XXVI научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике

18-19 декабря 2017 г., Москва

Коэффициенты нелинейных искажений наблюдаемых, определяемых вырожденным уравнением Дуффинга

Е. С. Алексеева, А. Э. Рассадин

Нижегородское математическое общество

Рассмотрим задачу Коши для вырожденного уравнения Дуффинга:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = 0 \qquad x(0) = A \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

Она имеет точное решение: $$x(t) = A \cdot cn\left[A \cdot t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Его период: $$T = 4 \cdot \mathrm{K}\left(1/\sqrt{2}\right)/A = 7{,}416/A$$

$\mathrm{K}\left(1/\sqrt{2}\right)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода

Поэтому оно может быть разложено в ряд Фурье:

$$x(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot A}{\mathrm{K}\left(1/\sqrt{2}\right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ch^{-1}\left[\frac{\pi \cdot (2 \cdot n - 1)}{2}\right] \cdot \cos\left[(2 \cdot n - 1) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right]$$

Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Коэффициент нелинейных искажений (КНИ) для величины x(t):

$$K[x] = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2}}{x_1} = \sqrt{2 \cdot \frac{\overline{x^2}}{x_1^2} - 1}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x^2(t) \cdot dt$$

— среднее за период квадрата величины x(t)

$$K[x] = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot ch^2 \frac{\pi}{2} - 1} \approx 0{,}0451$$

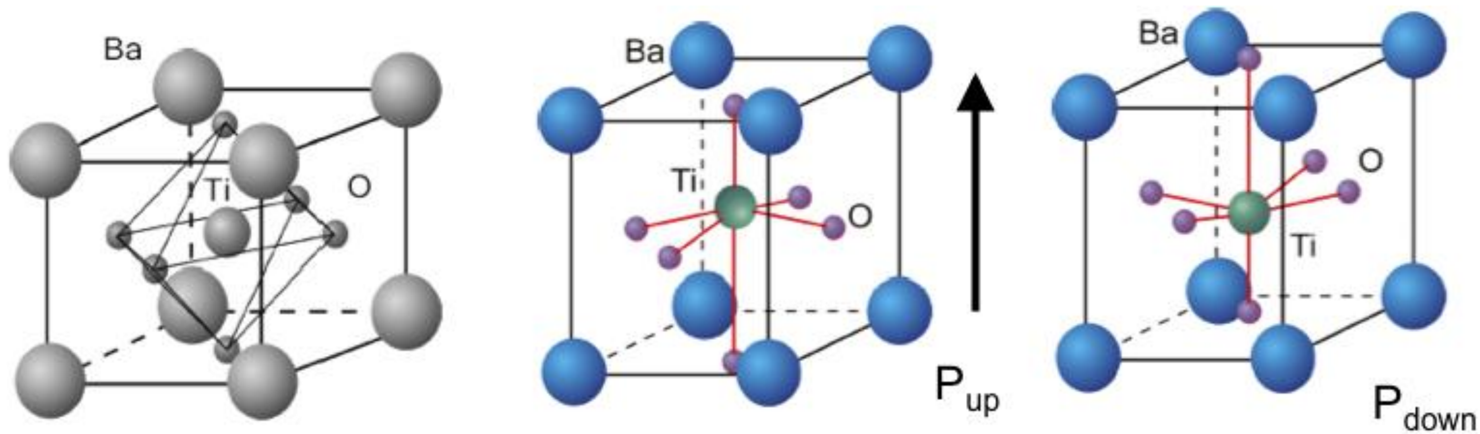
КНИ не зависит от амплитуды колебаний A!

$$K[\dot{x}] = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot \pi^4} \cdot \mathrm{K}^4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot ch^2 \frac{\pi}{2} - 1} \approx 0{,}1356$$

$$K[\ddot{x}] = \sqrt{\frac{24}{5 \cdot \pi^5} \cdot \mathrm{K}^4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot ch^2 \frac{\pi}{2} - 1} \approx 0{,}4086$$

Применение полученных результатов: исследование справедливости теории Ландау фазовых переходов 2-го рода для сегнетоэлектриков в непосредственной близости к температуре Кюри

cubic paraelectric phase   BaTiO3   tetragonal ferroelectric phase



В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 15, 739 (1945)

$$\tilde{\Phi} = a(T - T_c) \cdot P^2 + B \cdot P^4 - E \cdot P - \frac{E^2}{8 \cdot \pi}$$

Для плоского конденсатора, заполненного сегнетоэлектриком:

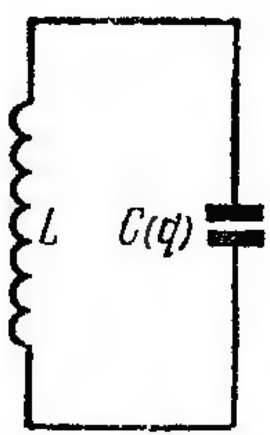
$$E = 2 \cdot a(T - T_c) \cdot P + 4 \cdot B \cdot P^3 \qquad E = \frac{U}{d} \qquad P = \frac{q}{A}$$

В непосредственной близости к температуре Кюри сегнетоэлектрика напряжение между обкладками:

$$U = \beta \cdot q^3$$

Как в этом убедиться? Собрать колебательный контур с сегнетоэлектриком, поместить его в термостат с температурой Кюри сегнетоэлектрика и измерить его КНИ по току и по напряжению!

$$\beta = \frac{4 \cdot B \cdot d}{A^3}$$

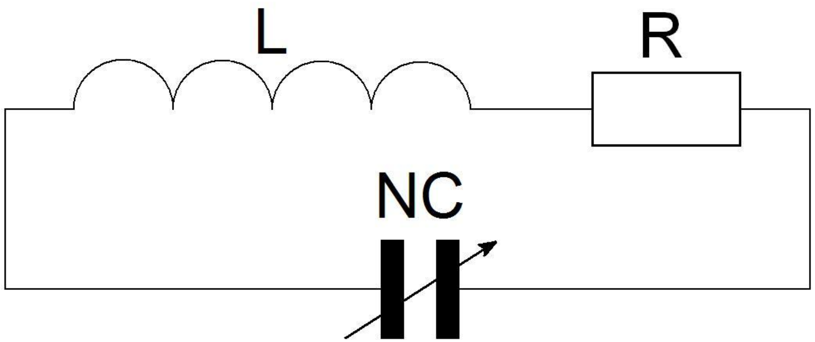


$$\frac{dq}{dt} \Leftrightarrow \dot{x}$$ **— ток**

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \beta \cdot q^3 = 0$$

$$-L \cdot \frac{d^2 q}{dt^3} \Leftrightarrow -\ddot{x}$$ **— напряжение**

Учёт малого сопротивления в таком контуре



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\cdot\delta\cdot\frac{dx}{dt} + x^3 = 0$$

$$0 < \delta << 1$$

Усредним по периоду невозмущённых колебаний скорость изменения электрической энергии в контуре:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) = -2\cdot\delta\cdot\dot{x}^2$$

Уравнение для медленного изменения амплитуды колебаний в контуре:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{2\cdot\delta}{3}\cdot A \qquad A(t) = A_0\cdot\exp\left[-\frac{2\cdot\delta\cdot t}{3}\right]$$

$$x_{as}(t) = A(t)\cdot cn\left[\theta(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

— асимптотическое решение вырожденного уравнения Дуффинга с слабым линейным трением

$$\frac{d\theta}{dt} = A(t) \qquad \theta(t) = \frac{3\cdot A_0}{2\cdot\delta}\cdot\left(1-\exp\left[-\frac{2\cdot\delta\cdot t}{3}\right]\right)$$

Поскольку для невозмущённого уравнения КНИ по x очень мал:

$$K[x] \approx 0{,}0451$$

то для инженерных приложений в этом асимптотическом решении достаточно учитывать только первую гармонику в разложении эллиптического косинуса в ряд Фурье:

$$x_{as}(t) \approx 0{,}955\cdot A(t)\cdot\cos\theta(t)$$

Суммирование числовых рядов вида (k=0,1,2,…):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot n - 1)^{2k}}{ch^2\left[\frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot n - 1)\right]}$$

Например, в силу равенства Парсеваля для x(t):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ch^2\left[\frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot n - 1)\right]} = \frac{1}{2 \cdot \pi}$$

БЛАГОДАРИМ ЗА ВНИМАНИЕ!