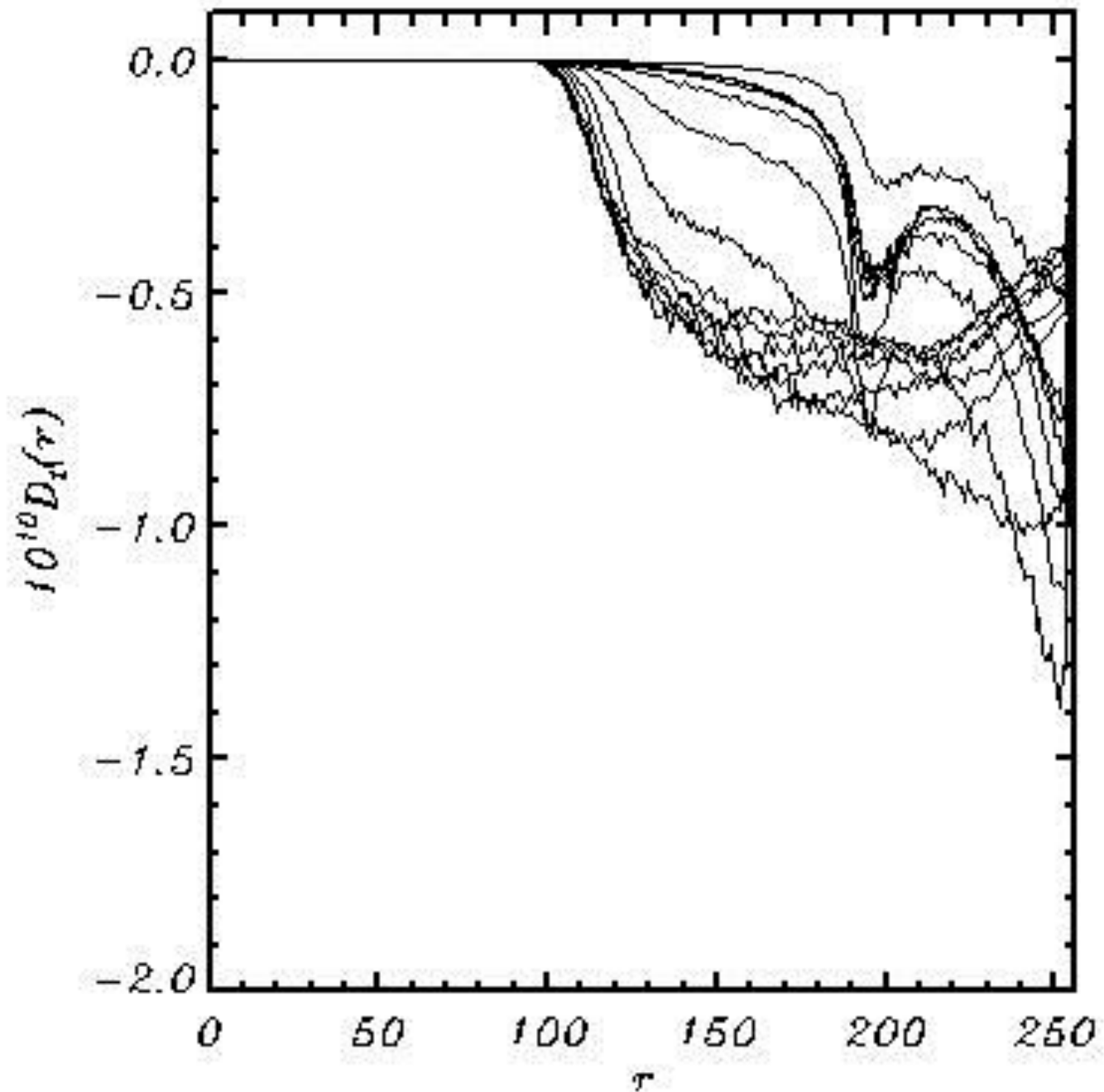
**Двумерные волновые спектры,
осреднённые по 8
последовательным
периодам
длиной $t=200$**



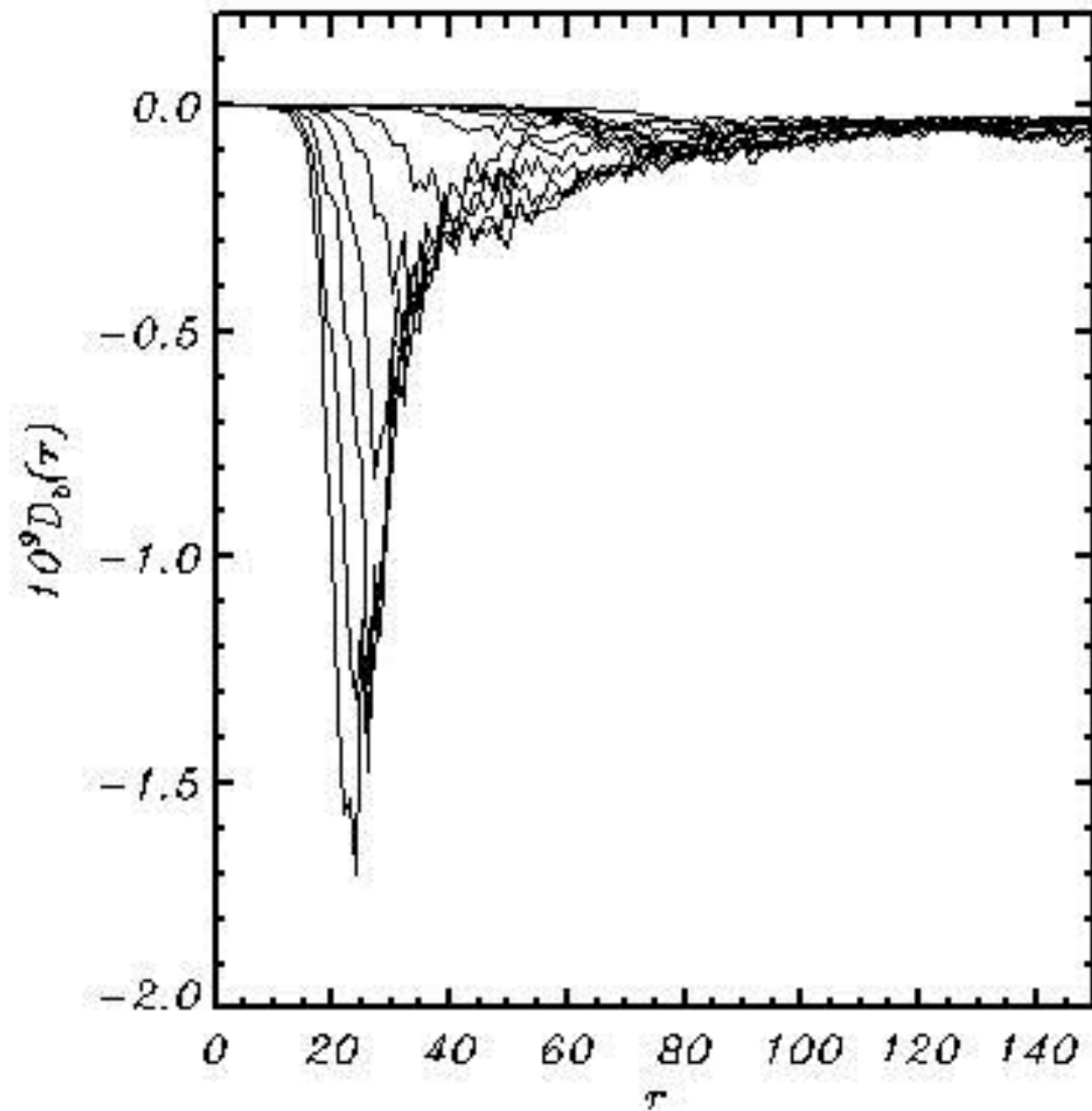
**Спектр скорости притока
энергии
к волнам от ветра**



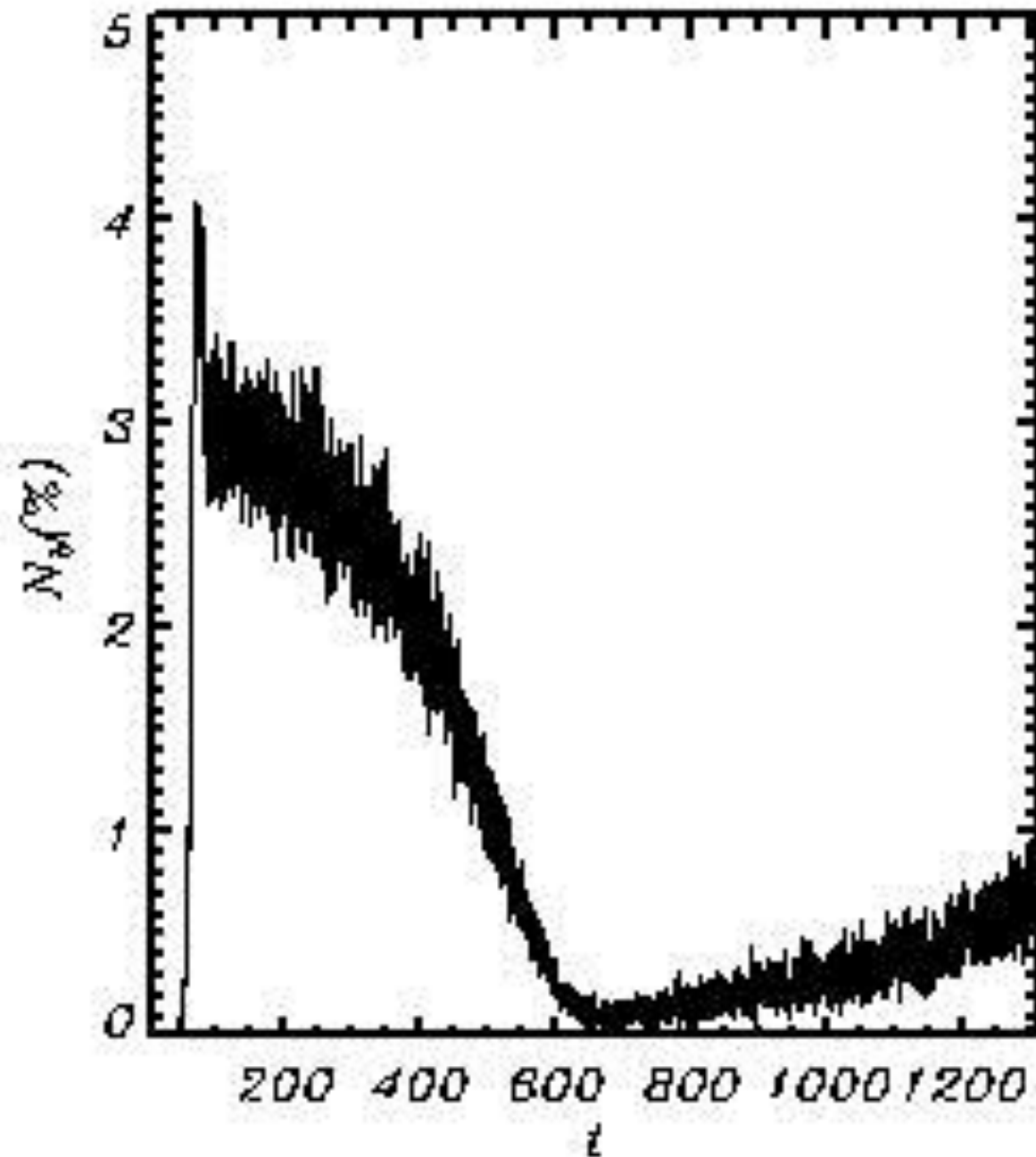
**Спектр скорости диссипации
высокочастотных компонент**



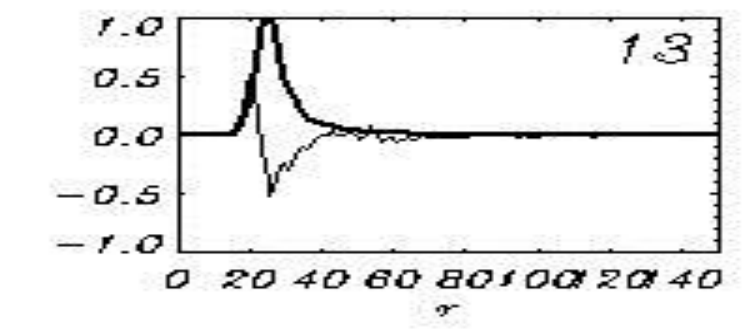
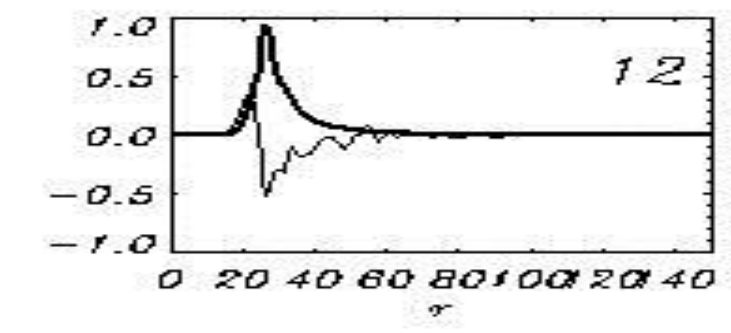
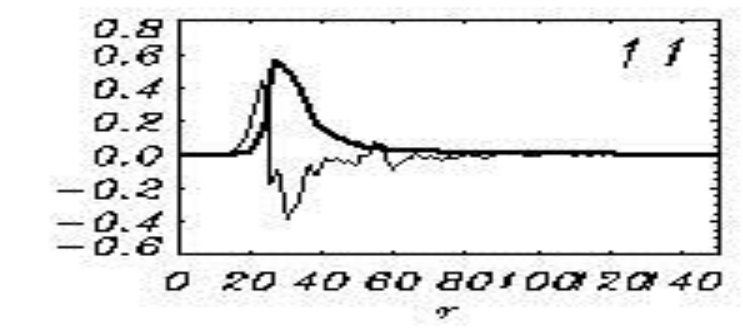
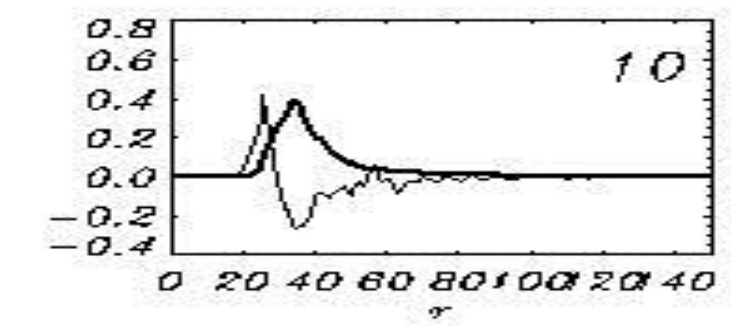
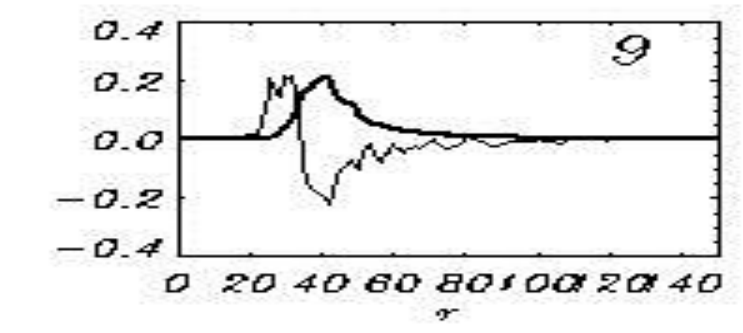
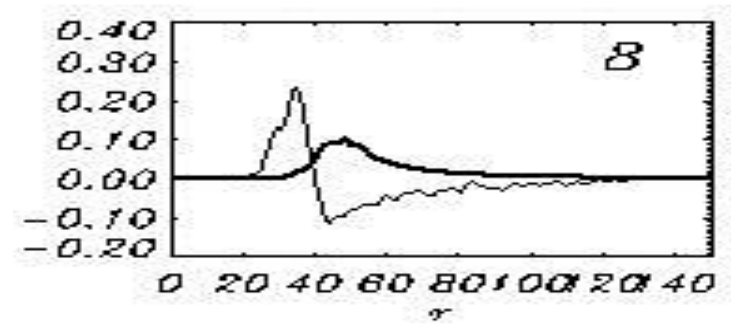
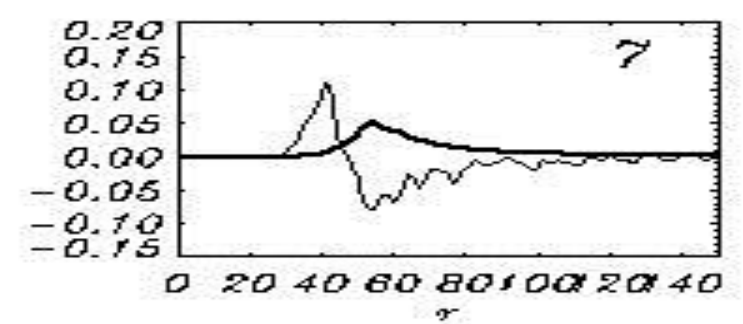
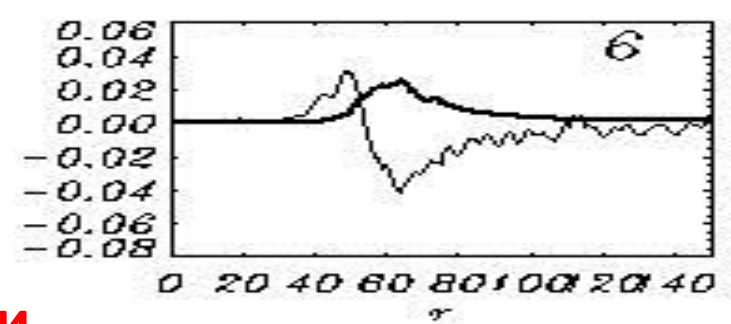
Спектр диссипации за счёт обрушения



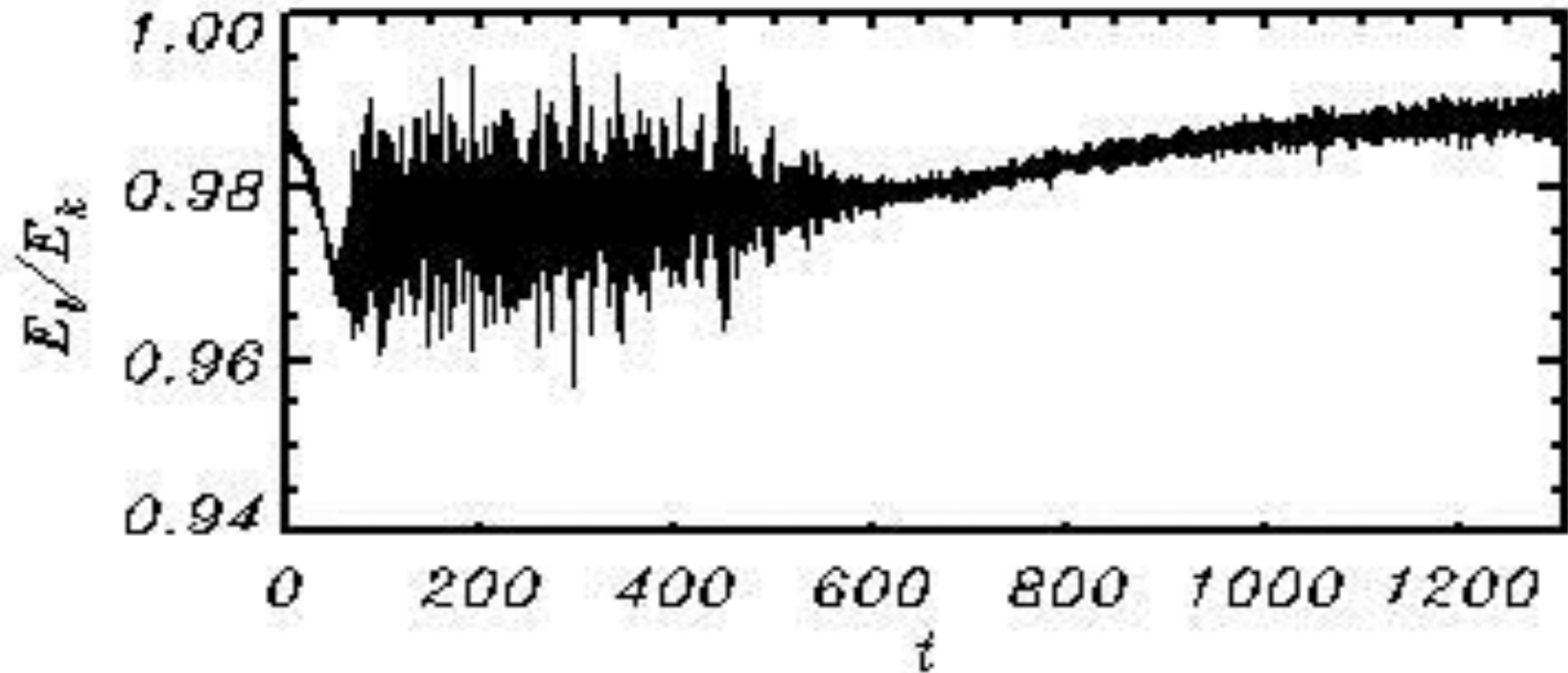
Доля числа узлов
(в % к общему числу узлов 1024x512),
в которых произошло обрушение как
функция времени



**Волновой спектр (жирная кривая)
и спектр скорости изменения энергии
за счёт нелинейных взаимодействий
(тонкая кривая)**

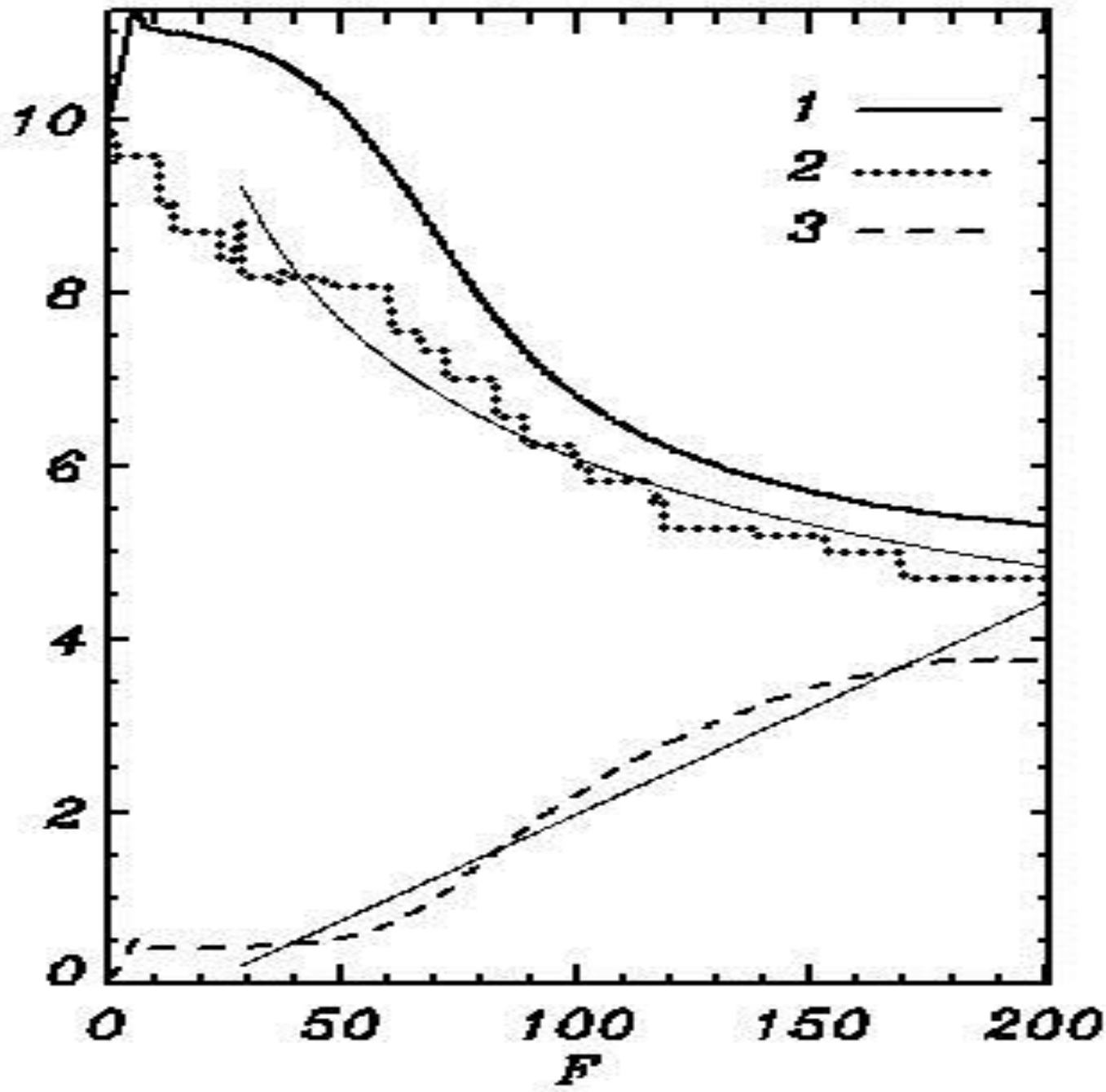


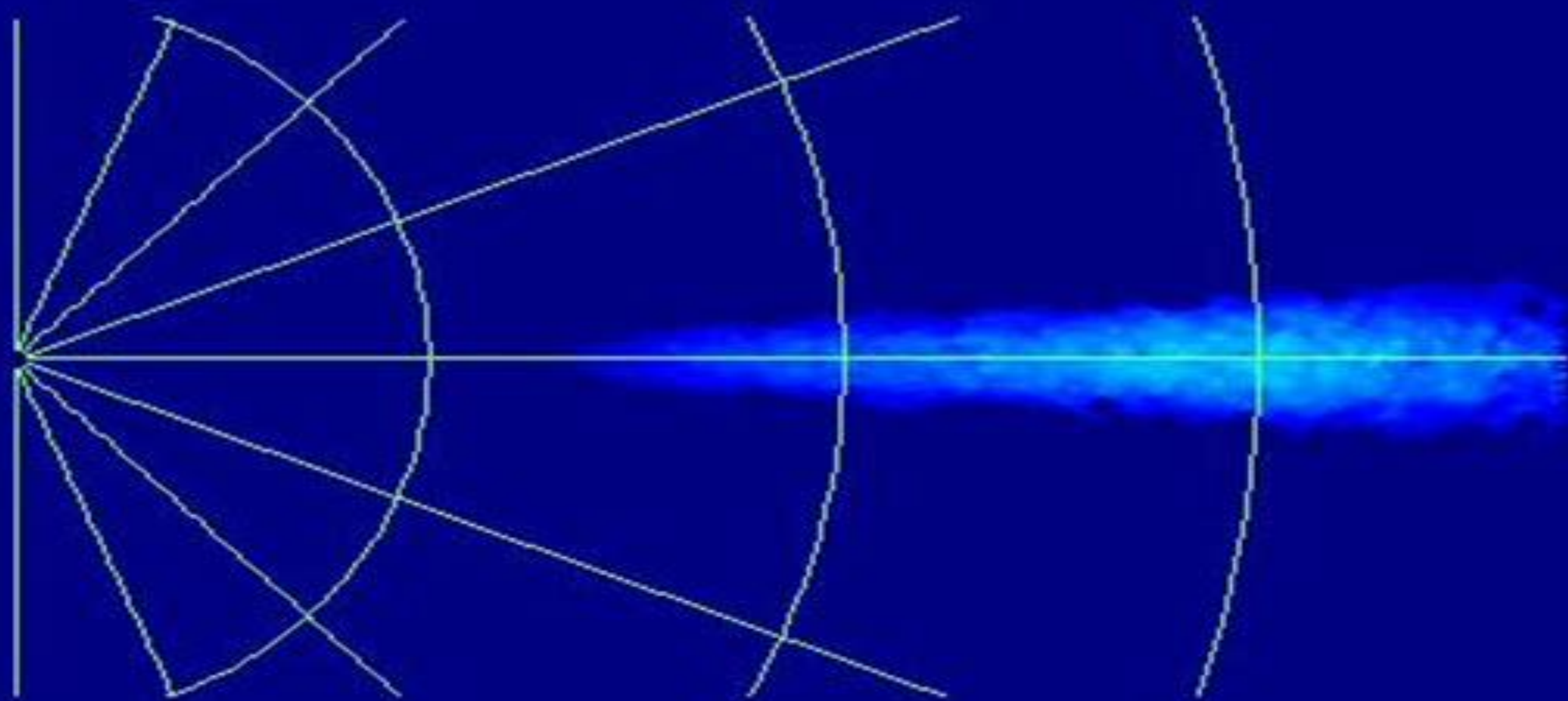
Отношение кинетической энергии линейной компоненты к кинетической энергии нелинейной поправки.



- 1 – эволюция средневзвешенной частоты волнового пика
- 2 – эволюция частоты волнового пика
- 3 - эволюция полной энергии

Тонкие линии – зависимости аппроксимации JONSWAP





Заключения нет!

Спасибо за внимание.