Сдвиг фаз и оптимальные возмущения в модели бароклинной неустойчивости Иди

М. В. Калашник, О.Г. Чхетиани

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН

Под бароклинной неустойчивостью понимают неустойчивость геострофических течений с вертикальным сдвигом скорости. С развитием этой неустойчивости, обусловленной выделением доступной потенциальной энергии, связывают формирование внетропических циклонов. Классическая модель бароклинной неустойчивости была развита в работе

Eady E.T. Long waves and cyclone waves // Tellus. 1949. V. 1, N3. 2.

Она не содержала ни одной ссылки на предшествующие работы. Сейчас ее процитировали более 2000 раз.

Появились даже работы с музыкальными названиями – «Вариации на тему Иди»

В «Лекциях по геофизической гидродинамике» Ф. В. Должанский написал

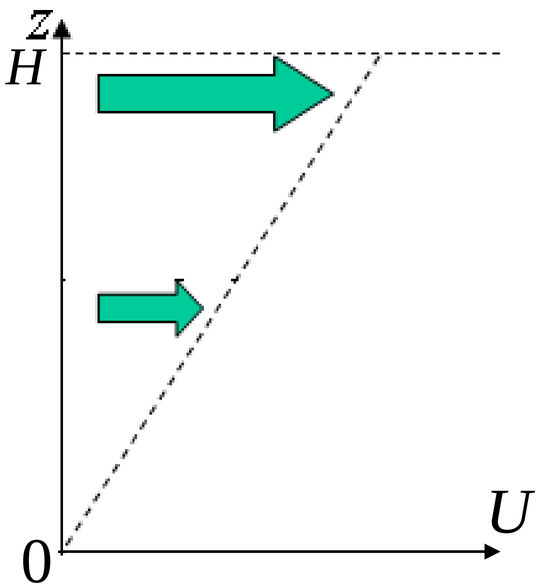
« ..все последующие работы на эту тему лишь количественно развивают идею, не внося сколь - нибудь новых качественных объяснений»

В принципе это верно, но…. есть нюансы.

Модель Иди –неустойчивость зонального течения с постоянным вертикальным сдвигом

$$\mathbf{U} = \overline{u}(z)\mathbf{i} = \Lambda z\mathbf{i}$$

$$\sigma = \overline{\sigma} = N^2 z - f\Lambda y$$



плавучесть $\sigma = g\vartheta' / \vartheta_*$

Параметры задачи f, N, Λ, H

$$f = 10^{-4}, \Lambda = 10^{-3}, N = 10^{-2}\,\text{с}^{-1}$$

Геометрический масштаб

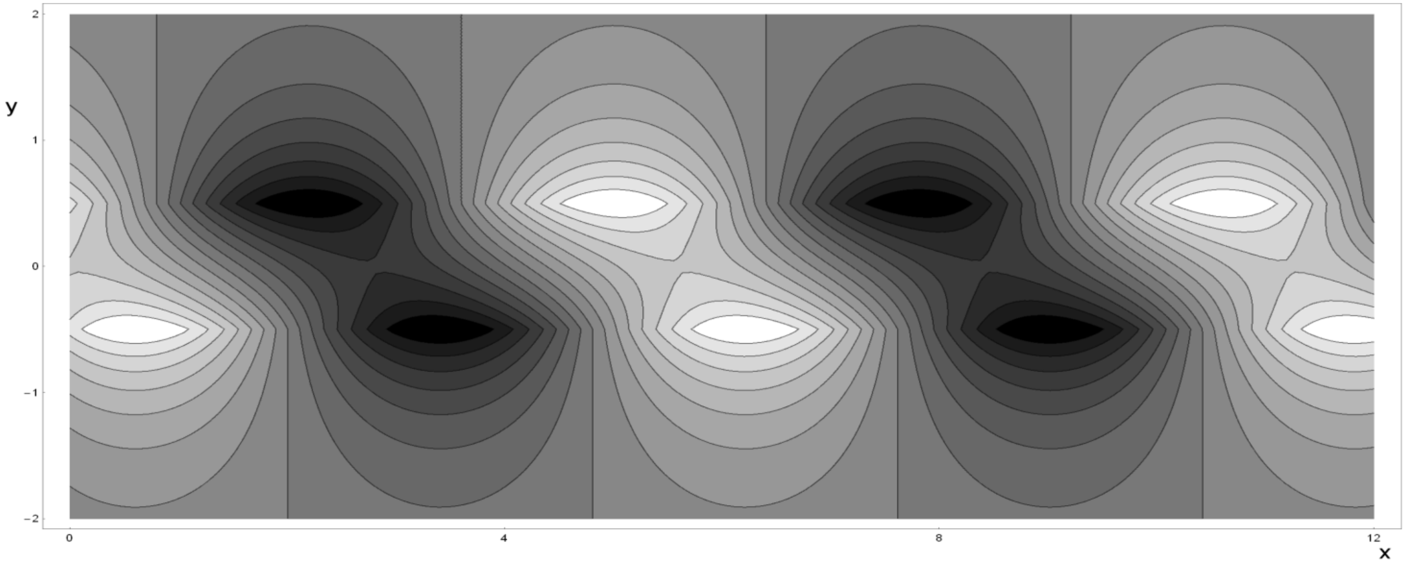
(Радиус деформации)

$$L_R = \frac{NH}{f} = 1000\,\text{км}$$

Временной масштаб

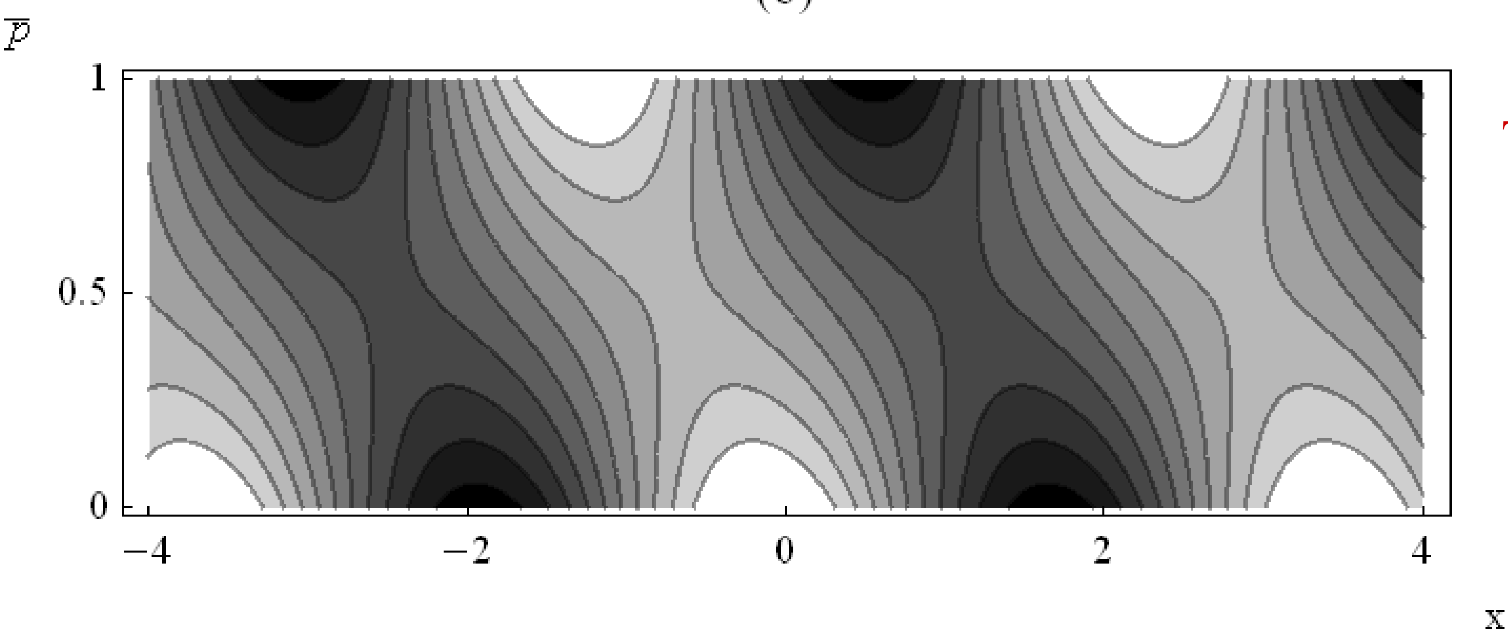
$$T = \frac{N}{f\Lambda} = (\varepsilon f)^{-1} = 28\,\textit{часов} \approx \textit{сутки}$$

Сдвиг фаз неустойчивых возмущений



Слой сдвига

(б)



Течение Иди

Два направления развития модели Иди

В современных исследованиях модели Иди можно выделить два приоритетных направления. **Первое направление** связано с описанием бароклинной неустойчивости в терминах взаимодействия edge Rossby waves (ERWs). Эти волны, часто называемые также counter - propagating Rossby waves (CRWs), представляют собой возмущения сдвигового течения, локализованные у верхней и нижней границы на масштабе высоты Россби. Если расстояние между границами слоя порядка этого масштаба, происходит эффективное взаимодействие двух ERWs, приводящее к развитию неустойчивости.

Второе направление исследований, связано с концепцией **оптимальных возмущений или сингулярных векторов** – **начальных возмущения, для которых скорость роста энергии или отношение начальной и конечной энергии принимают максимальное значение.** В работах этого направления пересмотрена линейная теория устойчивости, основанная на концепции нормальных мод. Показано, что растущая нормальная мод в общем случае не является оптимальным возмущением – скорость роста суперпозиции растущей и затухающей мод может быть больше, чем у одной растущей моды. Причина такого поведения – несамосопряженность дифференциальных операторов задач теории устойчивости.

Аннотация доклада

В работах по нахождению оптимальных возмущений в модели Иди решается достаточно сложная вычислительная задача на условный экстремум функционала полной энергии (или ряда других функционалов). Алгоритм решения задачи использует конечно – разностную аппроксимацию динамического оператора задачи по вертикали с последующим нахождением сингулярного разложения его матрицы . В докладе рассмотрен подход, позволяющий определить параметры оптимальных возмущений аналитически. Этот подход использует явные выражения для энергетических функционалов, представляющие собой функции параметров начального возмущения. Определение оптимальных параметров сводится к стандартному исследованию этих функций на экстремум. Для возмущений с нулевой PV в качестве параметров выступают амплитуды начальных распределений плавучести на границах слоя атмосферы и сдвиг фаз между этими распределениями. В докладе представлены формулы для оптимального сдвига фаз и максимума отношения энергий. Также показано, что оптимальные возмущения всегда имеют равные граничные амплитуды. Проведено сравнение параметров оптимальных возмущений с параметрами растущих нормальных мод. Установлено, что существует только одна нормальная мода, которая является оптимальным возмущением.

Математическая формулировка модели

В квазигеострофическом приближении поведение двумерных возмущений течения с вертикальным сдвигом описывается уравнением переноса PV

$$\boxed{\left(\partial/\partial t + \Lambda z\partial/\partial x\right)q = 0,} \qquad \boxed{q = \psi_{xx} + (f/N)^2\psi_{zz}}$$

с краевыми условиями $\boxed{z = 0, H: \quad \left(\partial/\partial t + \Lambda z\partial/\partial x\right)\psi_z - \Lambda\psi_x = 0.}$

Горизонтальные компоненты скорости и плавучесть связаны с геострофической функцией тока соотношениями

,

$$\boxed{u = -\psi_y, \ \mathrm{v} = \psi_x} \qquad \boxed{\sigma = f\psi_z}$$

Уравнению удовлетворяют возмущения с нулевой PV . Динамика таких возмущений описывается решением уравнения Лапласа с нестационарными краевыми условиями

$$\boxed{\psi_{xx} + \psi_{zz} = 0,} \qquad \boxed{z = 0{,}1: \quad \left(\partial/\partial t + z\partial/\partial x\right)\psi_z - \psi_x = 0.}$$

В качестве масштабов горизонтальных координат и времени приняты

$$\boxed{L_R = NH/f} \qquad \boxed{T = N/\Lambda f}$$

Представление решения начальной задачи суммой нормальных мод

Решение уравнения Лапласа для периодических возмущений

$$\psi = \left(A(t)\frac{\mathrm{ch}(kz)}{k\,\mathrm{sh}k} - B(t)\frac{\mathrm{ch}k(z-1)}{k\,\mathrm{sh}k} \right) e^{ikx}$$

Подстановка в ГУ дает систему

$$i\frac{d\mathbf{r}}{dt} = S\,\mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} k - \mathrm{cth}k & \mathrm{sh}^{-1}k \\ -\mathrm{sh}^{-1}k & \mathrm{cth}k \end{pmatrix}$$

Из решения системы для функции тока получим представление

$$\psi = C_1 F_1(z) e^{i(kx-\omega_1 t)} - C_2 F_2(z) e^{i(kx-\omega_2 t)}$$

$$F_{1,2}(z) = \frac{\sinh k(z-0.5)}{k\cosh 0.5k} \pm \mu \frac{\cosh k(z-0.5)}{k\sinh 0.5k}$$

$$\mu^2 = (\alpha-1)/(1+\alpha)$$

Собственные значения матрицы S

$$\omega_{1,2} = k/2 \pm \sinh^{-1}(k)\sqrt{\alpha^2-1}$$

$$\alpha = \alpha(k) = \cosh k - 0.5k\sinh k$$

Значения констант из начальных условий

$$t=0: \quad \psi_z\big|_{z=0} = B(0)e^{ikx}, \ \psi_z\big|_{z=1} = A(0)e^{ikx}$$

Анализ собственных значений

Собственные значения $\boxed{\omega_{1,2} = k/2 \pm \sinh^{-1}(k)\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ комплексны если

$\boxed{-1 < \alpha(k) < 1}$ Отсюда интервал неустойчивых волновых чисел $\boxed{0 < k < k_b}$

$k_b = 2.399$ корень уравнения $\boxed{\coth(k/2) = k/2}$

Инкремент нарастания нормальных мод

$$\boxed{s(k) = \sinh^{-1}(k)(1 - \alpha^2)^{1/2} \equiv \left(k\coth k - (k/2)^2 - 1\right)^{1/2}}$$

Параметры наиболее опасной моды $\boxed{s = s_m = 0.310}$ $\boxed{k = k_m = 1.606}$

Для значений параметров тропосферы наиболее опасной моде отвечает длина волны 3600 км (четверть длины волны – масштаб циклона) и время нарастания в раз порядка 3 суток. Эти оценки, дополненные исследованием структуры неустойчивой моды, представляют собой знаменитый результат Иди.

Представление решения суммой ERWs

Амплитуды представляются как $\boxed{A(t)=a(t)e^{i\theta_2(t)}}$ $\boxed{B(t)=b(t)e^{i\theta_1(t)}}$

Решение в вещественной форме

$$\boxed{\psi = a(t)\frac{\mathrm{ch}(kz)}{k\,\mathrm{sh}k}\cos\left(kx+\theta_2(t)\right)-b(t)\frac{\mathrm{ch}k(z-1)}{k\,\mathrm{sh}k}\cos\left(kx+\theta_1(t)\right)}$$

Распределения плавучести на границах

$$\boxed{\psi_z\big|_{z=1}=a(0)\cos\left(kx+\theta_2(0)\right)} \qquad \boxed{\psi_z\big|_{z=0}=b(0)\cos\left(kx+\theta_1(0)\right)}$$

Слагаемые, пропорциональные a(t) и b(t) описывают ERWs

Взаимодействие пары волн описывается системой (Davies, Bishop (1994)

$$\boxed{da/dt=rb\sin\theta} \qquad \boxed{db/dt=ra\sin\theta} \qquad \boxed{d\theta/dt=-2r\left(\alpha-0.5\left(m+m^{-1}\right)\cos\theta\right)}$$

$$\boxed{m=b/a} \qquad \boxed{d\theta_+/dt=-\left(k+r\left(m-m^{-1}\right)\cos\theta\right)}$$

Основной параметр – сдвиг фаз $\boxed{\theta=\theta_1-\theta_2}$

Граничные амплитуды растут если сдвиг фаз $\boxed{0<\theta<\pi}$ $\boxed{(\sin\theta>0)}$

Сдвиг фаз для растущих нормальных мод и первые интегралы

Растущая нормальная мода описывается решением $\boxed{a = b = a(0)\exp(st)}$

$$\boxed{\cos\theta_n = \alpha(k) \equiv \mathrm{ch}(k) - 0.5k\,\mathrm{sh}(k)} \qquad (1)$$

Формула (1) дает зависимость сдвига фаз от волнового числа

Первые интегралы системы DB

$$\boxed{I_1 = a^2 - b^2 = \mathrm{const}} \qquad \boxed{I_2 = 0.5(a^2 + b^2) - \alpha^{-1} ab\cos\theta = \mathrm{const}}$$

Для возмущений с равными граничными амплитудами сводится к системе

$$\boxed{da/dt = ra\sin\theta} \qquad \boxed{d\theta/dt = -2r\left(\alpha - \cos\theta\right)}$$

Полная энергия и уравнение баланса

Операции осреднения

$$\overline{\varphi}^{x} = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\varphi\,dx$$

$$\langle\varphi\rangle \equiv \int_0^1 \overline{\varphi}^{x}\,dz$$

Полная энергия
и уравнение баланса

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\langle \psi_x^2 + \psi_z^2 \right\rangle$$

$$\frac{dE}{dt} = \left.\overline{\psi_x \psi_z}^{x}\right|_{z=1}$$

Прямые вычисления дают

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\langle \psi_x^2 + \psi_z^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{cth}\,k}{k}\left(a^2(t) + b^2(t) - 2a(t)b(t)\,\mathrm{ch}^{-1}k\cos\theta(t)\right)$$

$$\frac{dE}{dt} = \left.\overline{\psi_x \psi_z}^{x}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}\mathrm{sh}^{-1}k\,a(t)b(t)\sin\theta(t)$$

Основные параметры – амплитуды a, b распределений плавучести на границах слоя атмосферы и сдвиг фаз между этими распределениями

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

Начальные оптимальные возмущения

Скорость роста энергии

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = \frac{2k}{\operatorname{ch} k}\,\frac{ab\sin\theta}{a^2 + b^2 - 2ab\operatorname{ch}^{-1}k\cos\theta}}$$

Для возмущений с a=b

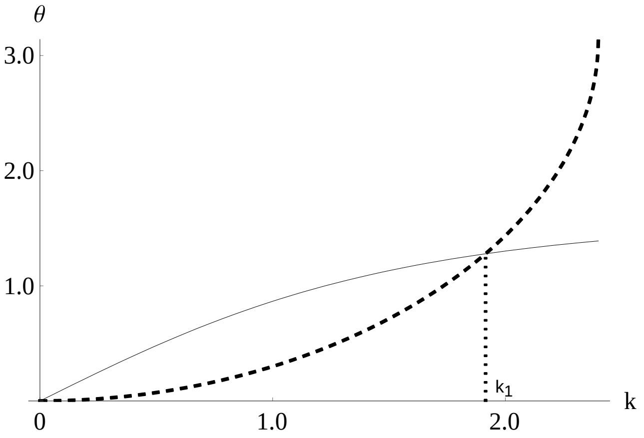
$$\boxed{\gamma = \gamma(k,\theta) = \frac{k\sin\theta}{\operatorname{ch} k - \cos\theta}}$$

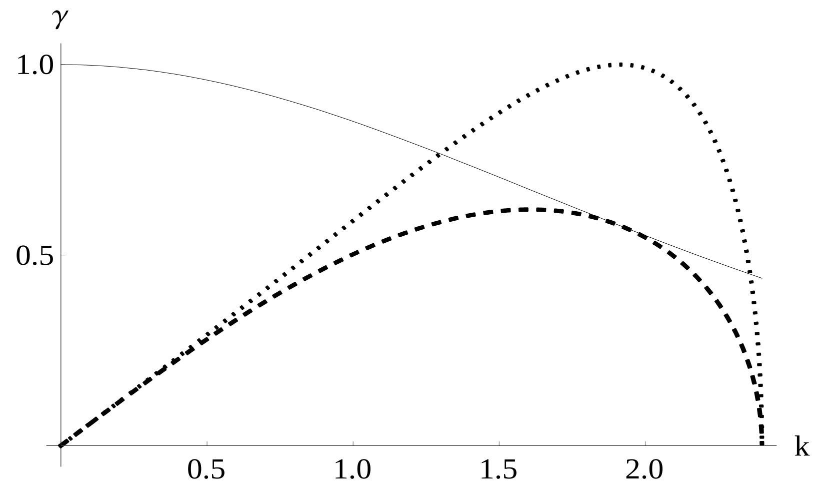
Оптимальному возмущению отвечает значение $\theta = \theta_{opt}$ при котором функция $\gamma(k,\theta)$ достигает максимума. Отсюда

$$\boxed{\cos\theta_{opt} = \operatorname{ch}^{-1}(k)} \qquad \boxed{\gamma_{opt} = \gamma(k,\theta_{opt}) = k/\operatorname{sh}(k)}$$

Для растущих нормальных мод $$\boxed{\gamma_n(k) = 2s(k)}$$

Зависимости сдвига фаз и скорости роста от волнового числа





существует единственное значение k=1,915 , для которого нормальная мода является оптимальной. Для всех других значений $\gamma_{opt} > \gamma_n$

численные оценки для значения k=1.606, (норм. мода с максим. скоростью роста.)

Оптимальное возмущение

$\boxed{\cos\theta_{opt} = 0.386}$ $(\theta = 67.3^o)$ $\boxed{\gamma_{opt} = 0.672}$

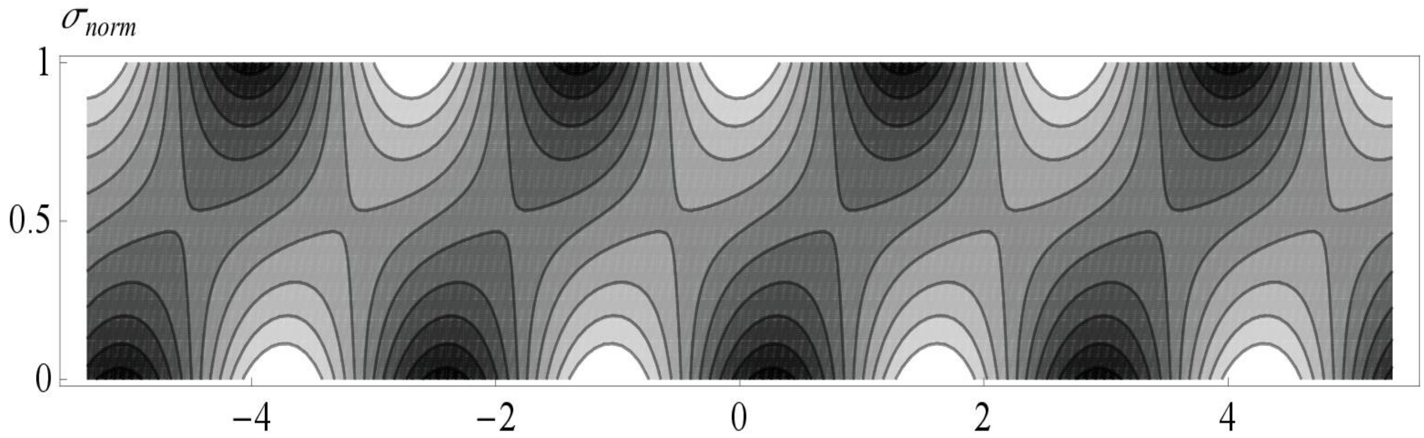
Нормальная мода

$\boxed{\cos\theta_n = 0.672}$ $(\theta = 47.8^o)$ $\boxed{\gamma_n = 0.62}$

Для значения k=1 скорости роста отличаются в два раза

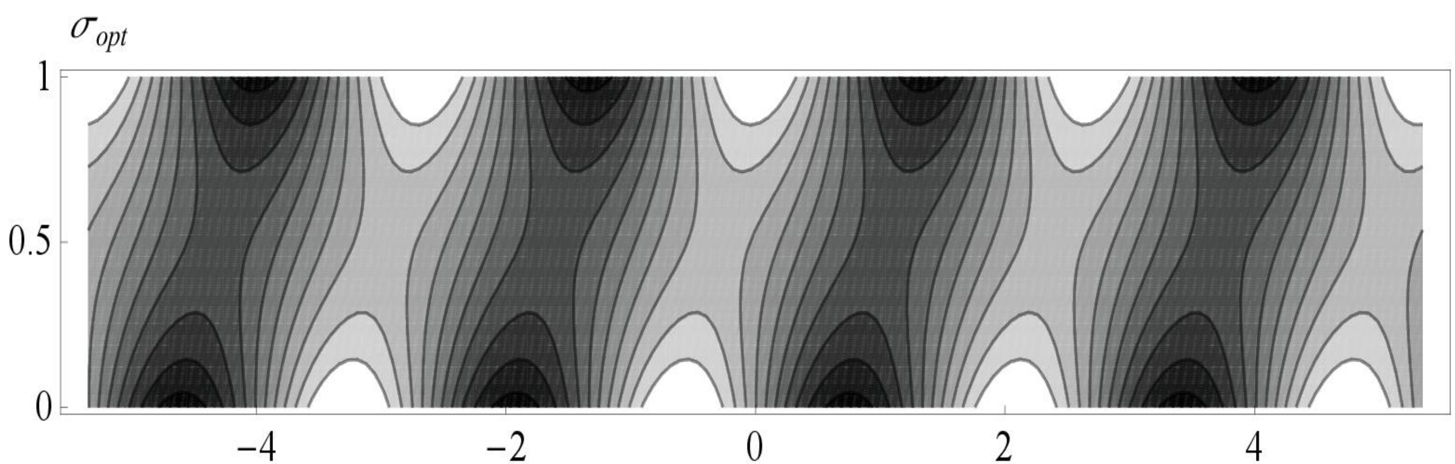
Картины изолиний полей плавучести

Нормальная мода



a)

Оптимальное возмущение



c)

Оптимальные возмущения с максимумом отношения энергий

Для возмущений с a=b отношение конечной и начальной энергий

$$F=\frac{E(t)}{E(0)}=\left(\frac{a^2(t)}{a^2(0)}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}k-\cos\theta(t)}{\alpha-\cos\theta_0}\right)$$

Выражение преобразуется к виду

$$F=\frac{E(t)}{E(0)}=\left(\frac{\alpha-\cos\theta_0}{\mathrm{ch}k-\cos\theta_0}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}k-\cos\theta(t)}{\alpha-\cos\theta(t)}\right)$$

Здесь сдвиг фаз $\theta(t)$ есть решение задачи Коши

$$d\theta/dt=-2r(\alpha-\cos\theta)\qquad \theta(0)=\theta_0$$

которое зависит от начального значения и волнового числа как от параметров $:\ \theta=\theta(t,k,\theta_0)$

С учетом этой зависимости функционал F есть функция трех переменных

$$F=F(t,k,\theta_0)$$

Оптимальному возмущению отвечает максимум этой функции при фиксированных значениях первых двух аргументов.

Решение задачи на экстремум

Решение уравнения для сдвига фаз в форме первого интеграла

$$\boxed{Y=\frac{X+c(t)}{c(t)X+1}} \quad \boxed{Y=\delta^{-1}\mathrm{tg}(\theta(t)/2)} \quad \boxed{X=\delta^{-1}\mathrm{tg}(\theta_0/2)} \quad \boxed{c(t)=\mathrm{th}\big(s(k)t\big)}$$

Подстановка в выражение для F дает

$$\boxed{F-1=\frac{(n+1)c(t)}{1-c^2(t)}\left(\frac{c(t)X^2+2X+c(t)}{X^2+n}\right)} \quad \boxed{X=\delta^{-1}\mathrm{tg}(\theta_0/2)}$$

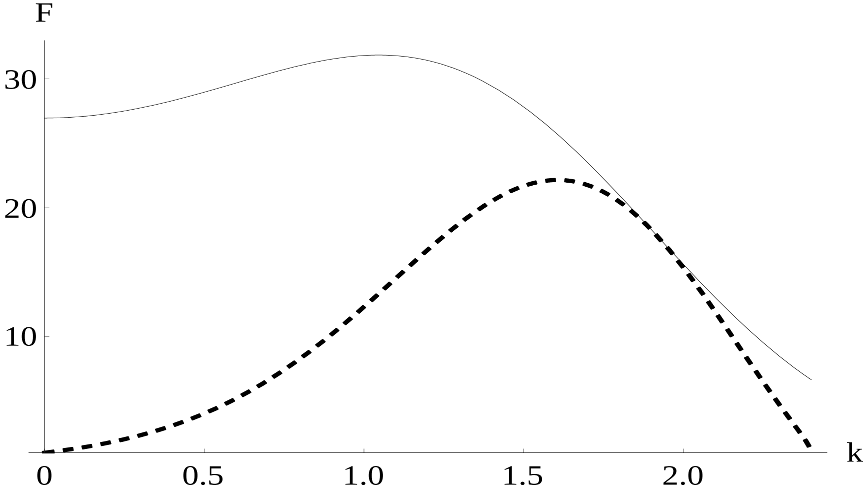
Точка экстремума из уравнения $\boxed{X^2-c(t)(n-1)X-n=0}$ Отсюда

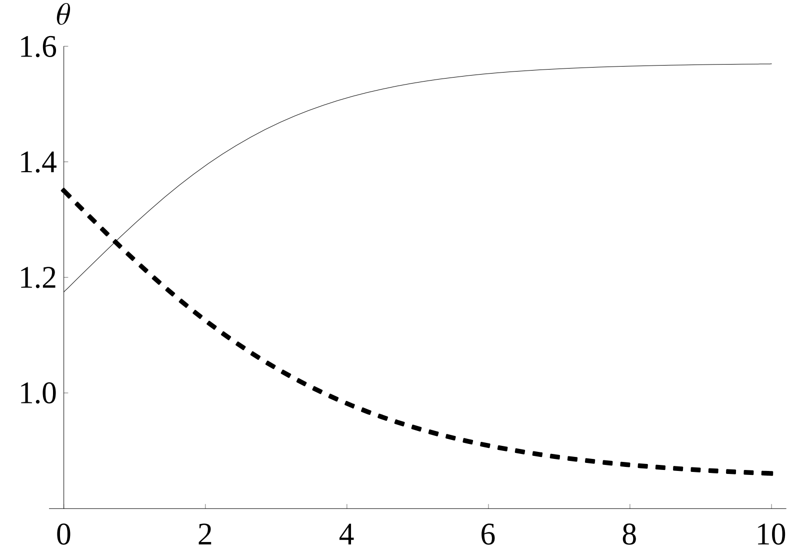
$$\boxed{X_{opt}=\delta^{-1}\mathrm{tg}(\theta_{opt}/2)=\frac{1}{2}\left(c(t)(n-1)+\sqrt{c^2(t)(n-1)^2+4n}\right)}$$

$$\boxed{F_{opt}-1=\frac{(n+1)c^2(t)}{1-c^2(t)}\left(1+\frac{1}{c(t)X_{opt}}\right)}$$

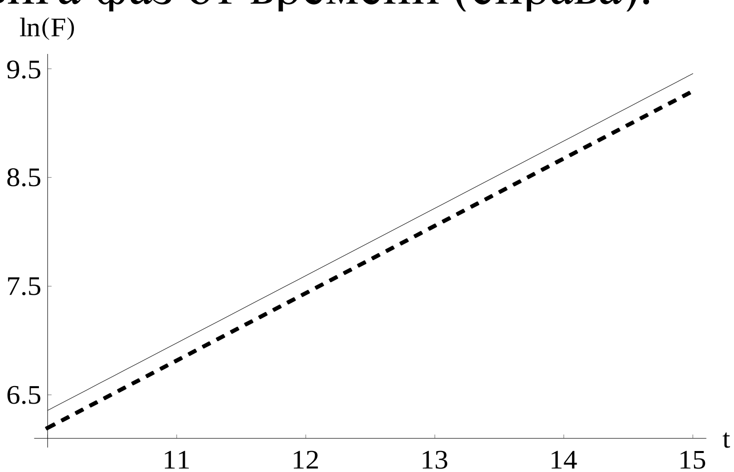
Оптимальные параметры зависят от времени оптимизации t и волнового числа k

Графические иллюстрации





Зависимости отношения энергий от волнового числа для оптимального возмущения и нормальной моды при t=2 (слева). Зависимости оптимального сдвига фаз от времени (справа).



Зависимости от времени отношения энергий для оптимального возмущения и нормальной моды

Другие нормы

Наряду с полной энергией, в качестве меры интенсивности возмущений можно использовать другие квадратичные функционалы (нормы).

$$G_1 = \frac{1}{2}\left\langle \psi_x^2 + \psi_z^2 \right\rangle \qquad G_2 = \frac{1}{2}\left\langle \psi_z^2 \right\rangle \qquad G_3 = \frac{1}{2}\left\langle \psi_x^2 \right\rangle$$

,

$$G_4 = \overline{\psi^2}^x\Big|_{z=0} + \overline{\psi^2}^x\Big|_{z=1} \qquad G_5 = \overline{\psi_z^2}^x\Big|_{z=0} + \overline{\psi_z^2}^x\Big|_{z=1}$$

Каждую из норм можно представить

,

$$G_i = f_i(k)\left(a^2 + b^2 - 2g_i(k)ab\cos\theta\right)$$

,

С учетом первых интегралов

,

$$dG_i / dt = 4 f_i(k)h_i(k)ab\sin\theta \qquad h_i(k) = \left(1-\alpha(k)g_i(k)\right)/\sinh k$$

Для возмущений с a=b скорость роста нормы

.

$$\gamma_i = \frac{1}{G_i}\frac{dG_i}{dt} = \frac{2h_i(k)\sin\theta}{1-g_i(k)\cos\theta}$$

Исследование на экстремум дает

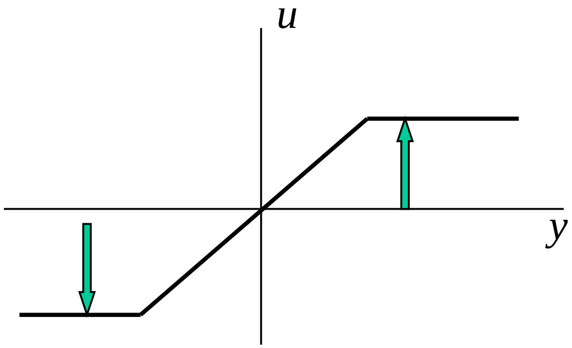
$$\cos\theta_{opt} = g_i(k) \qquad \gamma_{opt} = \gamma(k,\theta_{opt}) = \frac{2h_i(k)}{\sqrt{1-g_i^2(k)}}$$

Задача Релея о неустойчивости слоя сдвига

Свободный слой сдвига

$$\boxed{u_0 = \Lambda b}$$

$$\boxed{\bar{u} = u_0 \begin{cases} y/b, & |y| < b, \\ \mathrm{sgn}(y), & |y| > b \end{cases}}$$



Для этого профиля Релей (1880) определил диапазон неустойчивых волновых чисел , и показал, что длина волны с максимальной скоростью роста примерно в 8 раз превосходит ширину 2b сдвигового слоя.

Динамика возмущений описывается уравнением

$$\boxed{q'_t + \bar{u} q'_x = \mathrm{v}'\Lambda\big(\delta(y+b) - \delta(y-b)\big)} \qquad \boxed{q' = \psi'_{xx} + \psi'_{yy}}$$

Уравнению удовлетворяю возмущения с $\boxed{q' = 0}$

На скачках завихренности должны выполняться ГУ

$$\boxed{y = \pm b: \quad r_t \pm u_0 r_x = -2\Lambda \psi'_{\mathrm{x}}} \qquad \boxed{r = [\psi'_y]}$$ - скачок производной

Два представления решения

Комплексная форма

$$\psi' = -\frac{1}{2k}\left(Q_1(t)e^{-k|y+b|} + Q_2(t)e^{-k|y-b|}\right)e^{ikx}$$

Линейная система

$$i\frac{dQ_1}{dt} = kc_1 q_1 + \frac{\Lambda}{2}e^{-K}Q_2$$

$$i\frac{dQ_2}{dt} = kc_2 Q_2 - \frac{\Lambda}{2}e^{-K}Q_1$$

$$K = 2kb$$

Вещественная форма

$$Q_{1,2}(t) = q_{1,2}(t)e^{i\theta_{1,2}(t)}$$

$$\psi' = -\frac{1}{2k}\left(q_1(t)e^{-k|y+b|}\cos(kx+\theta_1(t)) + q_2(t)e^{-k|y-b|}\cos(kx+\theta_2(t))\right)$$

Нелинейная система для амплитуд и фаз

$$\frac{dq_1}{dt} = rq_2\sin\theta$$

$$\frac{dq_2}{dt} = rq_1\sin\theta$$

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\theta_+ = \theta_1 + \theta_2$$

$$r = 0.5\Lambda e^{-K}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -2r\left(\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1}\right)\cos\theta\right)$$

$$\frac{d\theta_+}{dt} = -r\left(\frac{q_1}{q_2} - \frac{q_2}{q_1}\right)\cos\theta$$

Начальные оптимальные возмущения

энергия
$$\boxed{E=\frac{1}{2}\left\langle \psi_x'^2+\psi_y'^2\right\rangle=\frac{b}{4K}\left(q_1^2(t)+q_2^2(t)+2e^{-K}q_1(t)q_2(t)\cos\theta(t)\right)}$$

Скорость роста энергии
$$\boxed{\gamma=\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}=2\Lambda K\,\frac{q_1q_2\sin\theta}{e^K(q_1^2+q_2^2)+2q_1q_2\cos\theta}}$$

Для возмущений с равными амплитудами
$$\boxed{\gamma=\frac{\Lambda K\sin\theta}{e^K+\cos\theta}}$$

Исследование на экстремум дает параметры оптим. возмущений
$$\boxed{\cos\theta_{opt}=-e^{-K}}\qquad \boxed{\gamma_{opt}=\gamma(k,\theta_{opt})=\Lambda K\left(e^{2K}-1\right)^{-1/2}}$$

Для растущих нормальны мод
$$\boxed{\gamma_n=2s(k)=\Lambda\left(e^{-2K}-(k-1)^2\right)^{1/2}}$$

Оптимальные возмущения растут быстрее
$$\boxed{\gamma_{opt}\geq\gamma_n}$$

Генерация барокл. волн начальными распределениями PV

Общее решение уравнения переноса PV $\left(\partial/\partial t + z\partial/\partial x\right)q = 0$ имеет вид

$q = q_i(x - zt, z)$ Описание динамики возмущений сводится к решению задачи

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = q_i(x - zt, z), \quad (1) \qquad z = 0,1: \quad \left(\partial/\partial t + z\partial/\partial x\right)\psi_z - \psi_x = 0.$$

Решение – сумма волнового и вихревого компонентов $\psi = \psi^{(\mathrm{v})}(x,z,t) + \psi^{(w)}(x,z,t)$

Вихревой компонент есть решение (1) с условиями $z = 0,1: \quad \psi_z = 0$

Волновой компонент есть решение уравнения Лапласа с условиями

$$z = 0,1: \quad \left(\partial/\partial t + z\partial/\partial x\right)\psi_z^{(w)} - \psi_x^{(w)} = \psi_x^{(\mathrm{v})}$$

Для начального распределения PV $q_i(x,z) = \Phi(z)\exp(ikx)$

$$\psi^{(\mathrm{v})} = \exp(ikx)\int_0^1 G(z,\xi)\Phi(\xi)\exp(-ik\xi t)\,d\xi \qquad G(z,\xi) = \frac{-1}{k\sinh k}\begin{cases} \cosh kz \cosh k(\xi - 1), & 0 < z < \xi, \\ \cosh k\xi \cosh k(z - 1), & \xi < z < 1 \end{cases}$$

Волновой компонент ищется в виде

$$\psi = \left(A(t)\frac{\mathrm{ch}(kz)}{k\,\mathrm{sh}k} - B(t)\frac{\mathrm{ch}k(z-1)}{k\,\mathrm{sh}k} \right) e^{ikx}$$

Определение волнового компонента

Подстановка в ГУ дает неоднородную систему

$$\boxed{i\frac{d\mathbf{r}}{dt} = S\mathbf{r} + \mathbf{f}}\quad \boxed{\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix}}\quad \boxed{\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}}\quad \boxed{S = \begin{pmatrix} k - \mathrm{cth}k & \mathrm{sh}^{-1}k \\ -\mathrm{sh}^{-1}k & \mathrm{cth}k \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{f_1 = r\int_0^1 \cosh k\xi \Phi(\xi) e^{-ik\xi t} d\xi}\quad \boxed{f_2 = r\int_0^1 \cosh k(\xi - 1)\Phi(\xi) e^{-ik\xi t} d\xi}$$

Далее случай сингулярного распределения PV $\boxed{\Phi(z) = a_v \delta(z - h)}$

Вихревой компонент $\boxed{\psi^{(v)} = a_v G(z, h) e^{i(kx - \omega_v \tau)}}$ $\boxed{\omega_v = kh}$

Описывает волну непрерывного спектра (вихревую волну)

Волновой компонент находится из системы с правыми частями

$$\boxed{f_1 = a_v r \cosh(kh)\exp(i\theta_v(t))}\quad \boxed{f_2 = a_v r \cosh(k(h-1))\exp(i\theta_v(t))}\quad \boxed{\theta_v(t) = -\omega_v t}$$

Используя представление $\boxed{A = a(t)e^{i\theta_2(t)}}$ $\boxed{B = b(t)e^{i\theta_1(t)}}$ система

формулируется для вещественных амплитуд и фаз

Результаты анализа общей задачи для возмущений

1. Начальное сингулярное распределение PV возбуждает вихревую волну (моду сплошного спектра) и пару пограничных бароклинных волн (ERWs).

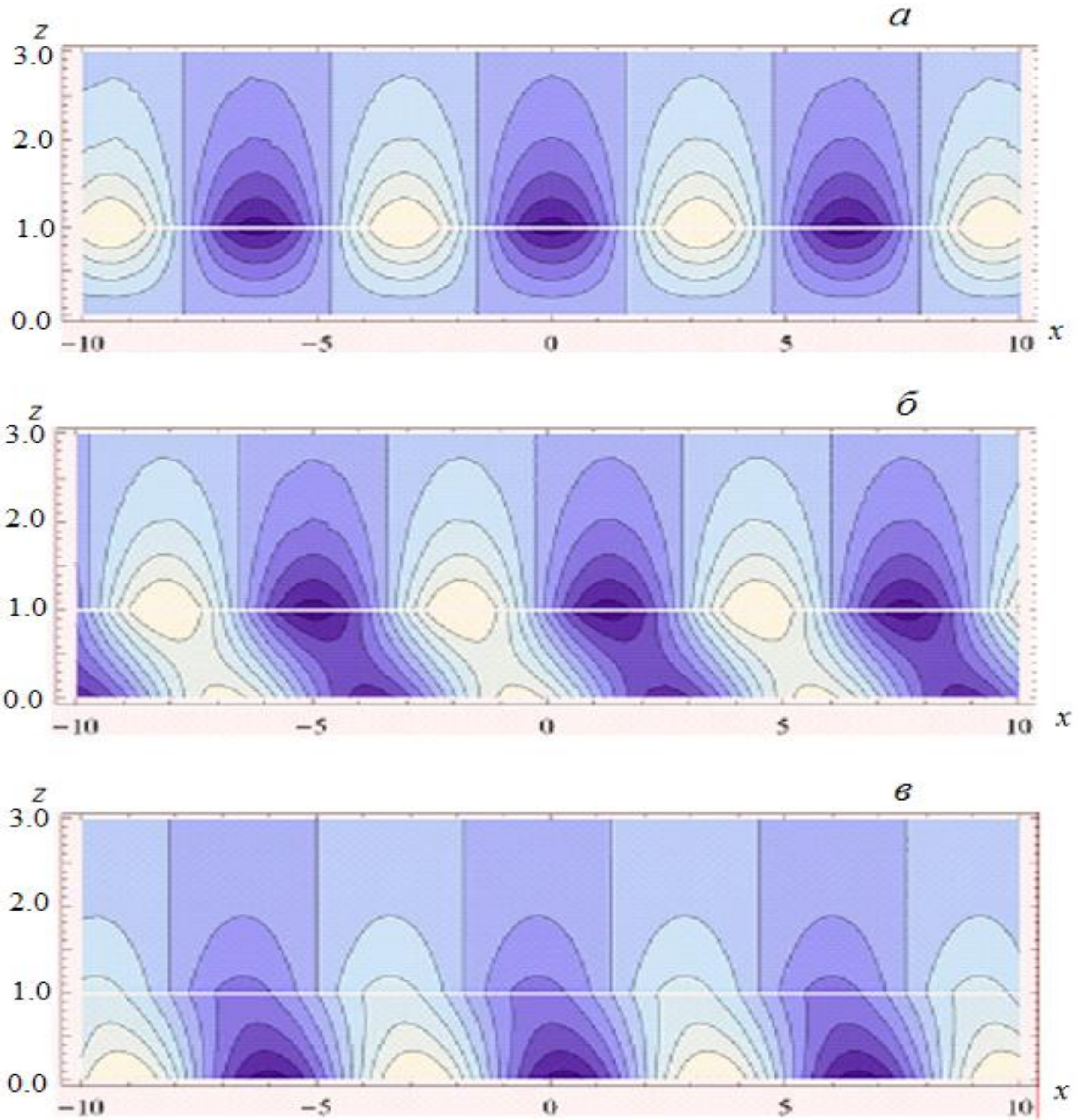
2. При определенных соотношениях между фазами волн реализуется оптимальное возбуждения с максимумом скорости роста энергии. Параметры оптимального возбуждения находятся аналитически.

3. В режиме нейтральных волн имеет место эффект резонансного возбуждения, при котором амплитуда бароклинных волн нарастает по линейному закону. Это происходит при условии совпадения частот ERWs с частотой вихревой волны.

4. В случае разрывных распределений PV наблюдается квазирезонансное возбуждение ERWs с логарифмическим ростом амплитуды.

5. Гладкие начальные распределения PV возбуждают волны конечной амплитуды.

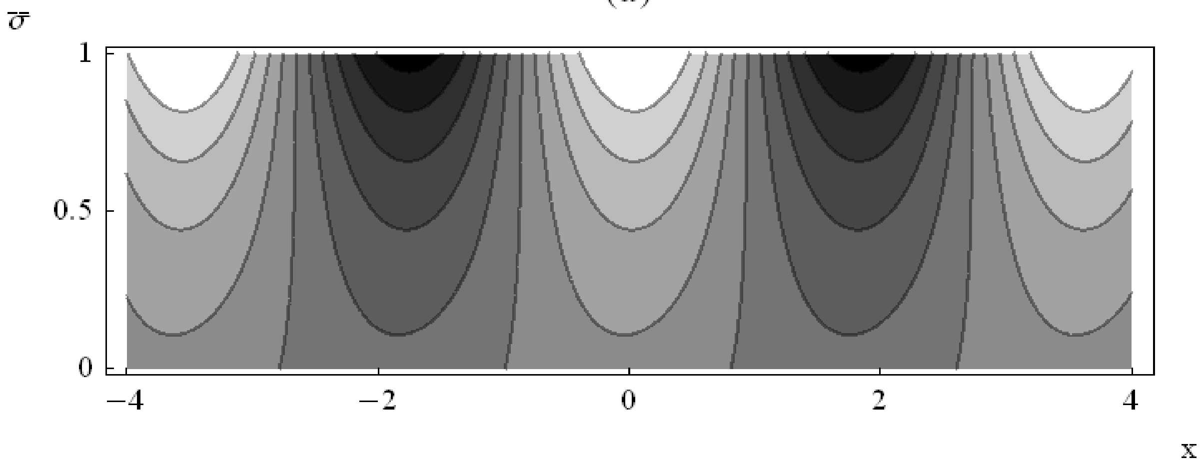
Резонансное возбуждение бароклинных волн сингулярным распределением PV



Циклогенез типа Б

Циклогенез типа Б – генерация приземных циклонов верхнетропосферными возмущениями

(а)



(в)