Особенности численного решения кинетического уравнения

для гравитационных волн на воде

В.Г. Полников,

ИФА им. А.М. Обухова РАН, г. Москва,

polnikov@mail.ru

Цель расчетов не число, а понимание.
Р.В Хемминг.
(Численные методы
для научных работников и инженеров, 1968)

Содержание

Историческая справка

Рассматривается (чистое) **кинетическое уравнение (КУ) вида**

$$\boxed{\partial S(\omega,\theta)/\partial t = I_{NL}\left[S(\omega,\theta)\right]} \quad , \qquad \mathbf{(1)}$$

где $I_{NL}[S]$ **- четырехволновый кинетический интеграл (КИ)** Хассельманна(1962**), кубический по спектру** $S(\omega,\theta)$ **или** $S(\mathbf{k})$ **вида**

$$\boxed{I_{NL}\left[S(\mathbf{k})\right] == 4\pi\iiint M^2_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3} F3(S_{\mathbf{k}},\ S_{\mathbf{k}_1},\ S_{\mathbf{k}2},\ S_{\mathbf{k}_3})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\delta(\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3)d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}$$

Формально, интеграл $I_{NL}[S]$ **сохраняет энергию, волновое число и импульс волн** (при условии сходимости интеграла…)**.**

Распространены 2 подхода к расчету КИ: 1) с точным интегрнием дельта-функций (Масуда 1980; Полников 1989; Лавренов 1998), **2) с преобразованием КИ в интеграл по поверхности** (Вебб 1978, Резио и др 1991, ван Вледдер 2006), получивший название **WRT-метод** .

В работе (Полников 1989) был существенно усовершенствован алгоритм Масуды(1980). Впервые решение КУ (1) было выполнено в работе (Полников 1990).

Историческая справка

В ней (Полников 1990) было показано установление <u>универсальной формы спектра</u> в решении КУ, а в (Полников 1994) – установление <u>спектров колмогоровского типа</u> $S(\omega)\sim\omega^{-4}$ **и** $S(\omega)\sim\omega^{-11/3}$ **(т.н. спектры КЗ, Захаров и соавт. 1966,1982), <u>при наличии</u> накачки *In* и диссипации *Dis* в <u>обобщенном</u> КУ вида**

$$\partial S(\omega,\theta)/\partial t = I_{NL}\left[S(\omega,\theta)\right] + In(\omega,\theta) - Dis(\omega,\theta) \qquad (2)$$

В работе Коматсу и Масуда(1996) было показано, что в решении КУ (1) устанавливается <u>хвост спектра</u> $S(\omega)\sim\omega^{-4}$**.**

Анализом таких решений занимались Лавренов (2002), Пушкарев и др. (2003), Бадулин и др. (2005)(и др.). Они решали <u>КУ вида (2)</u> и изучали динамику установления спектров КЗ.

Однако асимптотики функции нелинейного переноса(НЛП)

$$Nl(\omega,\theta) \equiv I_{NL}\left[S(\omega,\theta)\right]$$

и 2D-форма установившегося спектра пока остаются мало изученными. Эти вопросы и являются объектом исследования

Постановка задачи

Задачи данной работы включают изучение следующих вопросов

- **асимптотика одномерного НЛ переноса *Nl(ω)* на высоких частотах ($\omega >> 2\omega_p$) на первом шаге решения КУ для различных форм начальных спектров вида JONSWAP;**
- **форма хвоста одномерного спектра *S(ω)* ($\omega > 2\omega_p$) на больших масштабах его эволюции ($t > 10^4 \cdot 1/\omega_p$);**
- **асимптотика одномерного переноса *Nl(ω)* на высоких частотах ($\omega >> 2\omega_p$) при больших временах эволюции спектра ($t > 10^4 \cdot 1/\omega_p$) для различных форм начальных спектров;**
- **зависимость интегральных параметров формы 2D-спектра *S(ω,θ)* при $t > 10^4 \cdot 1/\omega_p$ от начальных условий;**
- **оценка изменчивости полной энергии и волнового действия и их потоков в ходе численной эволюции спектра волн;**
- **трактовка полученного решения КУ в свете работ Захарова и соавторов (ДАН 1966 и ФАО 1982).**

Метод решения задачи

1. Решается кинетическое уравнение (1) (без накачки и дисс)

$$\partial S(\omega,\theta)/\partial t = I_{NL}\left[S(\omega,\theta)\right] \qquad (1)$$

2. Начальный спектр задается в форме JONSWAP(Комен и др. 1994)

$$S_J(\omega,\theta,n,\gamma) = S_{PM}(\omega,n)\gamma^{\left\{(\omega/\omega_p-1)^2/2\sigma^2\right\}}\Psi(\theta) \qquad (3)$$

где

$$S_{PM}(\omega,n) = \omega^{-n}\exp\left[-(n/4)(\omega_p/\omega)^4\right] \qquad (4)$$

спектр Пирсона-Московица, обобщ. на произв. степень спек. *n*.

Начальная частота пика $\omega_p(0)$ всегда равна 2 рад/с.

3. Асимп-1ш КИ (*и решение КУ*) выполняются в (ω,θ) - области

$[0.64 \le \omega \le 80(\underline{7})$ rad/s; $-180^o \le \theta \le 180^o]$ (5)

на сетке

$\omega_i = \omega_1 q^{i-1}$ при $\omega_1 = 0.64$ р/с , $q = 1.05$, $1 \le i \le I = 100(\underline{50})$ и $\Delta\theta = 5^0(\underline{10}^0)$. (6)

4. Используются алгоритмы счета КИ по работе Полников (ФАО 1989) и числ. решения КУ по работе Полников (ФАО 1990).

5. Оценка потока эн (P_E) вып. по ф-ле $P_E(\omega) = -\int_{\omega_{min}}^{\omega}\left(\int Nl(\omega,\theta)d\theta\right)d\omega$ (7)

Результаты.
Асимптотика НЛП на 1м шаге

На сетке [$0.64 \le \omega \le 80$р/с; $-180^o \le \theta \le 180^o$] рассчитан КИ для ряда начальных спектров вида (3-4) и оценена асимптотика НЛП вида $Nl(\omega)=c\cdot\omega^p$.

Результаты представлены на рис. 1-5 и в Табл.1

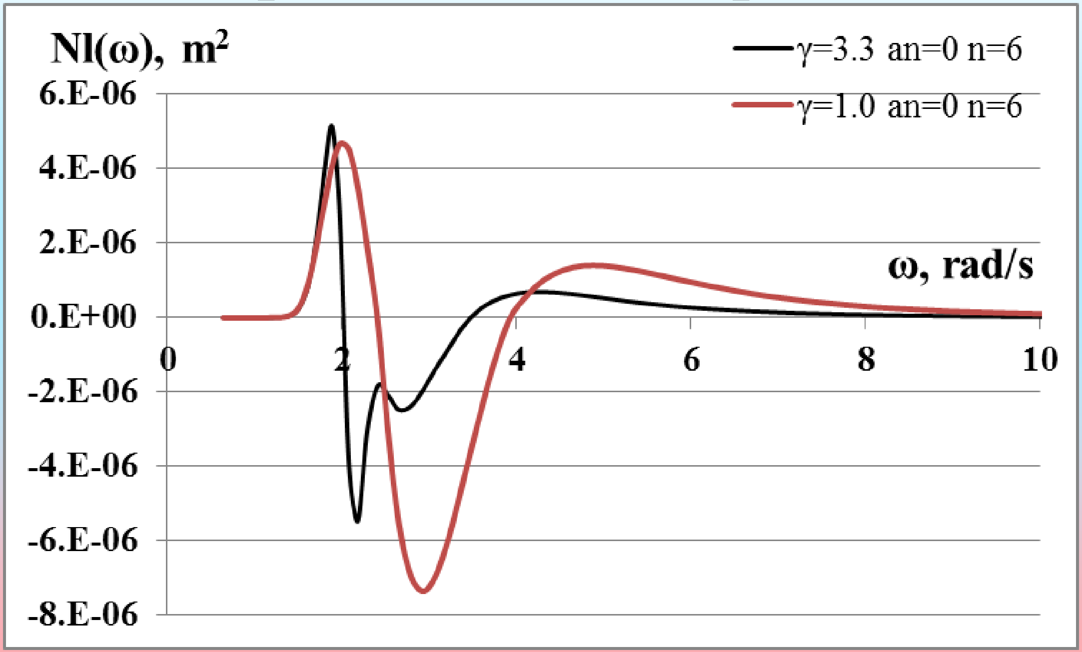


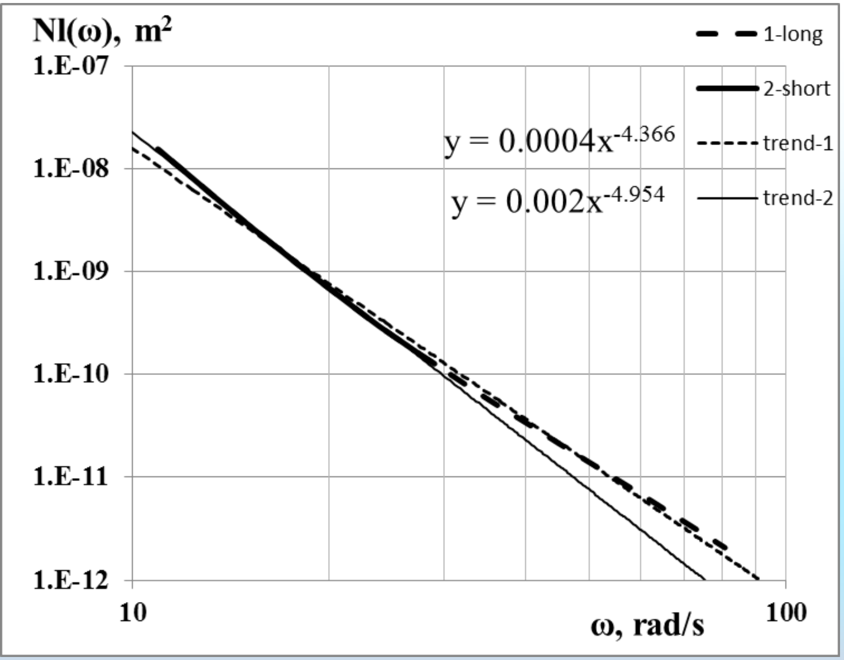
Рис. 1. Низ.Част. часть НЛП для S(ω,θ) с парам. n=6, γ=3.3; 1.0 и ψ=const.

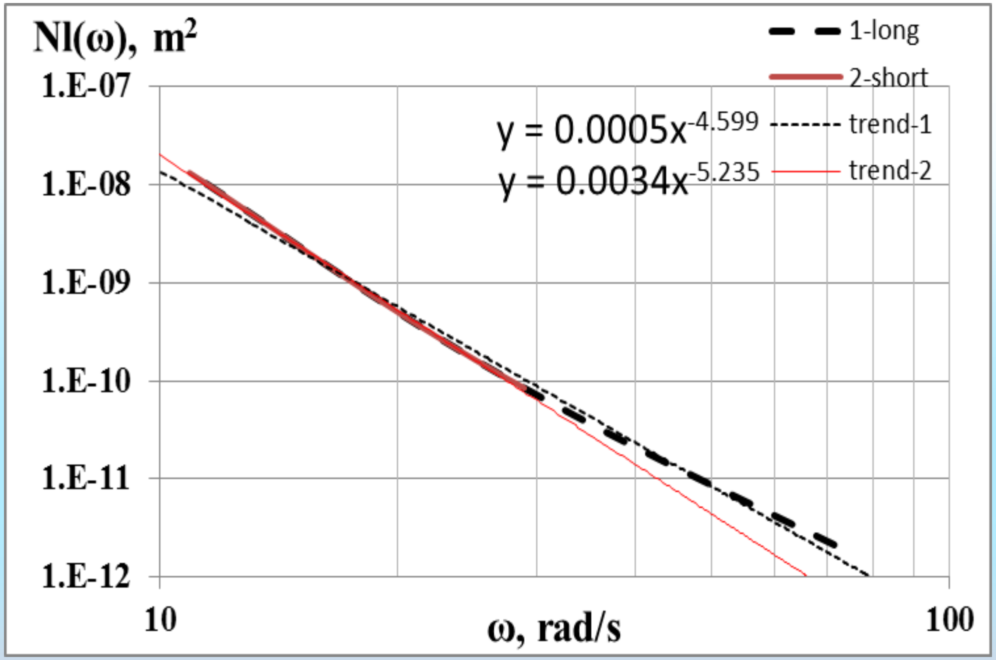
(далее изотропный спектр, ψ=с, имеет обозн. an=0)

Видно, что хвост НЛП положителен (>0)

и гладко спадает при $\omega >> 2\omega_p$.

ВЧ асимптотики НПЛ на 1вом шаге





а) γ =3.3, n=6, an=0 б) γ =1.0, n=6, an=0

Рис.2. Асимптотики ВЧ хвоста спектра.

Видно, что 1) хвост имеет меняющийся наклон.

2) В промежут обл ч. он близок к величине *p*≈*n*-1 (*Nl(ω)*~*ω*S(*ω*)).

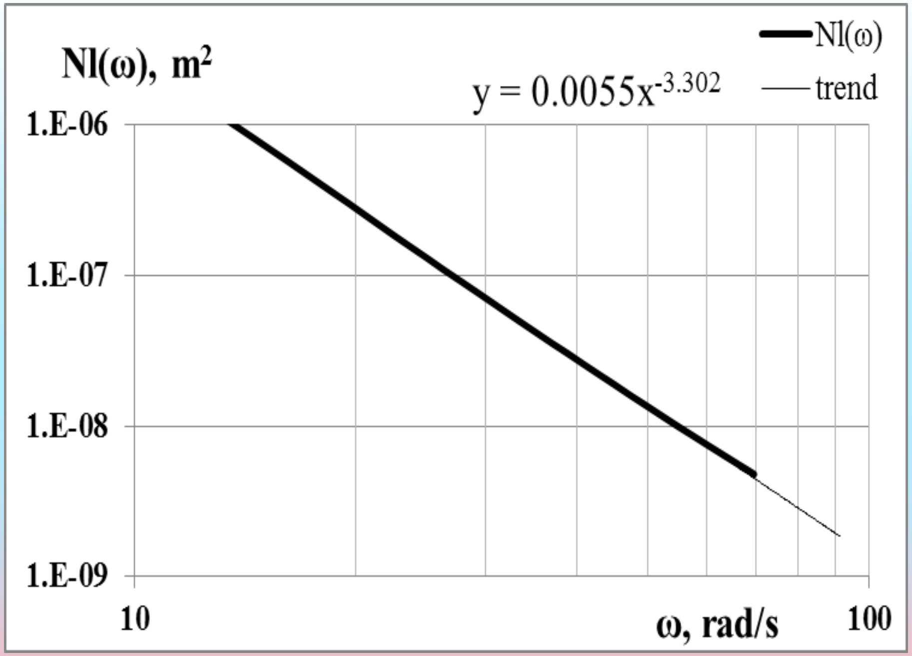
3) На всем хвосте спад Nl(ω) идет слабее спада ωS(ω).

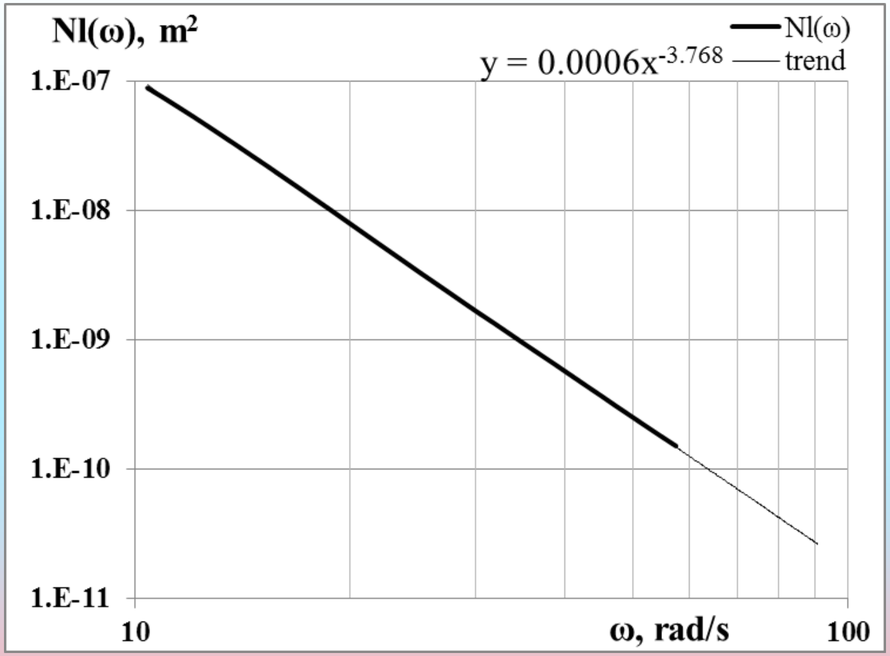
4) С уменьш. парам. γ , степень спада НЛП *p* увеличивается

(что характеризуется как нелокальность НЛ взаимодействия).

ВЧ асимптотики НПЛ на 1вом шаге

То же самое для спектров с пар., n=5, an=0 (рис.3)





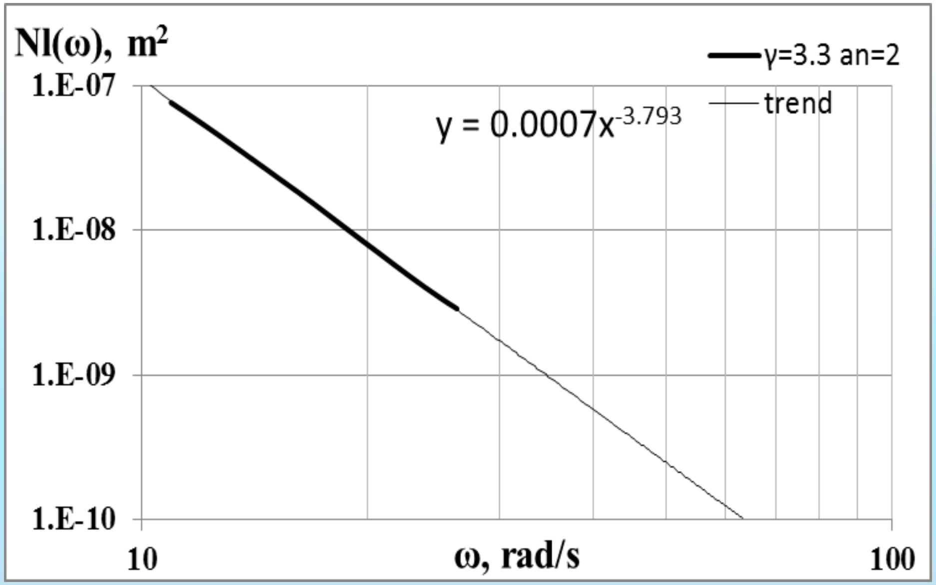
$\gamma = 3.3$ $\gamma = 1.0$

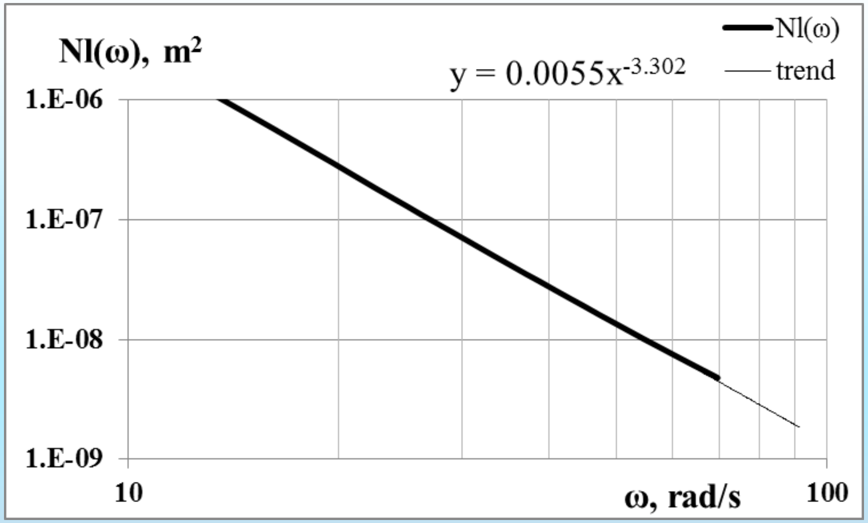
Рис. 3. Асимптотики ВысЧаст хвоста спектра

При n=5, an=0,
спад спектра имеет единый наклон (!), но *p* < *n*-1,
и *p* растет с уменьшением γ .
!! Хвост Nl(ω) чуствует форму пика S(*ω*) (нелокальность)**!!**

ВЧ асимптотики НПЛ на 1вом шаге

То же для спектра с пар. γ =3.3, n=5, an=2 ($\cos^2(\theta)$)





γ =3.3, n=5, an=2 γ =3.3, n=5, an=0

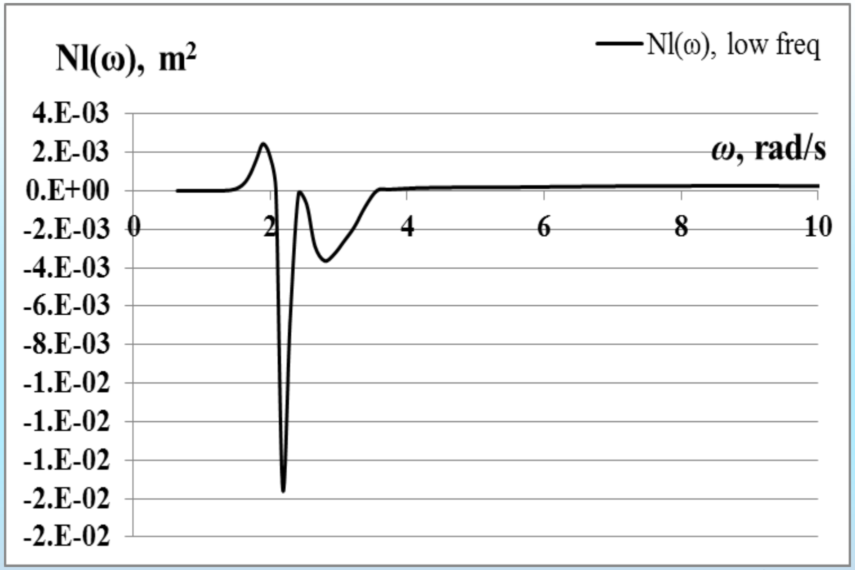
Рис. 4. Асимптотики ВысЧаст хвоста спектра для двух уг. ф. Ψ.

Видно, что увеличением угловой направленности спектра скорость спадания хвоста НЛП увеличивается.

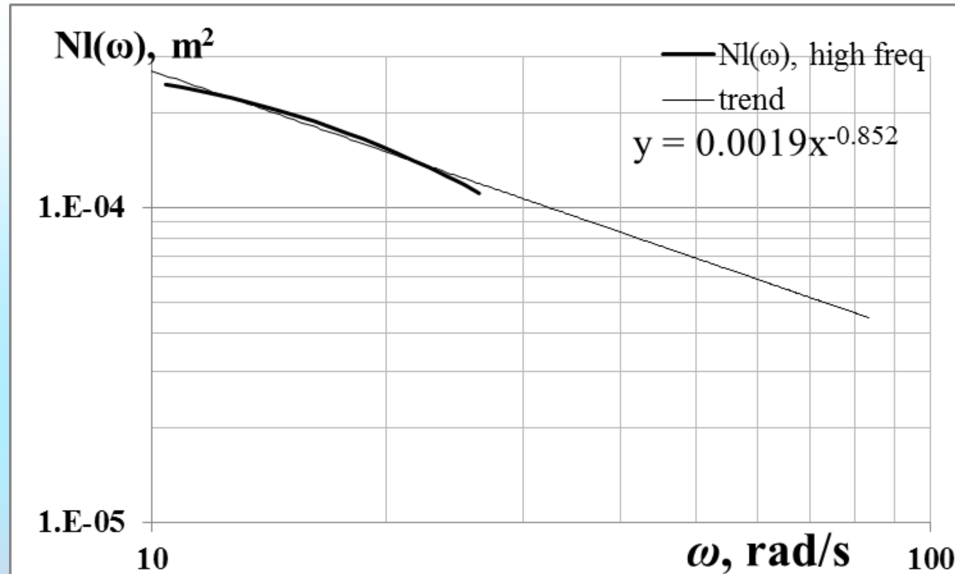
!! <u>Хвост Nl(ω) чуствует угловую форму S(*ω*)</u> !!

ВЧ асимптотики НПЛ на 1вом шаге

Сложнее дело обстоит со спектром при n=4 (рис.5)



а)



б)

Рис.5. НПЛ (а) и его ВЧ асимптотика (б) для сп с пар. γ =3.3, n=4, an=0.

Видно, что для спектра с хвостом $S(\omega) \sim \omega^{-4}$ **,**
хвост <u>НПЛ хоть и мал, но не равен нулю(!).</u>
При <u>станд. форме пика</u> и $\omega > 2\omega_p$ **НЛП еще положит (Nl(ω) >0),**
но медленно спадает,
демонстрируя изменчивость степени спадания p.

ВЧ асимптотики НПЛ на 1вом шаге

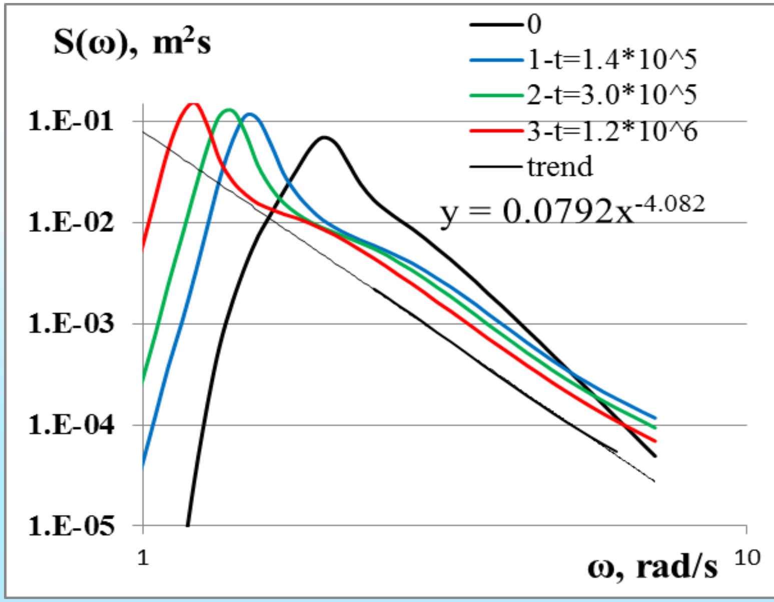
Общий результат по асимптотикам представлен в табл.1.

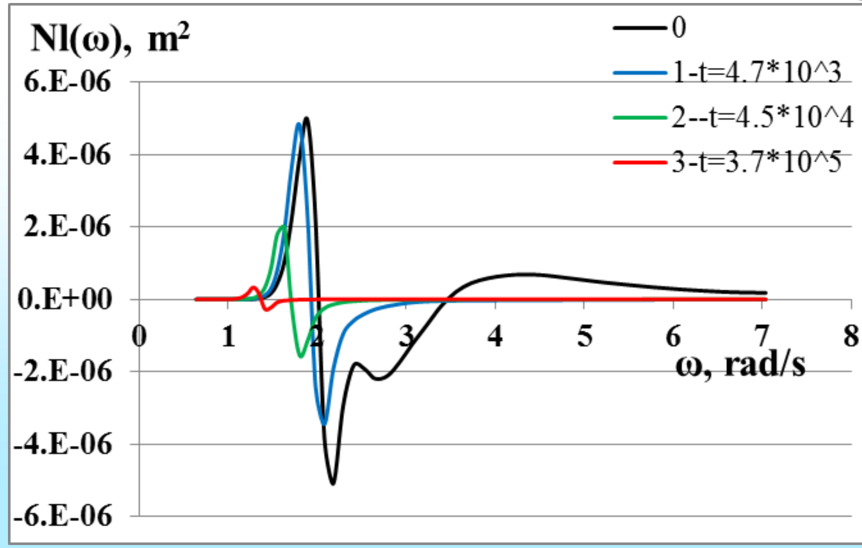
Таблица 1. Асимптотика НЛП для разл. форм нач. спектров.

№ вар.	Начальный спектр			Асимптотика
	n	γ	$\Psi(\theta)$	p
1	6	3.3	const	4.4(4.9)
2	6	1.0	const	4.6(5.2)
3	5	3.3	const	3.3
4	5	1.0	const	3.8
5	5	3.3	$\cos^2(\theta)$	3.8
6	4	3.3	const	(0.85)

Примечание. В скобках указан закон спадания НЛП для малой части полосы частот хвоста.

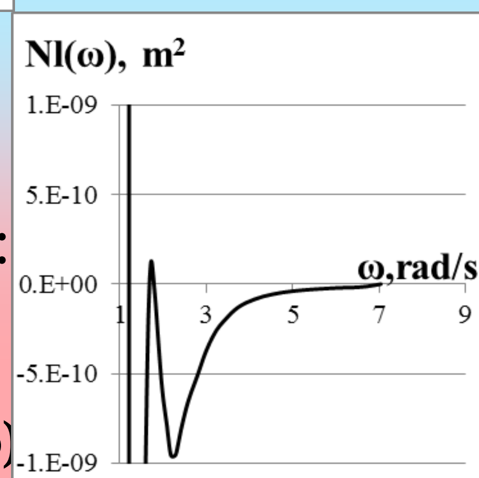
Форма спектров и НЛП на больших *t*





б)

а)



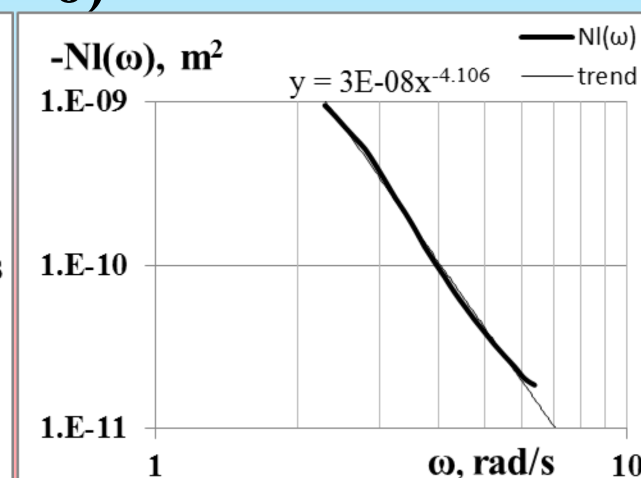


Рис. 6. S(ω,0) n=6, γ=3.3, an=0:

а) эволюция S(ω,t) ,

б) эволюция Nl(ω,t)

в) часть Nl(ω), г) ВЧ-тренд Nl(ω)

При t>$10^4 \cdot 1/\omega_p$ хвост S(ω) ~ $\omega^{-4-\varepsilon}$ (!) **в)** **г)**

Хвост НЛП Nl(ω) < 0 (!!), очень мал, и быстро спадает: Nl(ω) ~ $-\omega^{-4.1}$(!!)

Форма спектров и НЛП на больших *t*

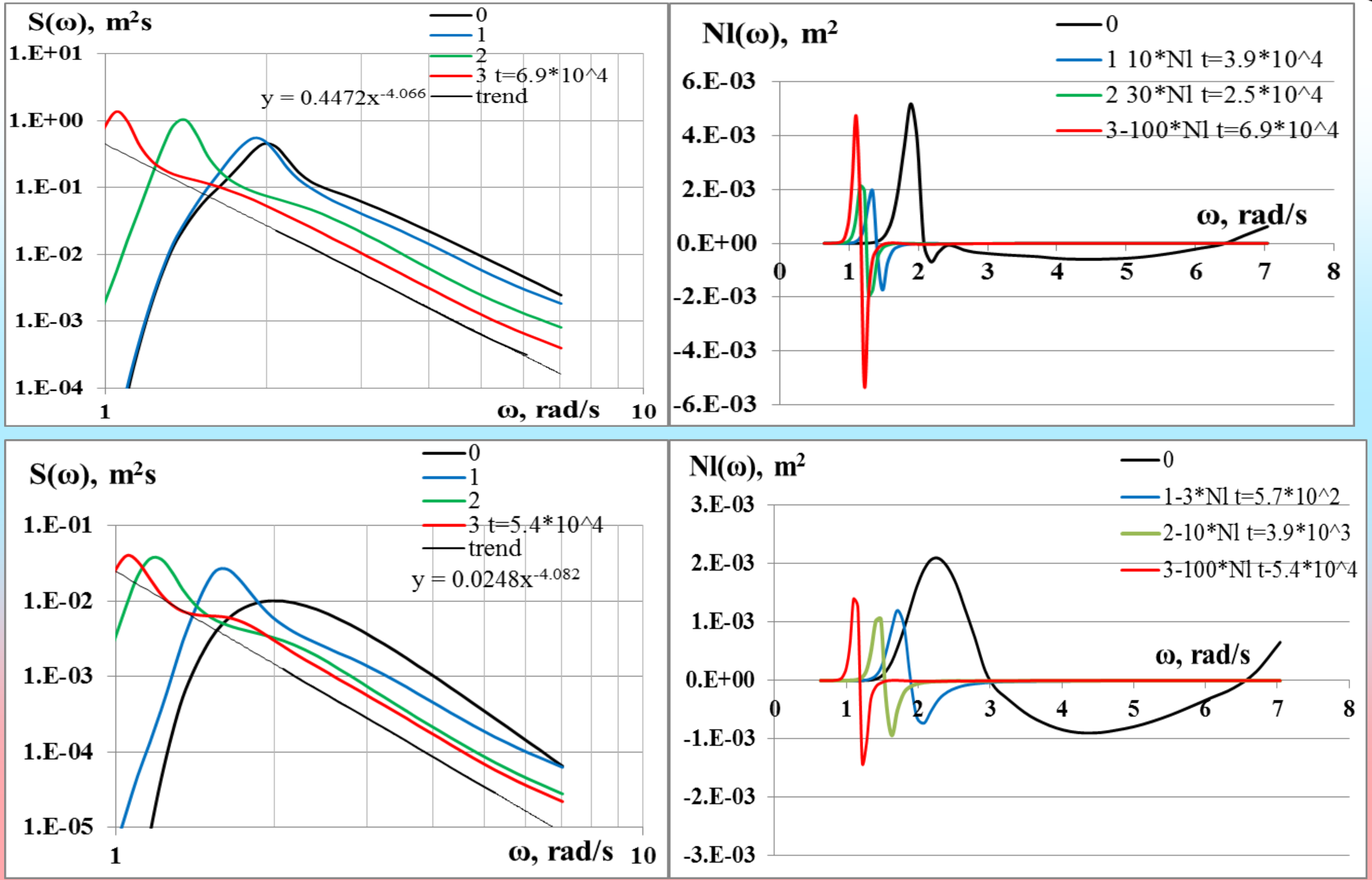


Рис.7. Верх ряд: **n=4, γ=3.3, an=0**, ниж.ряд: **n=4, γ=1.0, an=0**.

При t=0 <u>всегда хвост Nl(ω) велик(!)</u>, но при t>$10^4 \cdot 1/\omega_p$ Nl(ω) ~ - $\omega^{-4.1-\varepsilon}$ (!!!)

Интегральные характеристики S(ω,θ)

Автомодельная форма установившихся 2D-спектров $S_{am}(\omega,\theta)$ визуально представлена в (Полников 1990, Бадулин и др 2005, и др).

А/М <u>спектры имеют узконаправленный пик и широконаправленный хвост.</u>

Количественно форма 2D-спектров может характеризоваться

<u>частотной шириной</u> $\boxed{B = \sigma^2 / \omega_p S_p}$ **(8)**

где $\boxed{\sigma^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(\omega,\theta) d\omega d\theta = E,}$ **- дисперсия возвышений, пропорц-я энергии волн E,**

и <u>функцией угловой направленности</u>

$$\boxed{A(\omega) = S(\omega,\theta_p)/S(\omega)} \quad . \qquad \textbf{(9)}$$

Например,

для спектра J(γ=3.3; 5) **B=0.34, для ПМ(**γ=1.0; 5) **B=0.67**.

При Ψ= const A_p= 0.16; Ψ= $\cos^2(\theta)$ A_p =0.64; Ψ= $\cos^{12}(\theta)$ A_p = 1.4.

Общие результаты оценок параметров формы $S_{am}(\omega,\theta)$ представлены в табл. 2.

Асимптотики Nl(ω) и интегральные характеристики S(ω,θ)

Таблица 2. Асимптотики Nl(ω) и параметры S(ω,θ) на большом времени эволюции (счета КУ)

№ варианта	Начальный спектр			Время эволюции, сек;	Асимп. Nl(ω)	Параметры S(ω)	
	n	γ	Ψ(θ)		p	B*100	A_p*100
1	6	3.3	const	$1.3 \cdot 10^6$	4.1	22	16
2	6	1.0	const	$4.2 \cdot 10^6$	4.2	25	16
3	5	3.3	const	$1.3 \cdot 10^5$	4.1	25	16
4	5	1.0	const	$7.9 \cdot 10^5$	4.2	25	16
5	4	3.3	const	$6.9 \cdot 10^4$	4.1	23	16
6	4	1.0	const	$5.4 \cdot 10^4$	4.2	26	16
7	5	1.0	$\cos^2(\theta/2)$	$4.1 \cdot 10^6$	4.2	32	46
8	5	1.0	$\cos^8(\theta/2)$	$3.6 \cdot 10^6$	4.1	34	63
9	5	1.0	$\cos^2(\theta)$	$4.1 \cdot 10^5$	4.2	33	64
10	5	1.0	$\cos^4(\theta)$	$8.7 \cdot 10^6$	4.2	33	66
11	5	3.3	$\cos^{12}(\theta)$	$5.6 \cdot 10^6$	4.2	31	61

Особенности формы $S_{am}(\omega,\theta)$ и асимптотик $Nl(\omega)$ таковы

1) спектр $\underline{S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}}$, 2) ВЧ асимптотика Nl(ω) ~ - $\omega^{-4.1-\varepsilon}$.

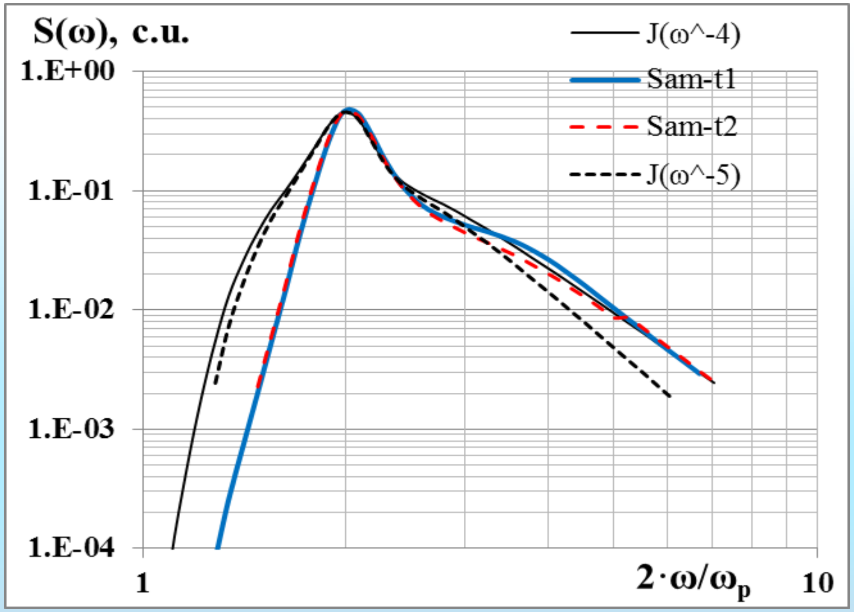
3) частотная форма пиков спектра $S_{am}(\omega,\theta)$ бывает двух типов:

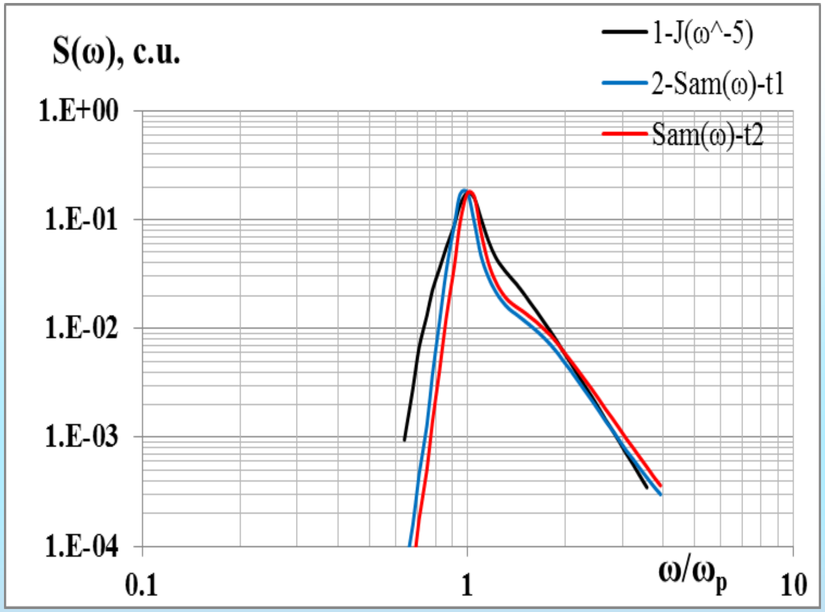
<u>узкополосная</u>(B=0.23±0.02 при $\Psi_{t=0}$ = c;)

и <u>среднеполосная</u>(B=0.33±0.01 при при $\Psi_{t=0} \neq$ c), т.е. типа $J(\omega)\cos^2\theta$.

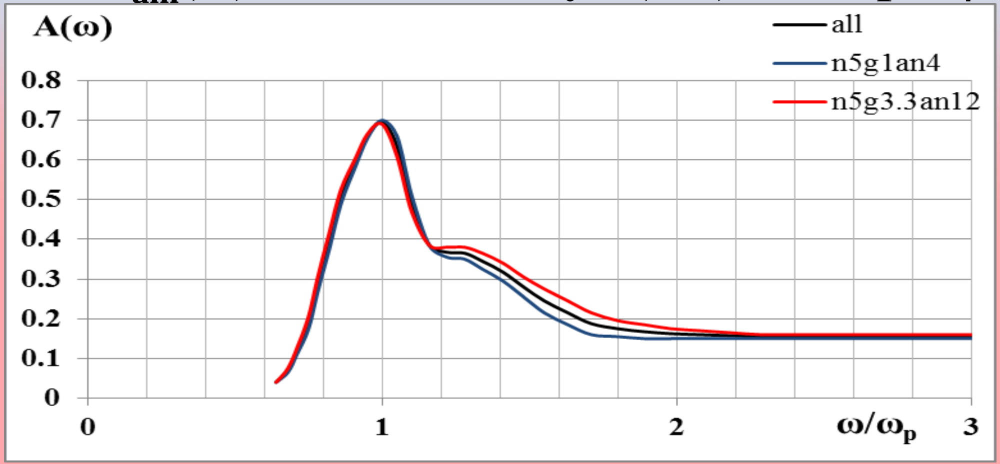
Детали формы 2D-спектров

Сравнение формы $S_{am}(\omega)$ с формой спектра $J(\omega)$





При $\psi \neq c$, пик $S_{am}(\omega)$ подобен пику $J(\omega^{-5})$; при $\psi = c$, пик $S_{am}(\omega)$ в 1.5раз *у*же



В области частот $\omega_p < \omega < 2\omega_p$ имеет место резкий переход от узкого сп. к изотропному

Рис.9. Типичный вид а/модельной угловой функции $A(\omega)$ при $\psi \neq c$.

Поиск интерпретации решений КУ

Для интерпретации **установившейся формы спектра** нужно

1. Рассчитать функции потоков $\mathbf{P_E(\omega)}$ **и** $\mathbf{P_N(\omega)}$

где $P_E(\omega) = -\int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega}\int \mathrm{Nl}(\omega,\theta)\,d\theta\,d\omega$ и $P_N(\omega_{max}) = -\int\limits_{\omega_{min}}^{\omega}\int (Nl(\omega,\theta)/\omega)\,d\theta\,d\omega$ (10)

2. Оценить степ. сохр. **полной энергии ΔE** и **волнов. числа ΔN**,

где $\Delta E = \int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}}(\int Nl(\omega,\theta)\,d\theta)\,d\omega$ и $\Delta \mathrm{N} = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}}\int (\mathrm{Nl}(\omega,\theta)/\omega)\,d\theta\,d\omega$ (11)

(видно, что $\Delta E = -P_E(\omega_{max})$ и $\Delta N = -P_N(\omega_{max})$)

3. Определить причину установления спектра $\underline{\mathbf{S_{AM}(\omega)\sim\omega^{-4}}}$**.**

Для этой цели были выполнены расчеты функций потоков

$P_E(\omega)$ и $P_N(\omega)$

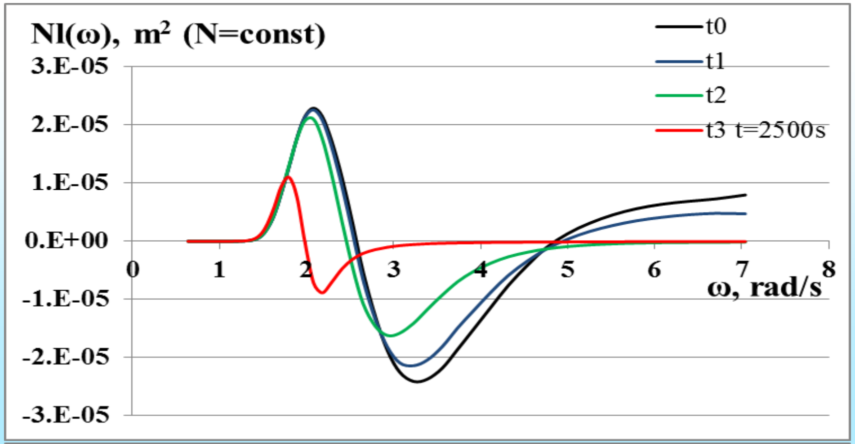
<u>для двух режимов численного решения КУ</u>:

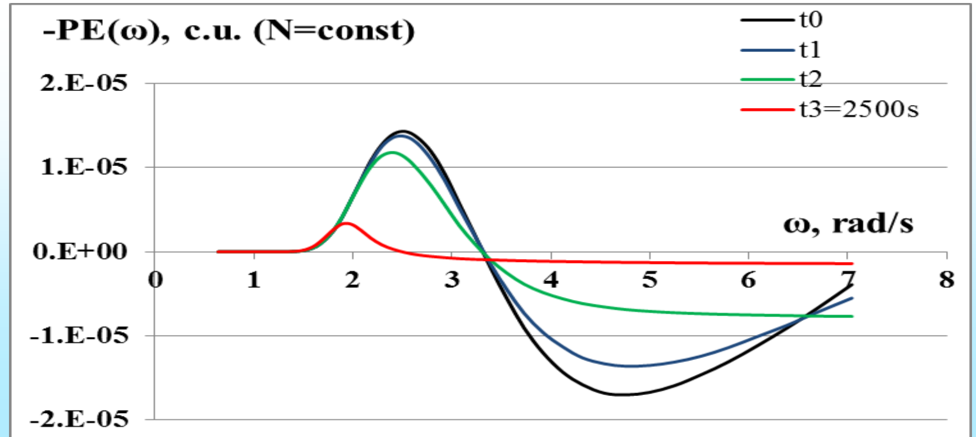
а) с сохранением энергии E <u>на каждом шаге счета КИ</u>

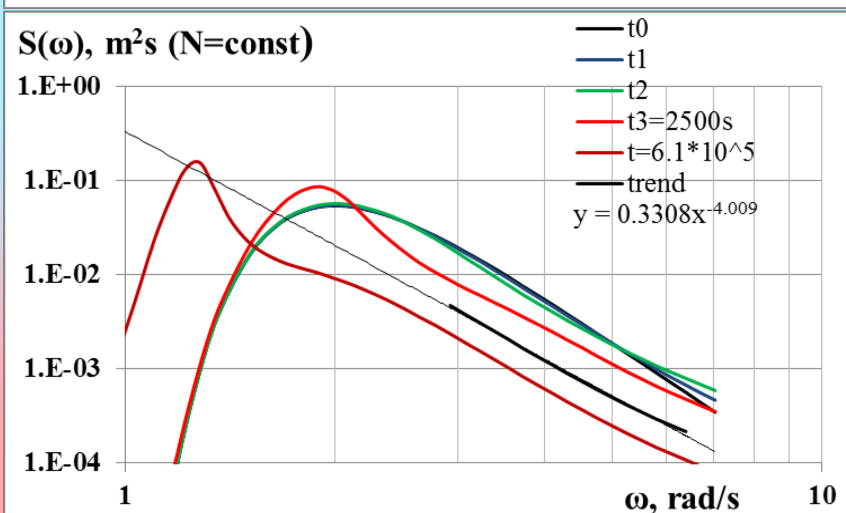
б) с сохранением волн. действия N <u>на каждом шаге счета КИ</u>

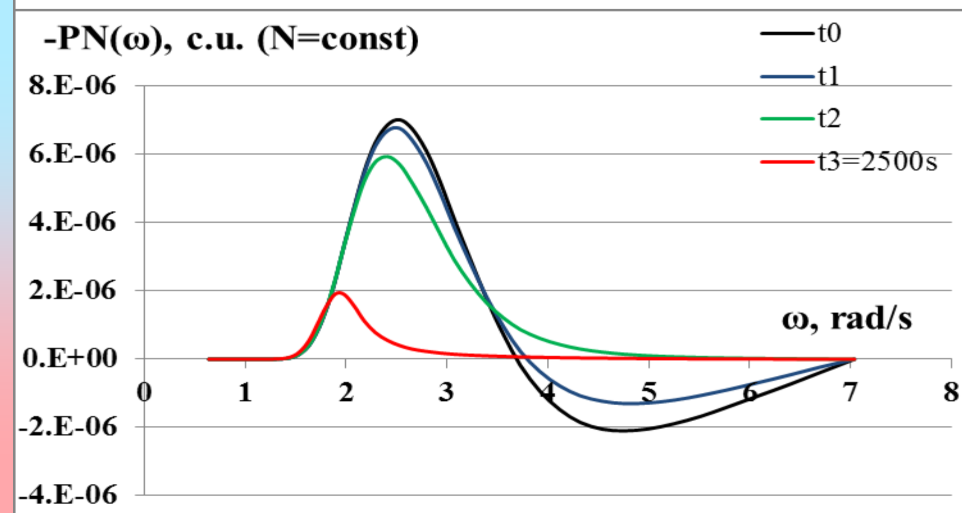
Поиск интерпретации решений КУ
Расчет потоков

Счет КУ с **сохран. волн. действия N** (n=5, γ=1.0, Ψ=c)







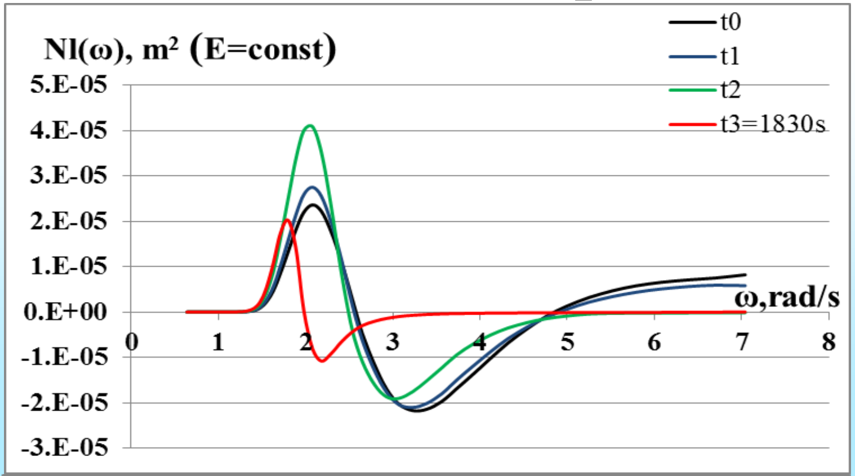


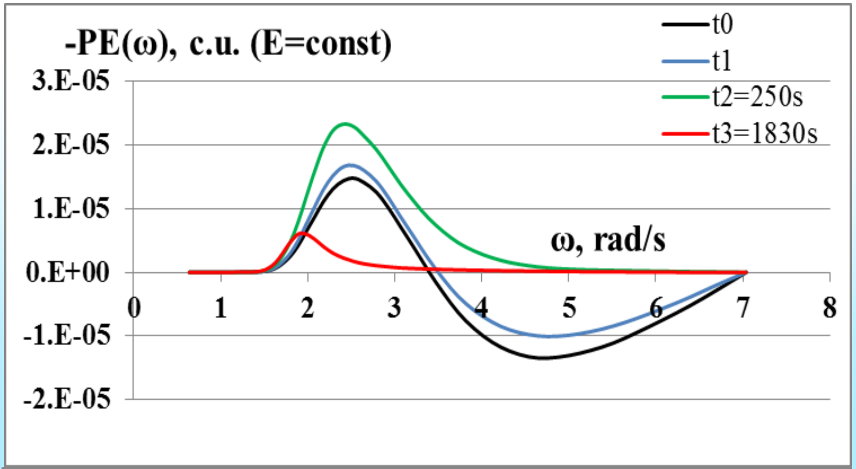
1) Устанавливается спектр **$S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$** ,

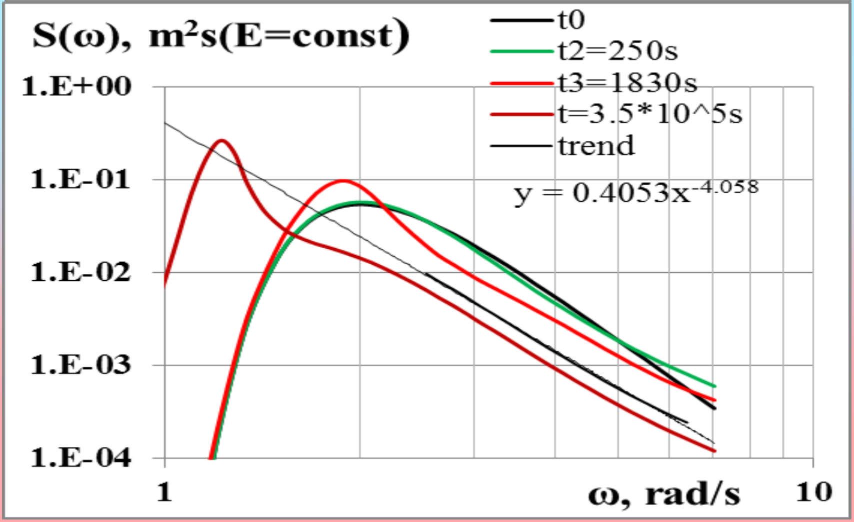
2) $\Delta N = -P_N(\omega_{max}) = 0$ **,но есть поток** $P_E(\omega_{max})$ **вверх по част(!) и ΔE<0(!)**

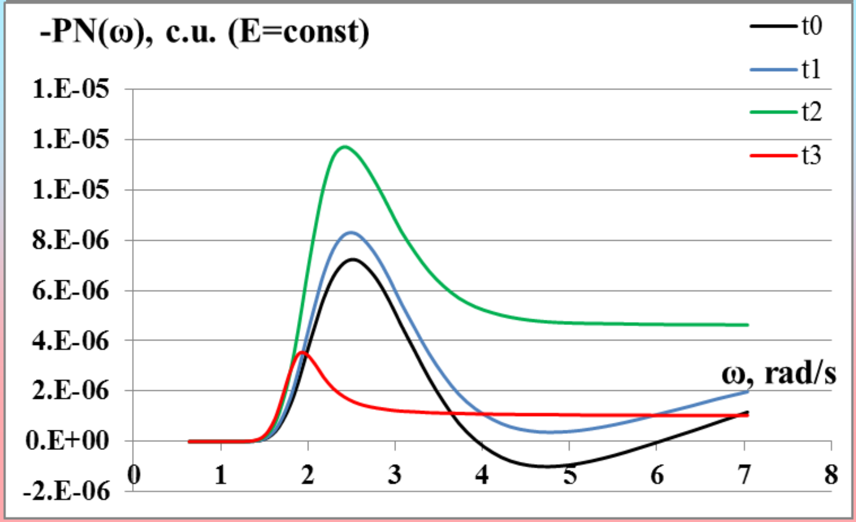
Поиск интерпретации решений КУ
Расчет потоков

Счет КУ с **сохранением энергии Е** (n=5, γ=1.0, Ψ=c)









1) Устанавливается тот же по виду спектр **$S_{AM}(\omega)\sim\omega^{-4}$** ,

2) $\Delta E = -P_E(\omega_{max}) = 0$ **но есть поток** $P_N(\omega_{max})$ **вниз по част(!) и ΔN>0(!)**

Поиск интерпретации решений КУ
Хвост спектра $S_{am}(\omega)$ и выше него

Характер эволюции хвоста спектра

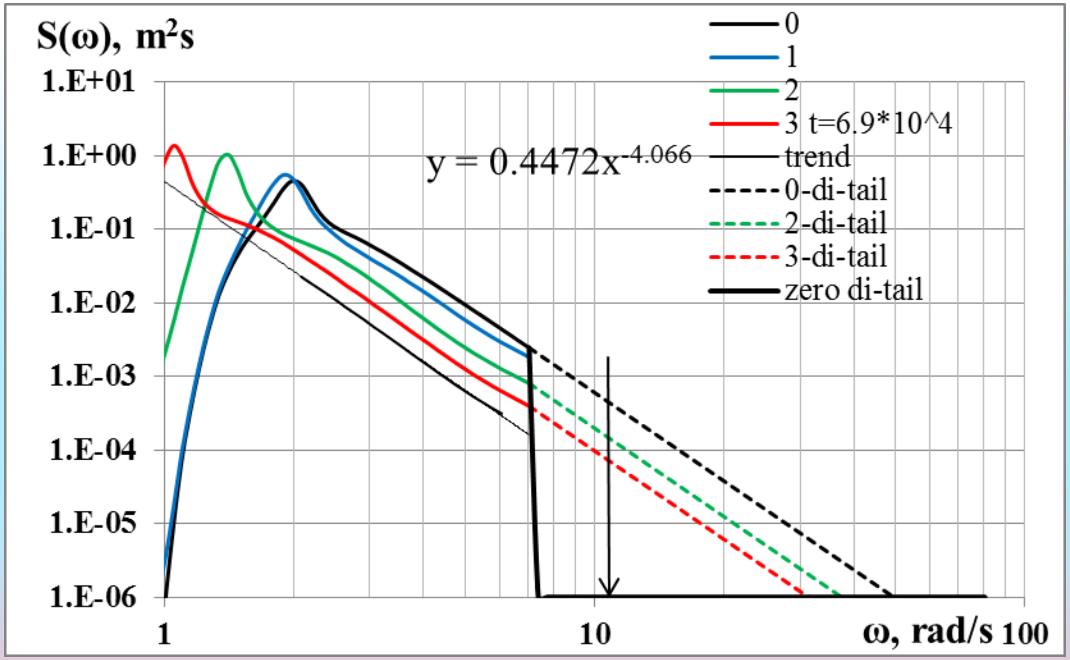


Рис.10. Пояснение к расчетной форме хвоста. Стрелка-предельная частота в 4-в конфигуаци. Сплошная жирная- полное отрезание хвоста при учете диссипации за пределами расч. области (Бадулин др. 2005)

Выводы:

В реш. КУ(1) всегда (E=c или N=c) устанав-ся хвост $\underline{\mathbf{S_{AM}(\omega)\sim\omega^{-4}}}$.

(У нас выше по частоте ($\omega>\omega_{max}$) идет диагностический хвост $\mathbf{S_{DI}(\omega)\sim\omega^{-4\pm}}$)

Результат решения КУ не зависит от вида потока при $\omega>>\omega_p$(!).

<u>Уходящие или приходящие потоки адсорб. или порожд. хвостом спектра</u>

Т.о., **спектр $\underline{S_{AM}(\omega)\sim\omega^{-4}}$** <u>никак не определяется потоками</u> P_E и P_N,

а его вид есть внутреннее свойство КИ.

Интерпретация решений КУ

В отличие от трактовок установившихся форм спектра

$\underline{S(\omega)=c\cdot\omega^{-4}}$

как спектров Колмогорова-Захарова

(Пушкарев др. 2003; Бадулин др. 2005, <u>которые решали КУ (2) при N=con</u>) ,

мы трактуем эти спектры

как <u>нестационарный</u> <u>аналог аналитического решения</u>

полученного в работе Захарова-Филоненко (ДАН,1966)

для

<u>бездиссипативного («чистого») КУ</u> вида

$$\boxed{\partial S(\omega,\theta)/\partial t = I_{NL}\left[S(\omega,\theta)\right]} \,.$$

Интерпретация решений КУ

Основания для новой трактовки решения КУ таковы:

1) Независимо от режима числ. решения задачи (E=c или N=c), формируется а/м пик, при котором всегда хвост $S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$;

2) При а/м пике, на хвосте $S_{AM}(\omega)$, Nl(ω) всегда отрицателен, оч., но не равен 0(!). Форма $Nl(\omega) \sim -\omega^{-4}$. обеспечивает устан. и а/м эволюцию $S_{AM}(\omega, t)$.

3) Наличие постоянных (колмогоровских) потоков P_E и P_N никак не сказывается характере решения КУ (1).

Главную роль играет пик спектра и нелокальность НЛП,
Т.е. имеет место нарушение постулатов теории Колмогорова

Математика процесса такова, что во время эволюции формируется а/м пик спектра в обл. (ω_p, θ_p), обеспечивающий отрицательный НЛП формы $Nl(\omega) \sim -\omega^{-4}$, который и стабилизирует форму решения КУ (1) вида $S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$.

Выводы

1. Асимптотику спадания **Nl(ω) на выс.ч. определяют: форма пика** в обл. **(ω_p, θ_p) форма,** его **угловая ф-ция** и **хвост** спектра.
С уменьшением скорости спада S(ω) снижается спад и интенсив. положительной асимпт. Nl(ω). **При $S(\omega) \sim \omega^{-4}$** хвост **$Nl(\omega) \sim -\omega^{-4} < 0$**.

2. При форме хвоста **$S(\omega) \sim \omega^{-4}$** и особой, **а/м 2D-форме пика** спектра, устанавливается асимптотика <u>**$Nl(\omega) \sim -\omega^{-4}$**</u> **,** что и **обеспечивает форму решения** КУ (1) вида **$S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$.**

3. А/м форма решения **$S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$** <u>**не определяется**</u> наличием постоянных (или перем.) потоков эн. **P_E** и в.д. **P_N** по спектру.

4. Из п.3 следует, что а/м численные решения КУ(1) вида **$S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$** **не являются колмогоровскими** спектрами.

5. А/м численные решения «чистого» КУ(1) вида **$S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$** есть <u>**нестационарный**</u> <u>**аналог**</u> аналитического решения Захарова-Филоненко (ДАН,1996).
Здесь (но не в решении «диссипативного» КУ вида (2))
форма **$S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$** <u>определяется не физикой потоков по спектру</u>, а <u>математическими свойствами КИ</u>, установленными в (ДАН,1996).
Т.о. **$S_{AM}(\omega) \sim \omega^{-4}$** есть <u>**непотоковый спектр ЗФ**</u> **(!), а** <u>**не сп. КЗ.**</u>

Основная литература

1. *Захаров В.Е., Филоненко Н.Н.* Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости // **Доклады АН СССР. 1966. Т. 170, №6. С. 1292-1295**

2. *Захаров В.Е., Заславский М.М*. Интервалы накачки и диссипации в кинетическом уравнении слаботурбулентной теории ветровых волн // **Изв. АН СССР. ФАО. 1982. 18,№10. С.1066-1026.**

3. *Полников В.Г*. Расчет нелинейного переноса энергии по спектру поверхностных гравитационных волн // **Изв. АН СССР. ФАО.1989.Т. 25, №11. С.1214-1225**.

4. *Полников В.Г*. Численное решение кинетического уравнения для поверхностных гравитационных волн // **Там.же. 1990. Т. 26, №2. С.168- 176**.

5. *Resio, D., and Perry, W*.: A numerical study of nonlinear energy fluxes due to wave-wave interactions., **J. Fluid Mech., 223, 603-629, 1991**

6. ***Van Vledder G***. The WRT method for the computation of non-linear four-wave interaction in discrete spectral wave m. **J. Coastal Engineering**, 2006.V.53,P. 223-242.

7. *Pushkarev A. N., D. Resio, and V. E. Zakharov*.Weak turbulent approach to the wind generated gravuty seas waves//**Physica D; 2003. v. 184, pp 29-63**.

8. *Badulin S. I., A. N. Pushkarev, D. Resio, and V. E. Zakharov* Self-similarity of wind-driven seas **// Nonlinear Processes in Geophysics**, **12, 891–945, 2005 .**