

Симметрия распределения тензора  
скоростей деформации в несжимаемом  
изотропном турбулентном потоке.

А.В. Копьев

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

# Введение

Тензор градиентов скорости

$u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_0) + A_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2)$  - разложение скорости потока в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$

$A_{ij}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$  - тензор градиентов скорости

# Введение

Тензор градиентов скорости

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_0) + A_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \quad - \text{ разложение скорости потока в окрестности точки } \mathbf{x}_0$$

$$A_{ij}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad - \text{ тензор градиентов скорости}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

# Введение

Тензор градиентов скорости

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_0) + A_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \quad - \text{ разложение скорости потока в окрестности точки } \mathbf{x}_0$$

$$A_{ij}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad - \text{ тензор градиентов скорости}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = S_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{ijm}\omega_m$$

# Введение

## Тензор градиентов скорости

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_0) + A_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \quad - \text{ разложение скорости потока в окрестности точки } \mathbf{x}_0$$

$$A_{ij}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad - \text{ тензор градиентов скорости}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = S_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{ijm}\omega_m$$

вектор завихренности  
↙

# Введение

## Тензор градиентов скорости

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}_0) + A_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \quad - \text{ разложение скорости потока в окрестности точки } \mathbf{x}_0$$

$$A_{ij}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad - \text{ тензор градиентов скорости}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = S_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{ijm}\omega_m$$

тензор скоростей деформации ↘      вектор завихренности ↙

# Введение

Независимые инварианты вращения тензора скоростей деформации

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) = S_{ji}$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & -S_{11} - S_{22} \end{pmatrix}$$

# Введение

Независимые инварианты вращения тензора скоростей деформации

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) = S_{ji}$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & -S_{11} - S_{22} \end{pmatrix}$$

# Введение

Независимые инварианты вращения тензора скоростей деформации

Первая система инвариантов

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) = S_{ji}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

Вторая система инвариантов

$\lambda_1$  - максимальное собственное значение

$\lambda_3$  - минимальное собственное значение

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & -S_{11} - S_{22} \end{pmatrix}$$

Третья система инвариантов

$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

# Введение

Независимые инварианты вращения тензора скоростей деформации

Первая система инвариантов

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) = S_{ji}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

Вторая система инвариантов

$\lambda_1$  - максимальное собственное значение

$\lambda_3$  - минимальное собственное значение

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & -S_{11} - S_{22} \end{pmatrix}$$

Третья система инвариантов

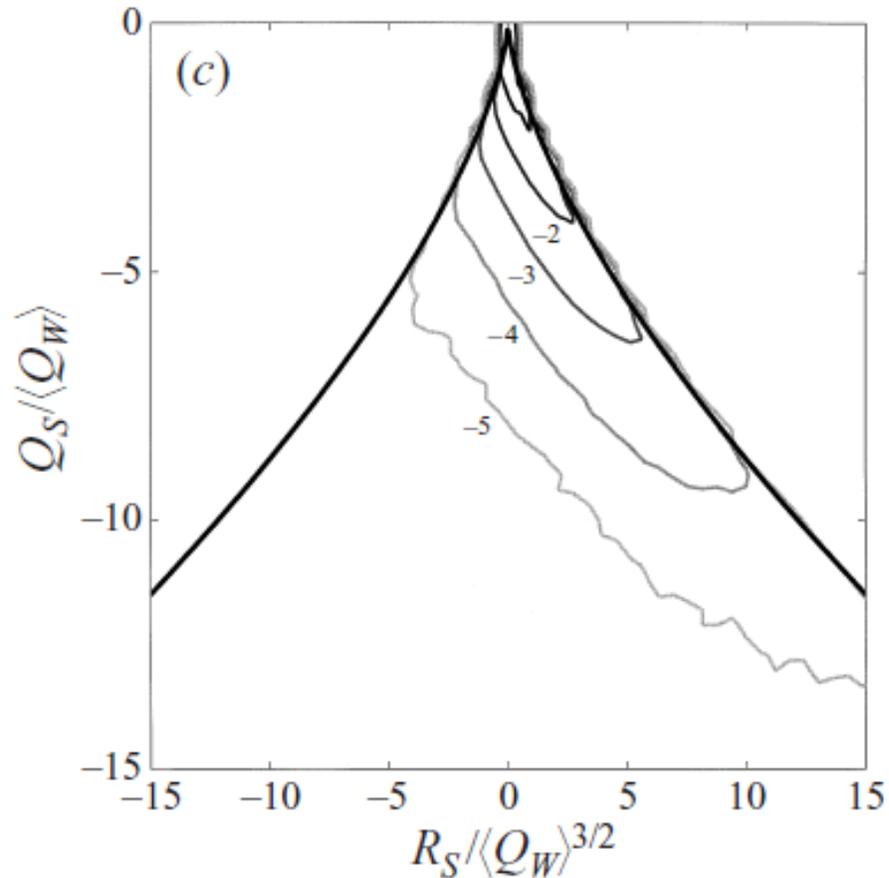
$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

Статистика тензора скоростей деформации в **изотропном** случае **полностью** определяется статистикой его инвариантов вращения

# Введение

Функция распределения системы инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$  (DNS)



$$Q_S = -\frac{1}{2} S_{im} S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3} S_{im} S_{mn} S_{ni}$$

Ooi et al 1999, JFM

# Введение

Независимые инварианты вращения тензора скоростей деформации

Первая система инвариантов

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) = S_{ji}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

Вторая система инвариантов

$\lambda_1$  - максимальное собственное значение

$\lambda_3$  - минимальное собственное значение

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & -S_{11} - S_{22} \end{pmatrix}$$

Третья система инвариантов

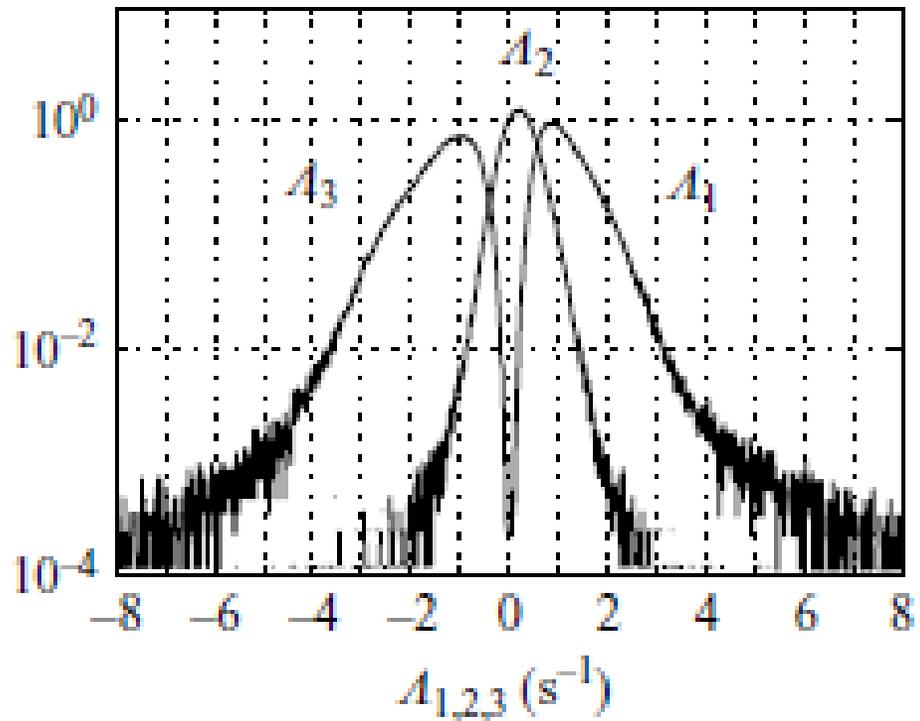
$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

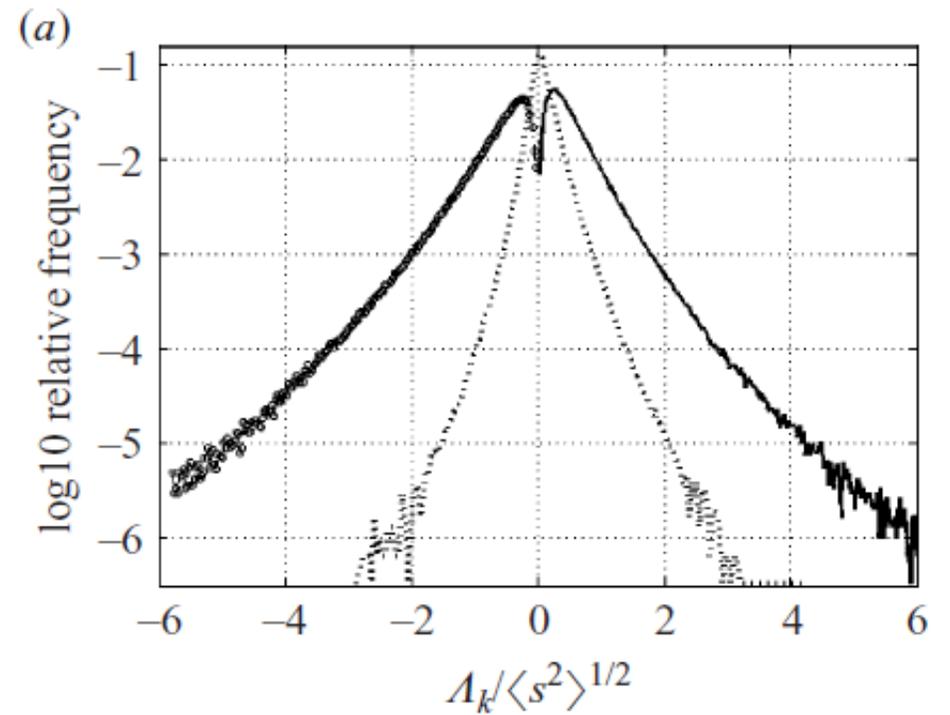
Статистика тензора скоростей деформации в **изотропном** случае **полностью** определяется статистикой его инвариантов вращения

# Введение

Одиночные функции распределения собственных значений (EXP)



Luthi et al 2005, JFM



Gulitski et al 2007, JFM

# Введение

Независимые инварианты вращения тензора скоростей деформации

Первая система инвариантов

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) = S_{ji}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

Вторая система инвариантов

$\lambda_1$  - максимальное собственное значение

$\lambda_3$  - минимальное собственное значение

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & -S_{11} - S_{22} \end{pmatrix}$$

Третья система инвариантов

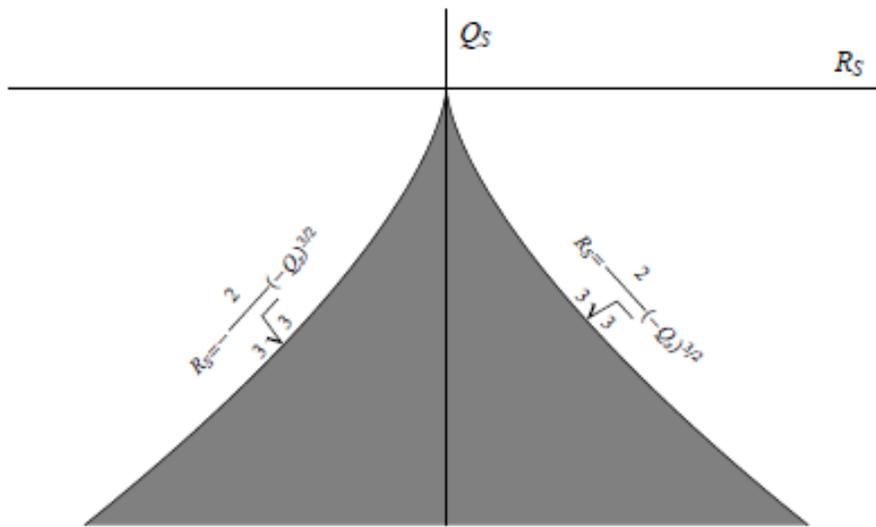
$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

Статистика тензора скоростей деформации в **изотропном** случае **полностью** определяется статистикой его инвариантов вращения

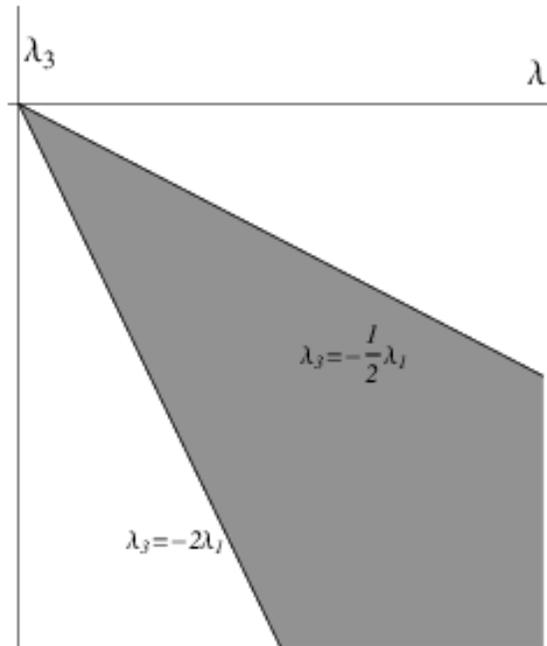
# Введение

Области определения различных систем инвариантов вращения



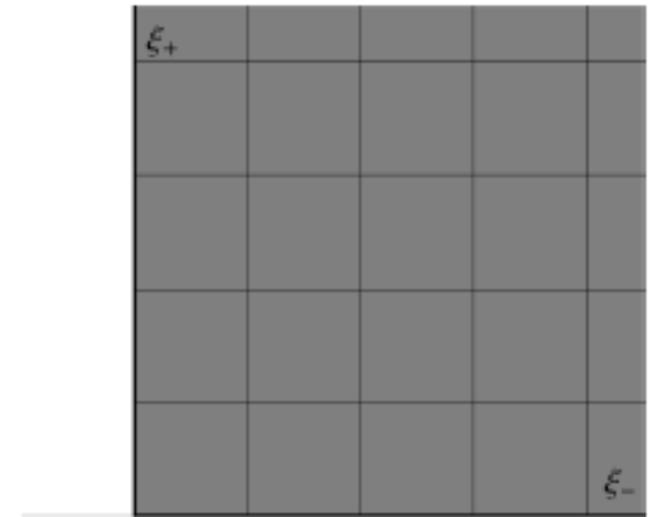
$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$



$\lambda_1$  - максимальное собственное значение

$\lambda_3$  - минимальное собственное значение

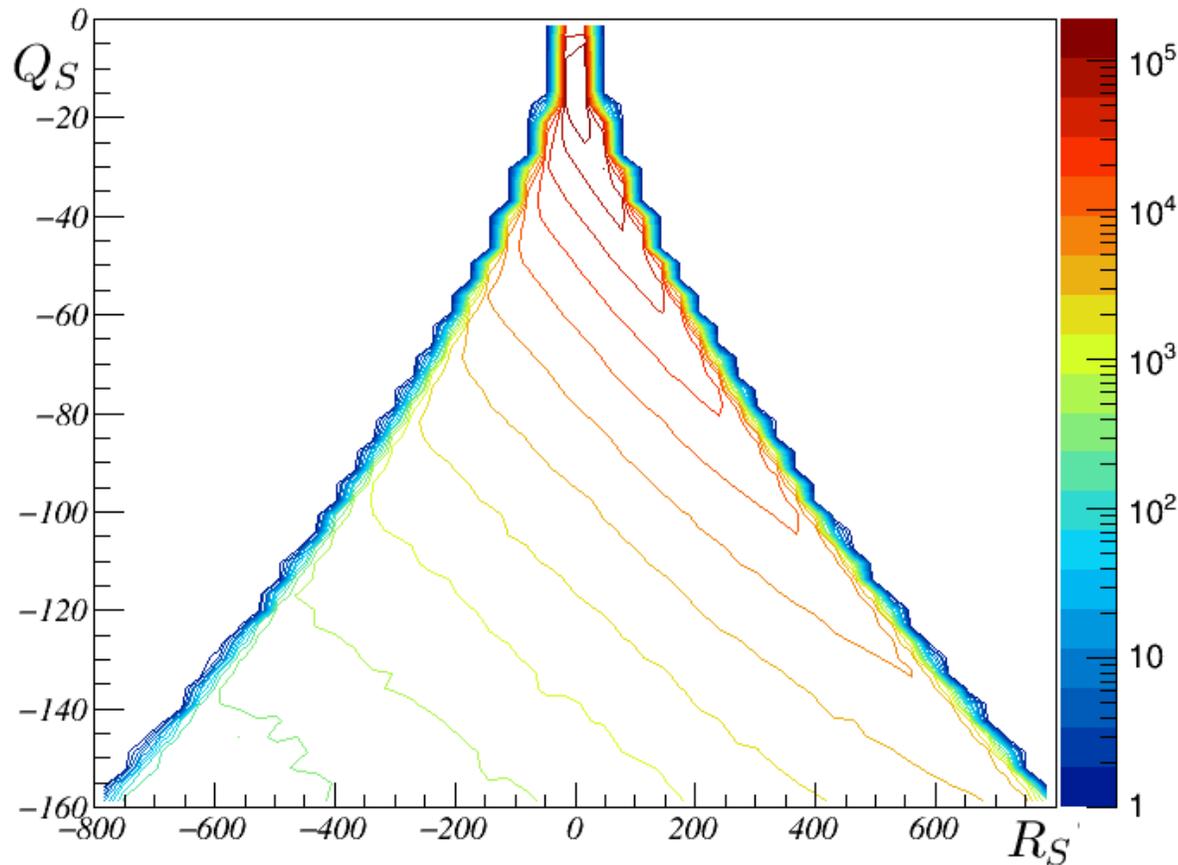


$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S$$

# Введение

Функции распределения различных систем инвариантов вращения



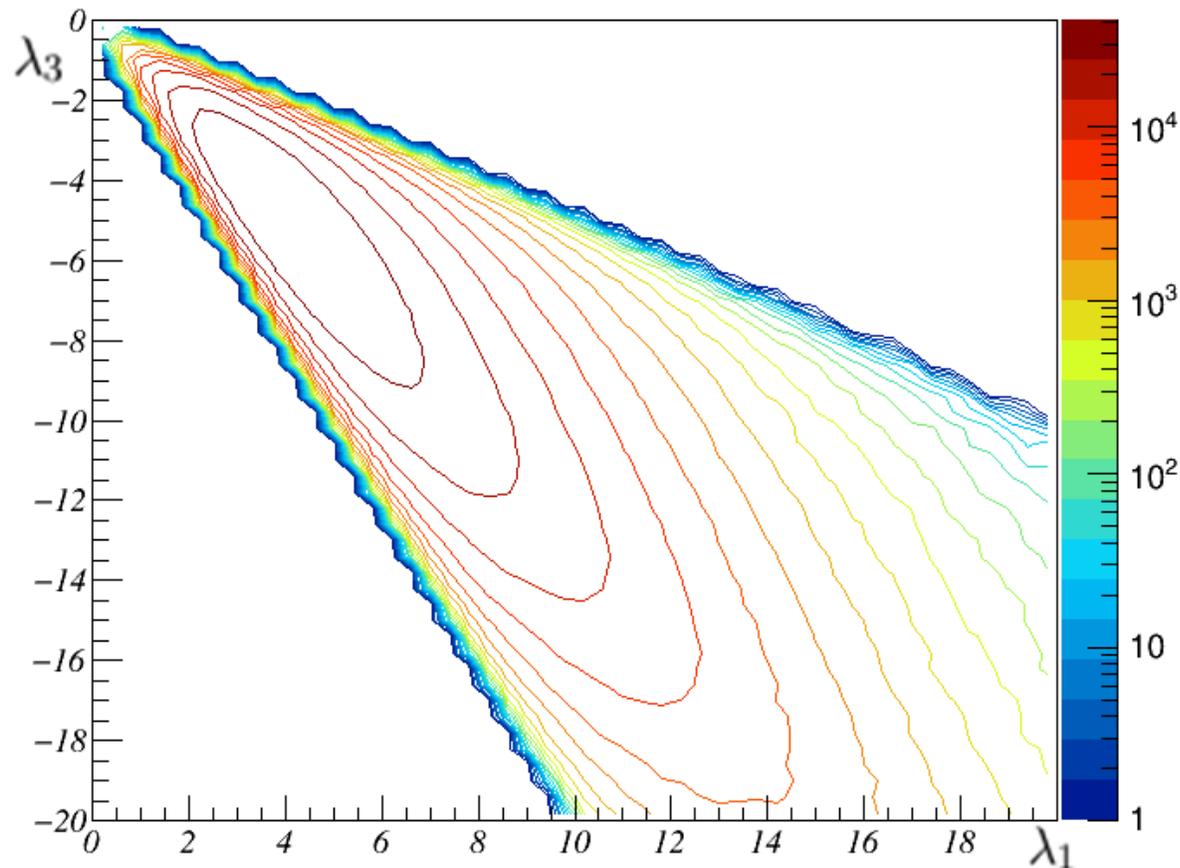
$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

# Введение

Функции распределения различных систем инвариантов вращения

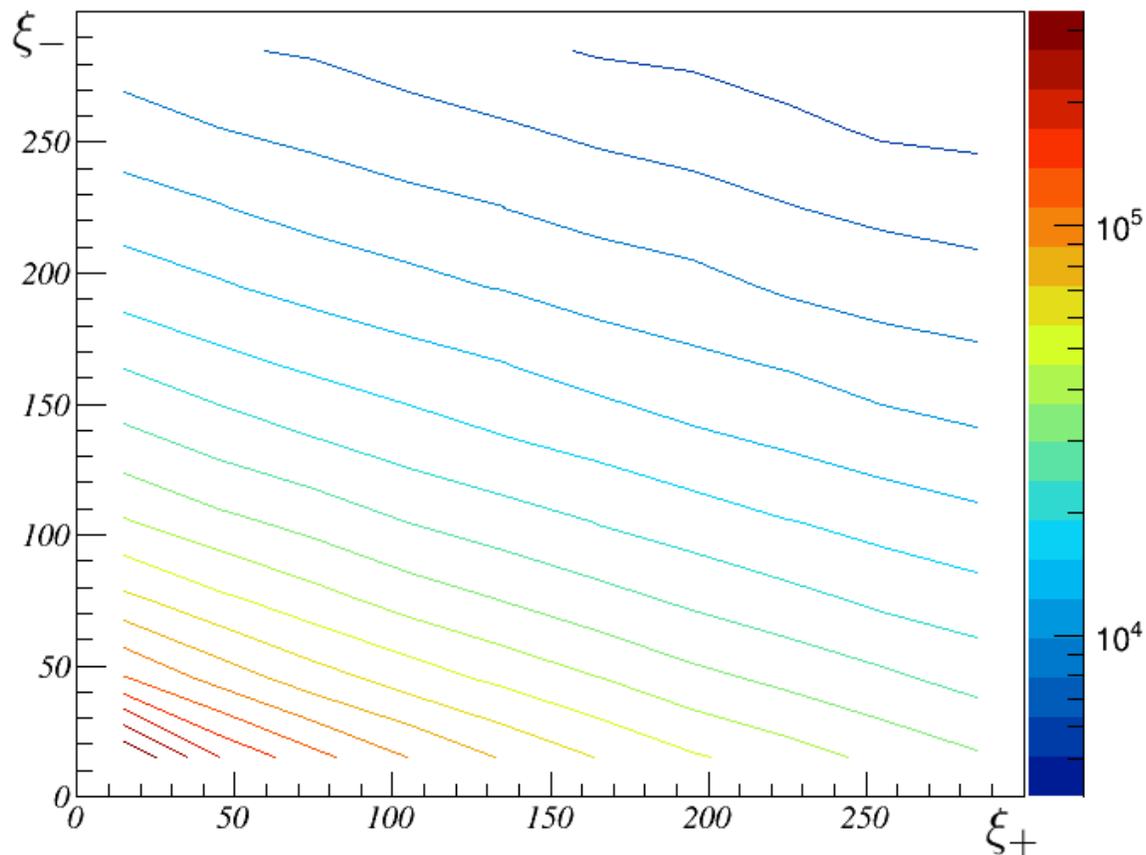


$\lambda_1$  - максимальное собственное значение  
 $\lambda_3$  - минимальное собственное значение

Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

# Введение

Функции распределения различных систем инвариантов вращения



$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} R_S$$
$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} R_S$$

- 1) Новые инварианты гораздо удобнее для обработки данных и дают более точную статистическую информацию
- 2) Наблюдается симметрия функции распределения этих инвариантов

Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

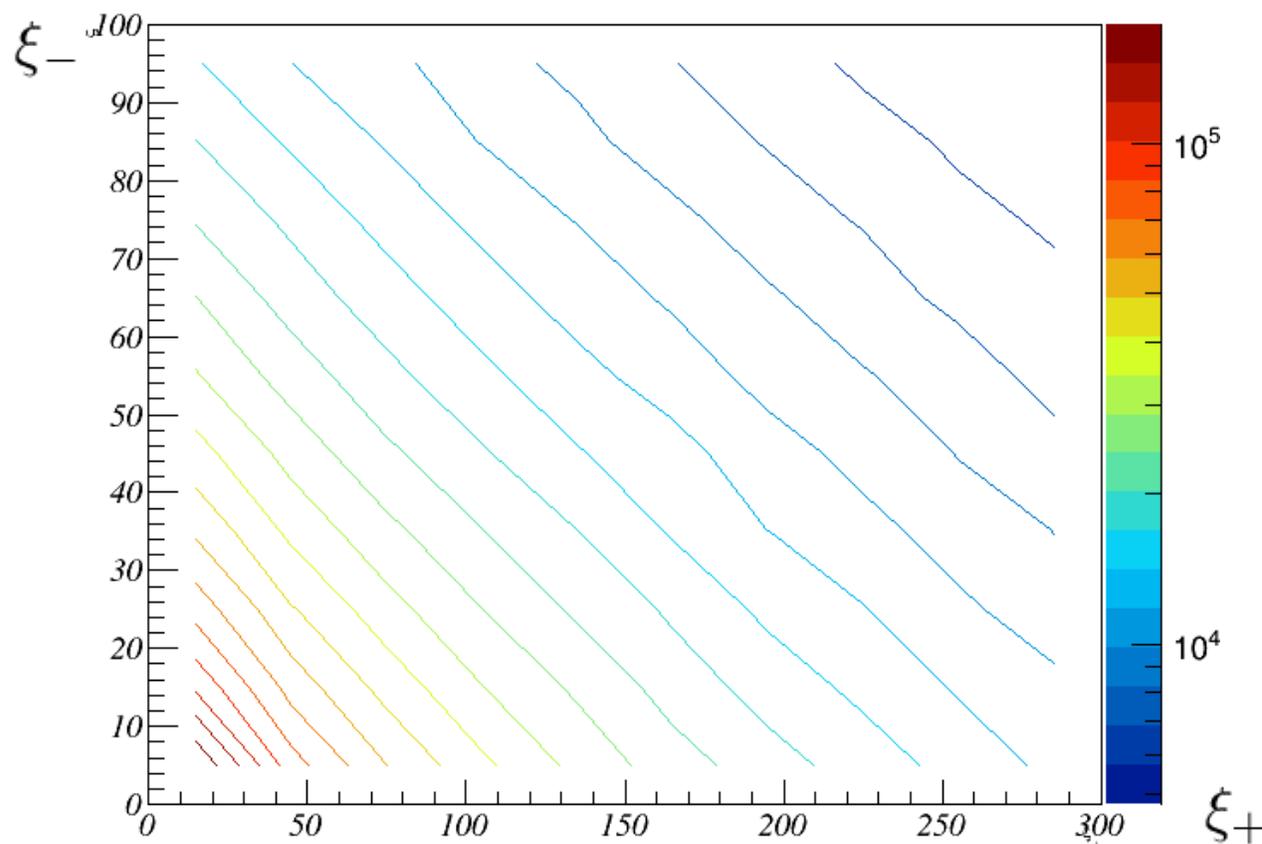
# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при увеличении масштаба

# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при увеличении масштаба

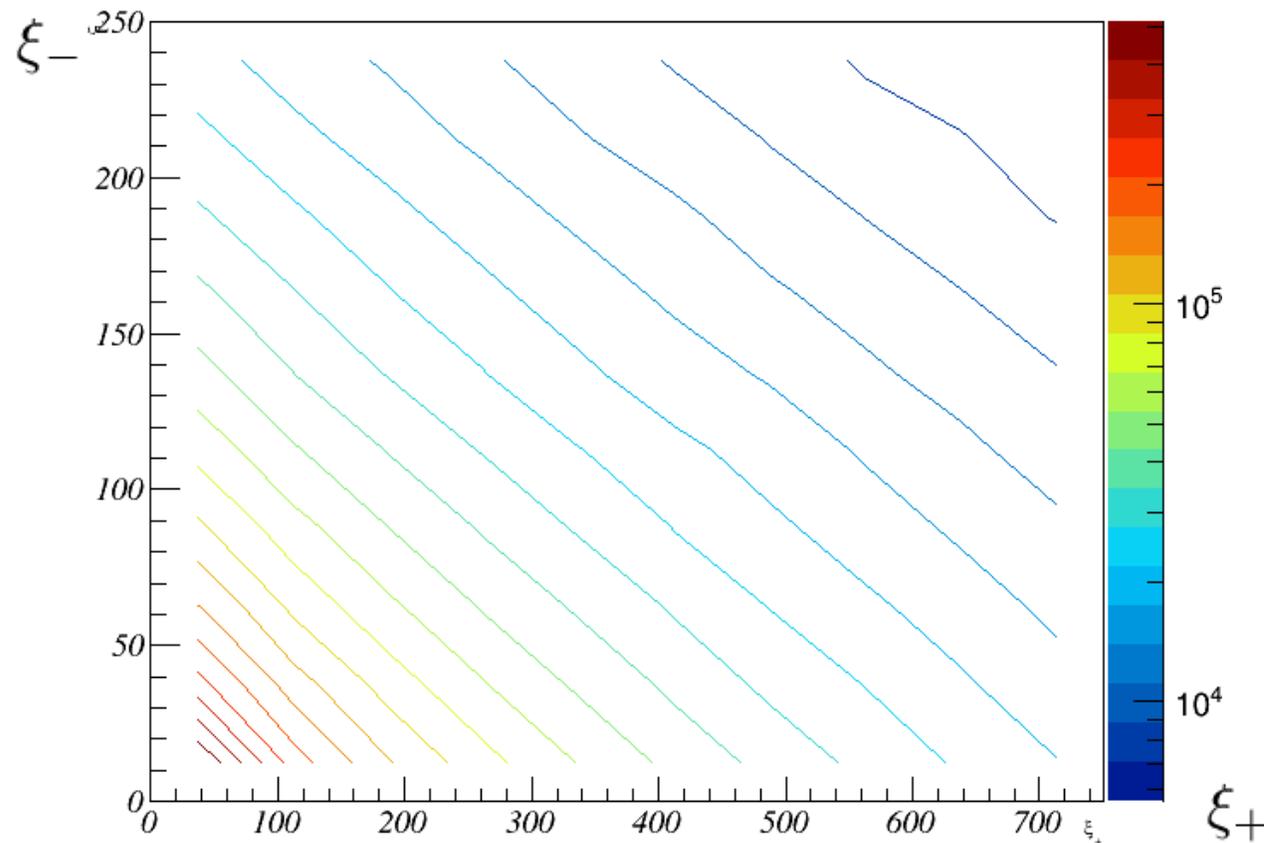
Линии уровня  
скошены



Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

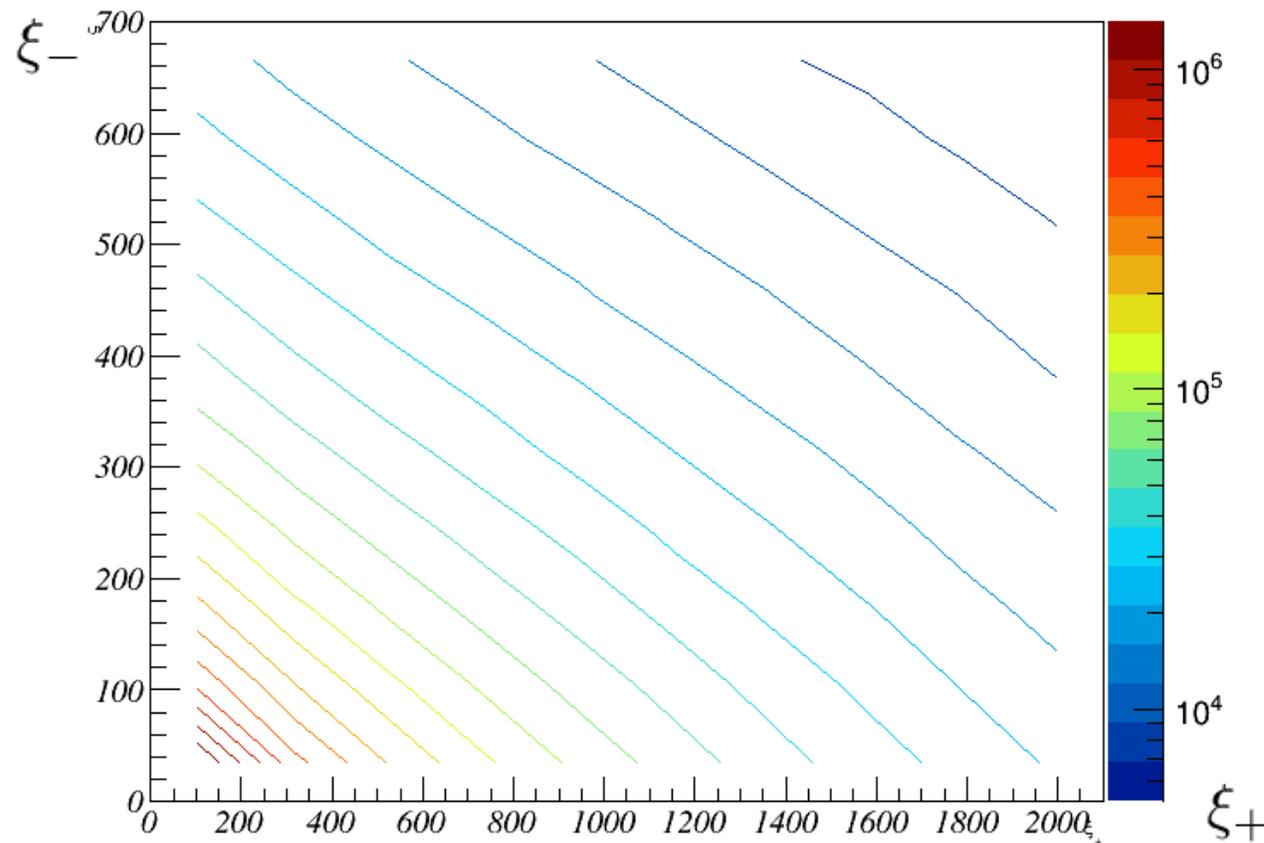
Поведение при увеличении масштаба



Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при увеличении масштаба

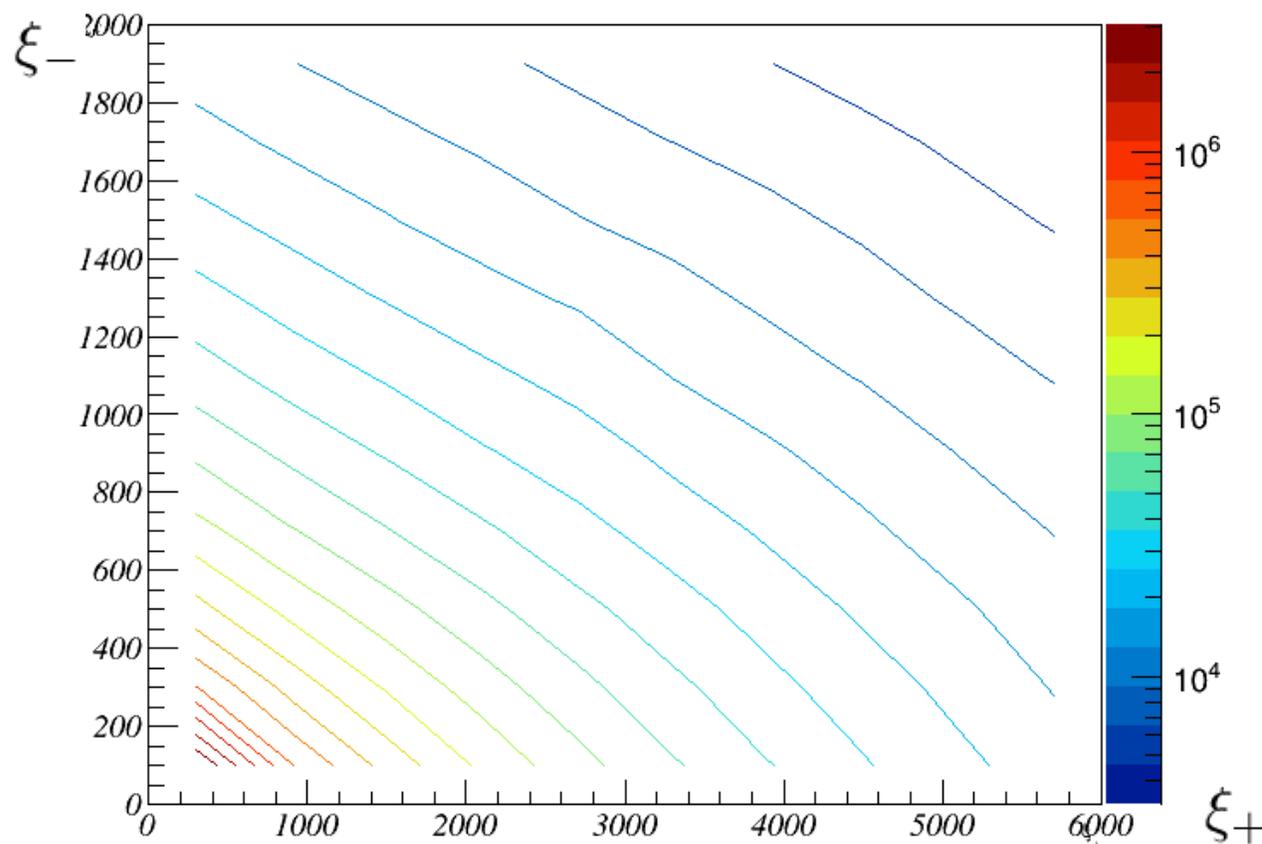


Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при увеличении масштаба

Линии уровня  
выгибаются



Data obtained from  
the JHTDB

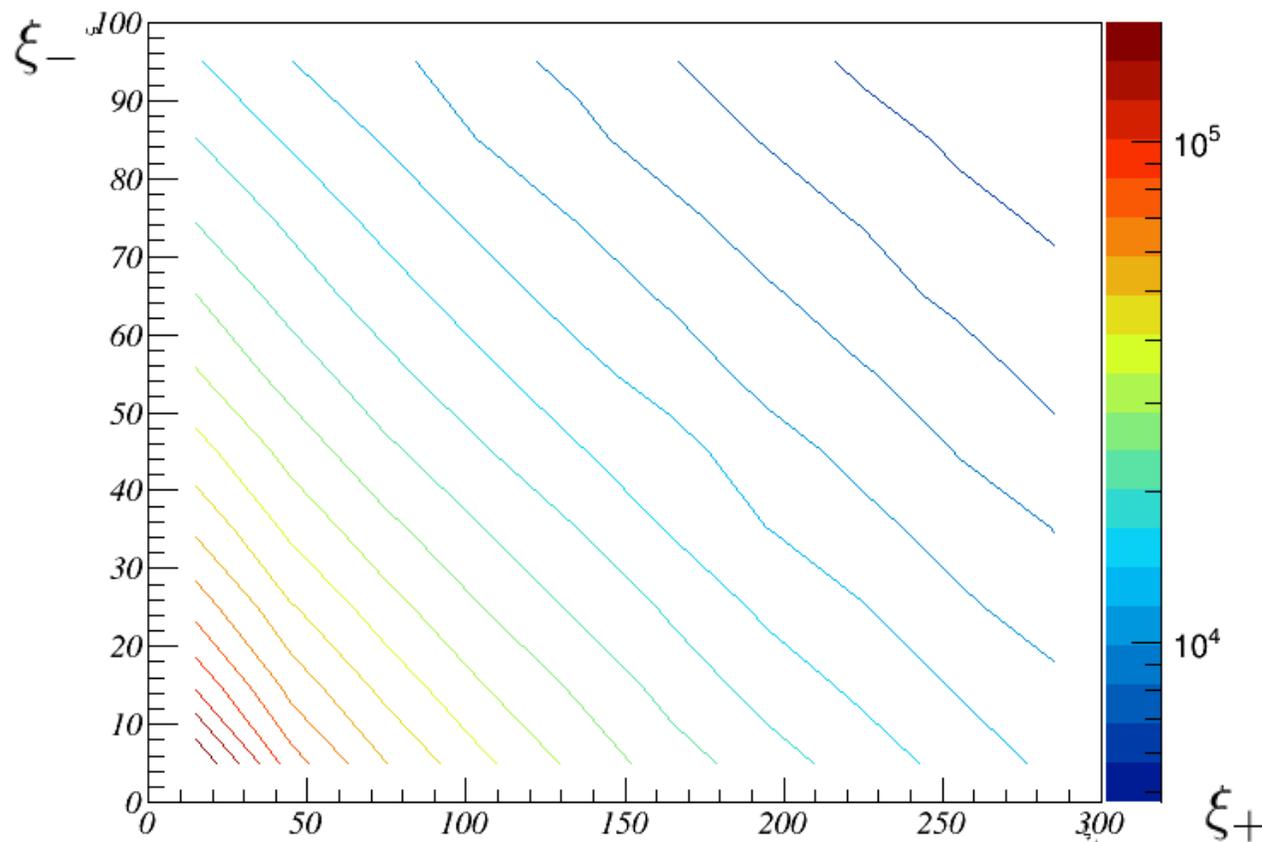
# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при уменьшении масштаба

# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при уменьшении масштаба

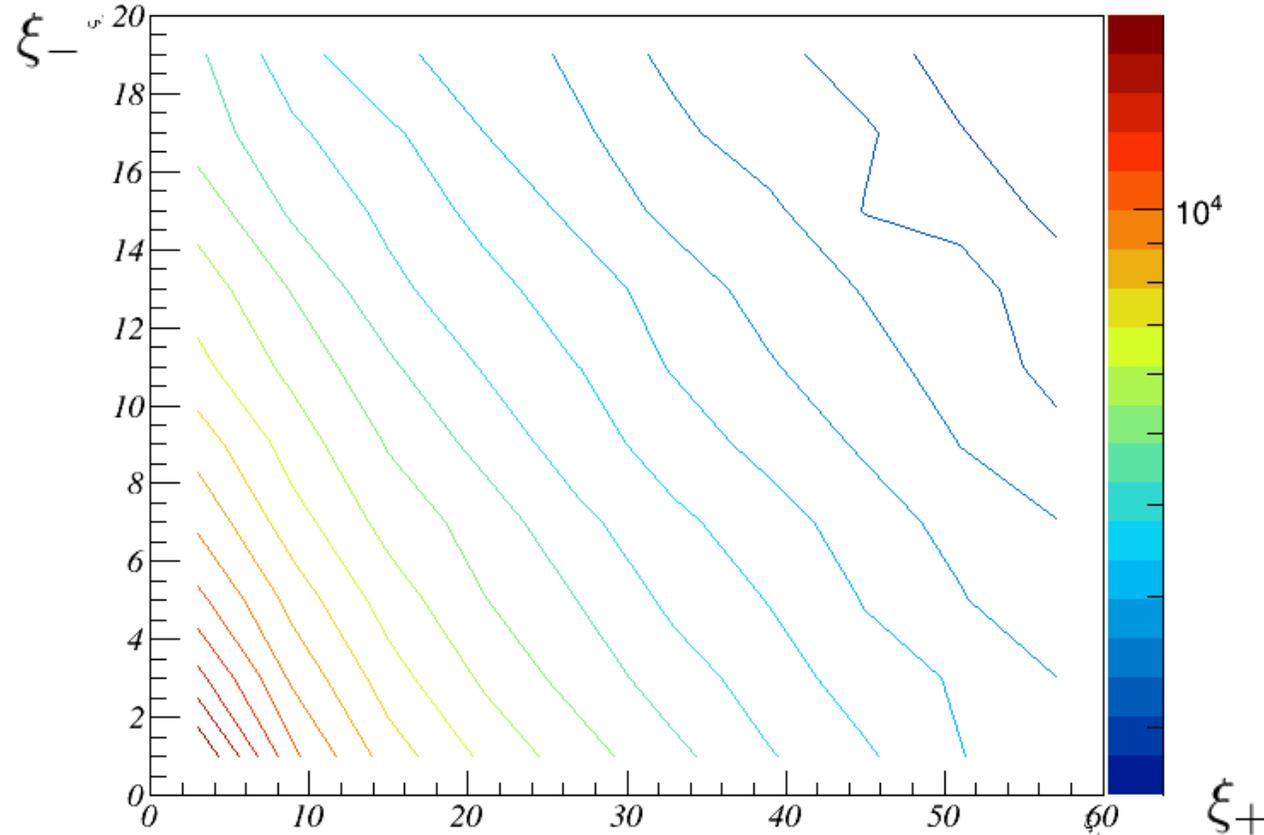
Линии уровня  
скошены



Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

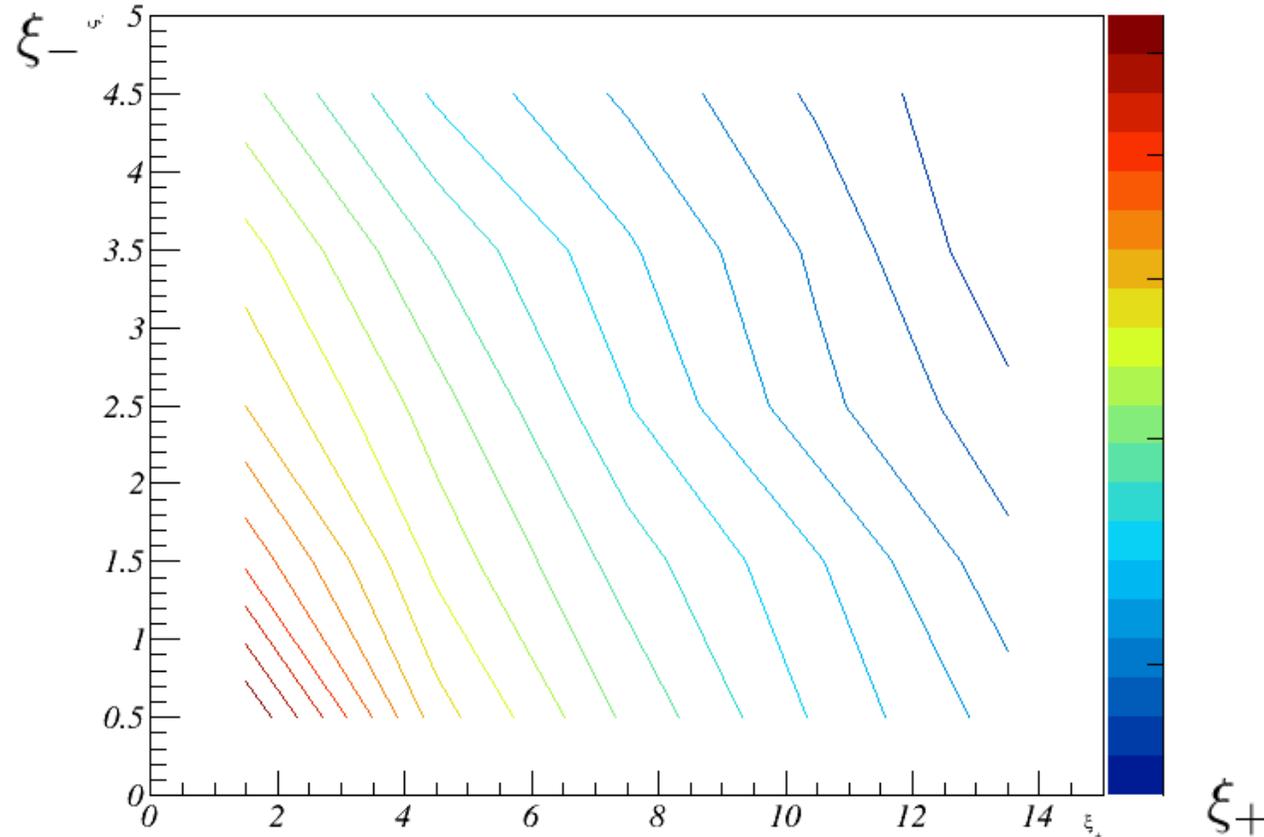
Поведение при уменьшении масштаба



Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при уменьшении масштаба

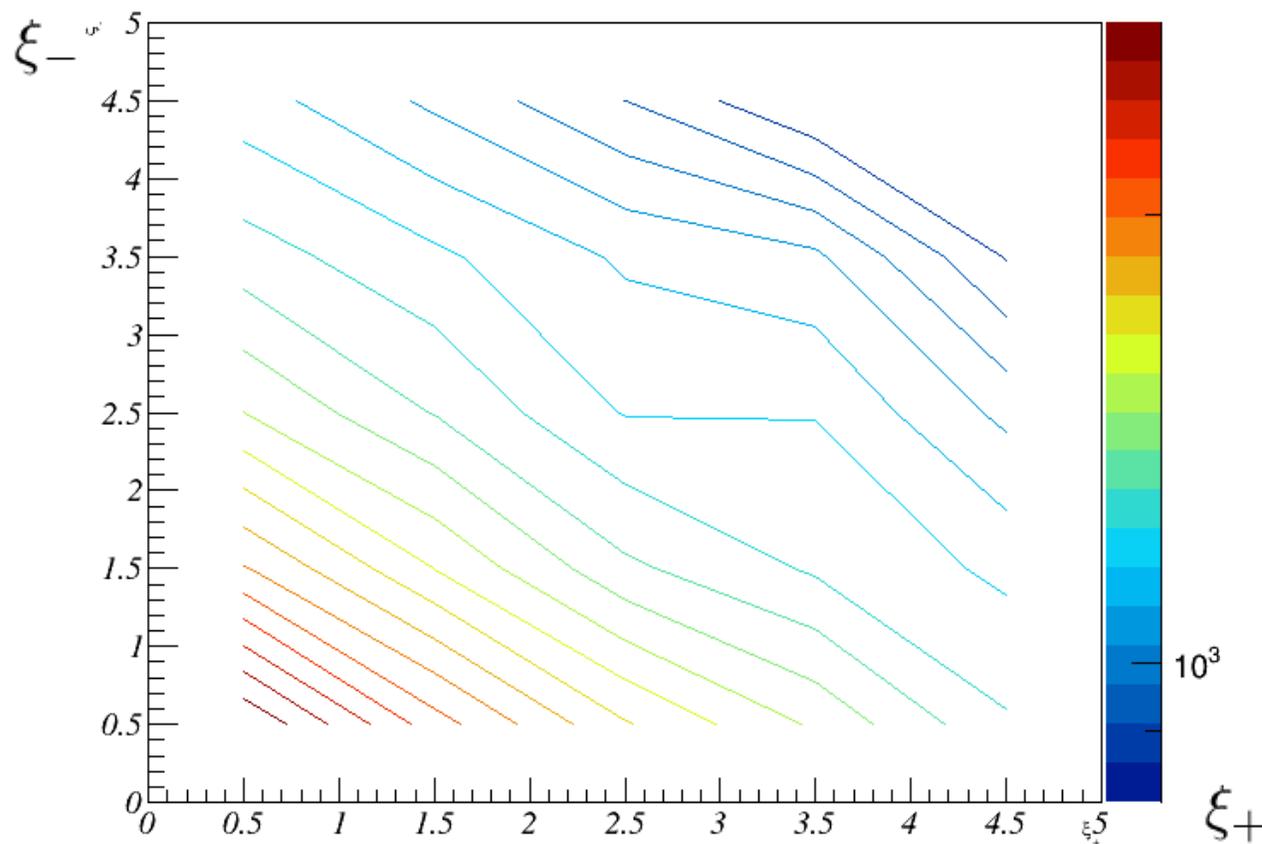


Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при уменьшении масштаба

Линии уровня  
симметричны

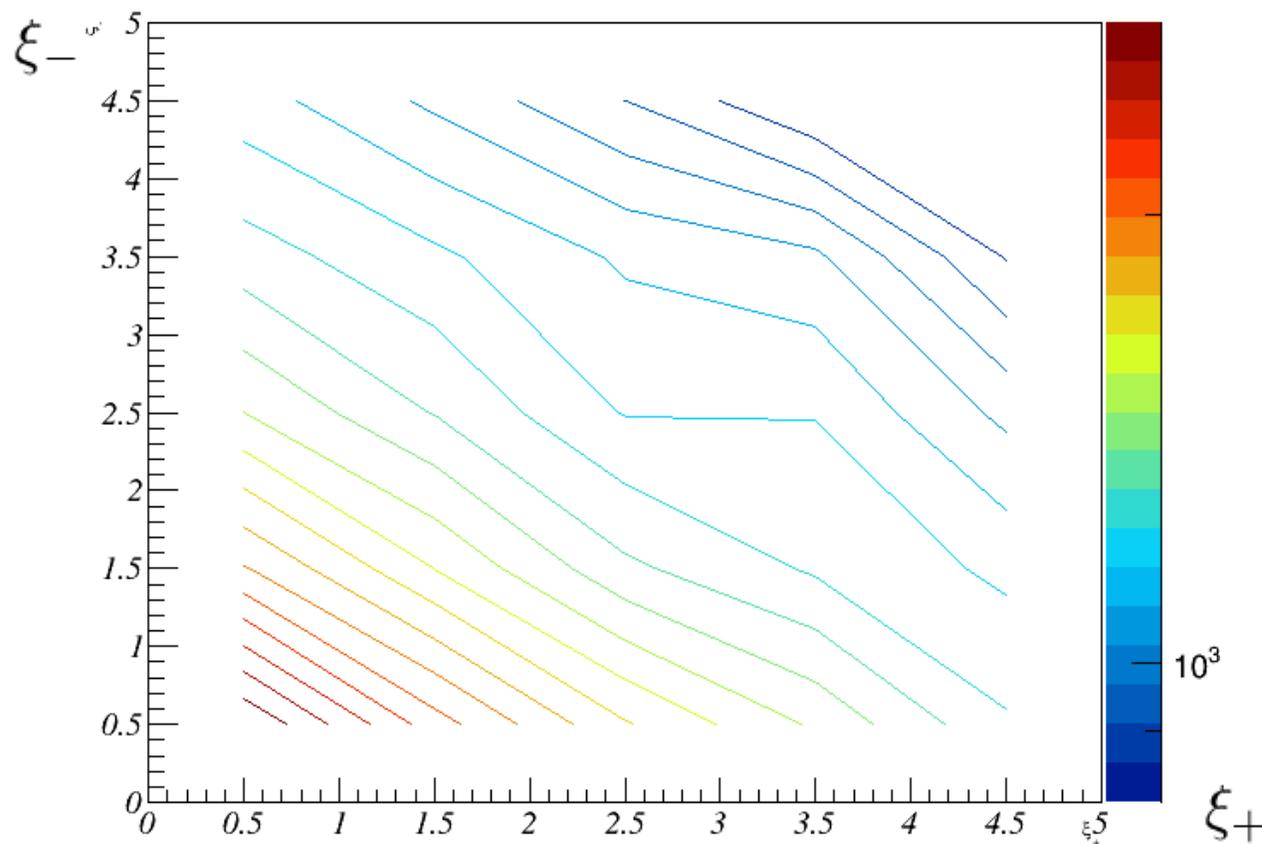


Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

Поведение при уменьшении масштаба

Линии уровня  
симметричны



Data obtained from  
the JHTDB

# Симметрия распределения инвариантов

Аналитическое выражение симметрии

# Симметрия распределения инвариантов

Аналитическое выражение симметрии

Инвариант, отвечающий симметрии

$$\xi_a = \frac{1+a}{2}\xi_+ + \frac{1-a}{2}\xi_- = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}a}{2}R_S$$

# Симметрия распределения инвариантов

Аналитическое выражение симметрии

Инвариант, отвечающий симметрии

$$\xi_a = \frac{1+a}{2}\xi_+ + \frac{1-a}{2}\xi_- = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}a}{2}R_S$$

Симметрия функции распределения инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$

$$f_{\xi_+\xi_-}(x_+, x_-) = f\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right)$$

# Симметрия распределения инвариантов

Аналитическое выражение симметрии

Инвариант, отвечающий симметрии

$$\xi_a = \frac{1+a}{2}\xi_+ + \frac{1-a}{2}\xi_- = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}a}{2}R_S$$

Симметрия функции распределения инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$

$$f_{\xi_+\xi_-}(x_+, x_-) = f\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right)$$



Симметрия функции распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2}(-q)^{1/2} f\left((-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}ar\right)$$

# Симметрия распределения инвариантов

Аналитическое выражение симметрии

Инвариант, отвечающий симметрии

$$\xi_a = \frac{1+a}{2}\xi_+ + \frac{1-a}{2}\xi_- = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}a}{2}R_S$$

Симметрия функции распределения инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$

$$f_{\xi_+\xi_-}(x_+, x_-) = f\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right)$$



Симметрия функции распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2} (-q)^{1/2} f\left((-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} ar\right)$$

Параметр  
симметрии

$a$  — ?

# Определение параметра симметрии $a$

Безразмерный инвариант тензора скоростей деформации

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}} \in [-1; 1]$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения тензора скоростей деформации (относительные скорости растяжения/сжатия)

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

# Определение параметра симметрии $\alpha$

Безразмерный инвариант тензора скоростей деформации

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}} \in [-1; 1]$$

Инвариант  $s$  однозначно определяет отношение собственных значений, но ничего не говорит об их абсолютной величине

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения тензора скоростей деформации (относительные скорости растяжения/сжатия)

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

# Определение параметра симметрии $\alpha$

Безразмерный инвариант тензора скоростей деформации

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}} \in [-1; 1]$$

Инвариант  $s$  однозначно определяет отношение собственных значений, но ничего не говорит об их абсолютной величине



$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения тензора скоростей деформации (относительные скорости растяжения/сжатия)

Он определяет форму, которую стремится принять изначально сферическая жидкая частица, например,

$$s = 1 \Rightarrow \text{диск}$$

$$s = -1 \Rightarrow \text{нить}$$

и ничего не говорит о скорости, с которой частица приобретает такую форму

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

# Определение параметра симметрии $\alpha$

Безразмерный инвариант тензора скоростей деформации

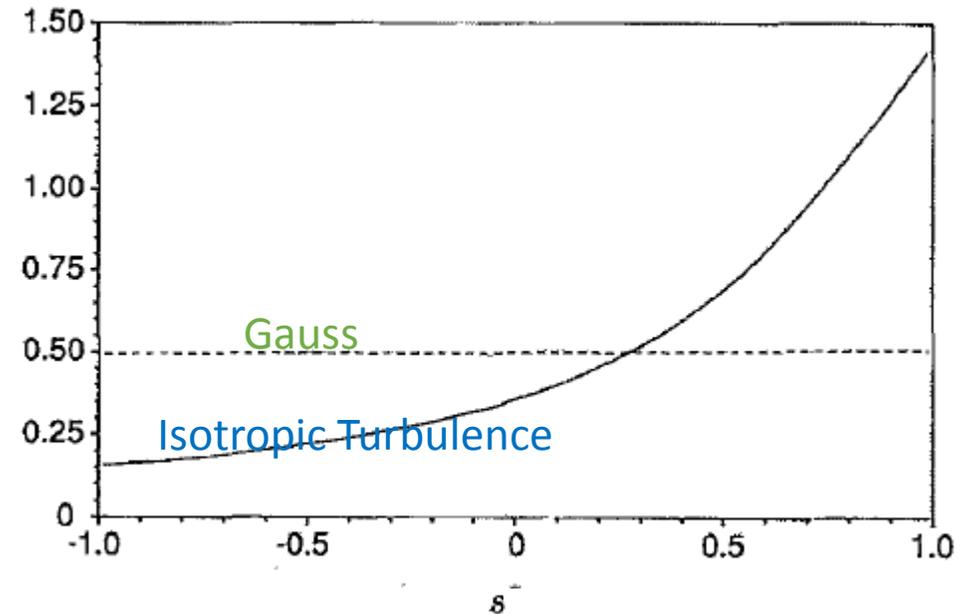
$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}} \in [-1; 1]$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения тензора скоростей деформации (относительные скорости растяжения/сжатия)

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$

Функция распределения инварианта  $s$  (DNS)



Lund and Rogers 1994, Phys. Fluids

# Определение параметра симметрии $\alpha$

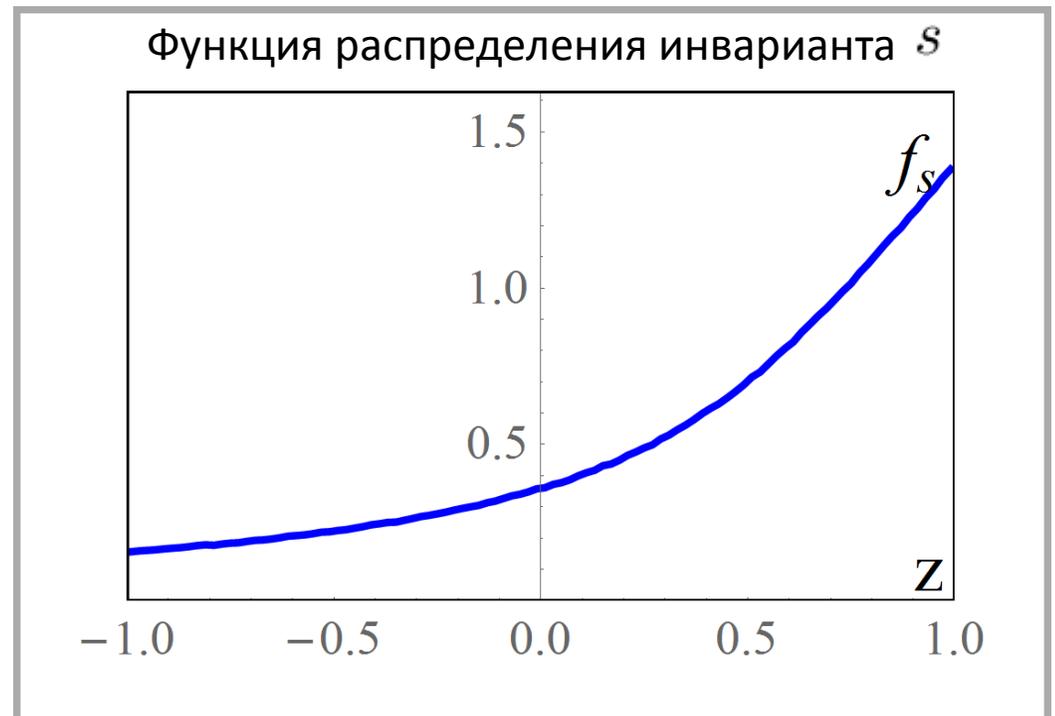
Безразмерный инвариант тензора скоростей деформации

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}} \in [-1; 1]$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – собственные значения тензора скоростей деформации (относительные скорости растяжения/сжатия)

$$Q_S = -\frac{1}{2}S_{im}S_{mi}$$

$$R_S = -\frac{1}{3}S_{im}S_{mn}S_{ni}$$



Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

# Определение параметра симметрии $\alpha$

Симметрия и безразмерный инвариант  $S$

# Определение параметра симметрии $\alpha$

Симметрия и безразмерный инвариант  $S$

Интегральное преобразование для функции распределения  $f_S$   
безразмерного инварианта

$$f_S(z) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{Q_S R_S} \left( -t^2, t^3 \frac{2z}{3\sqrt{3}} \right) t^4 dt$$

$f_{Q_S R_S}$  – функция распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

# Определение параметра симметрии $a$

## Симметрия и безразмерный инвариант $S$

Интегральное преобразование для функции распределения  $f_S$   
безразмерного инварианта

$$f_S(z) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{Q_S R_S} \left( -t^2, t^3 \frac{2z}{3\sqrt{3}} \right) t^4 dt$$

$f_{Q_S R_S}$  – функция распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

Симметрия функции распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2} (-q)^{1/2} f \left( (-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} ar \right)$$

# Определение параметра симметрии $a$

## Симметрия и безразмерный инвариант $S$

Интегральное преобразование для функции распределения  $f_s$  безразмерного инварианта

$$f_s(z) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{Q_S R_S} \left( -t^2, t^3 \frac{2z}{3\sqrt{3}} \right) t^4 dt$$

$f_{Q_S R_S}$  – функция распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

Симметрия функции распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2} (-q)^{1/2} f \left( (-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} ar \right)$$

Функция распределения определяется **однозначно**

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}$$

# Определение параметра симметрии $a$

Метод наименьших квадратов для определения параметра

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}$$

# Определение параметра симметрии $a$

Метод наименьших квадратов для определения параметра

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}$$

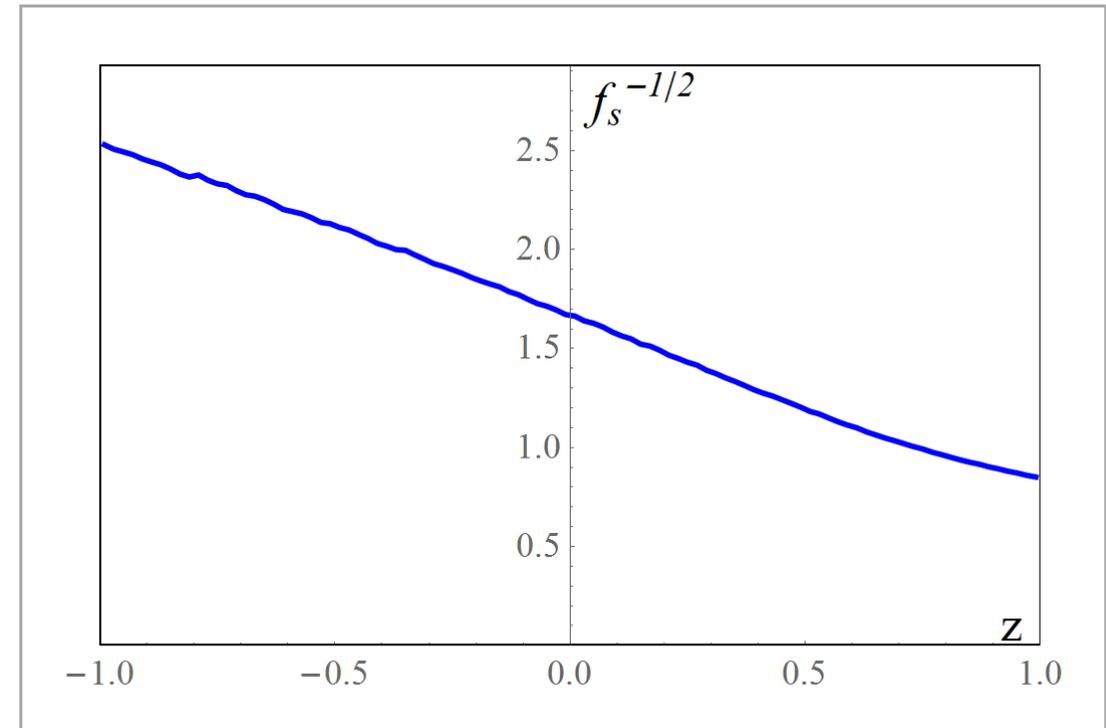
$$\sqrt{\frac{1}{f_s(z)}} = \sqrt{\frac{2}{1-a^2}} (1 + az)$$

# Определение параметра симметрии $a$

Метод наименьших квадратов для определения параметра

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{f_s(z)}} = \sqrt{\frac{2}{1-a^2}} (1 + az)$$



Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

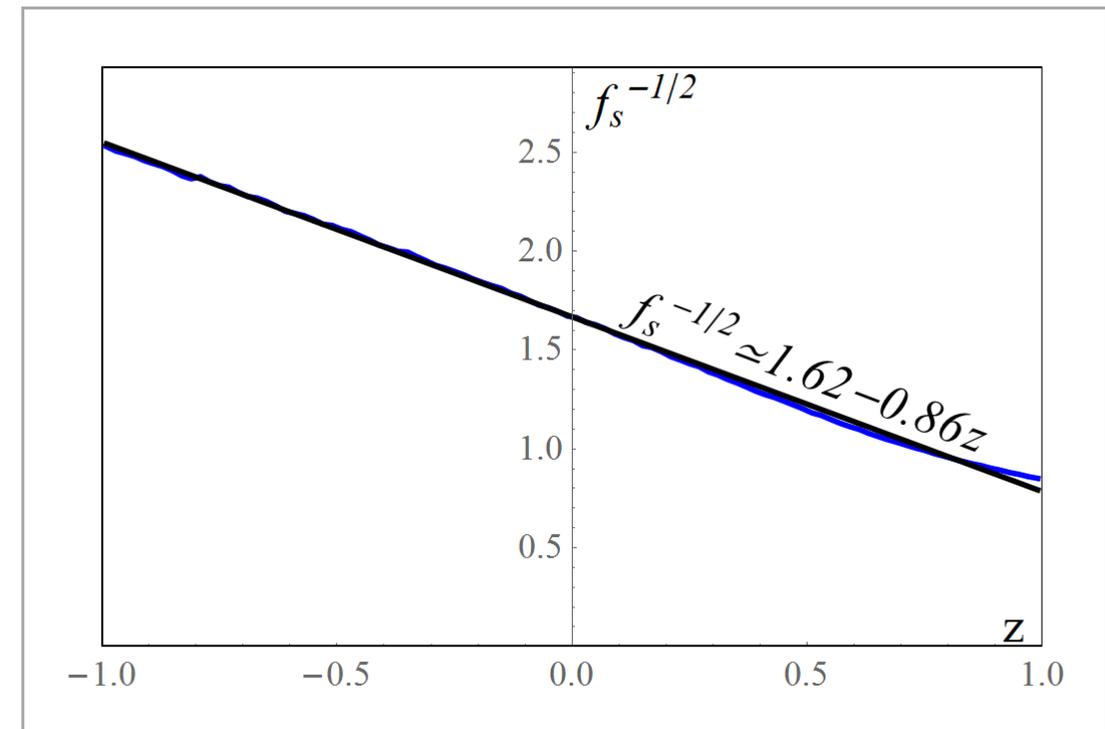
# Определение параметра симметрии $a$

Метод наименьших квадратов для определения параметра

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{f_s(z)}} = \sqrt{\frac{2}{1-a^2}} (1 + az)$$

$$a \simeq -0.53$$



Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

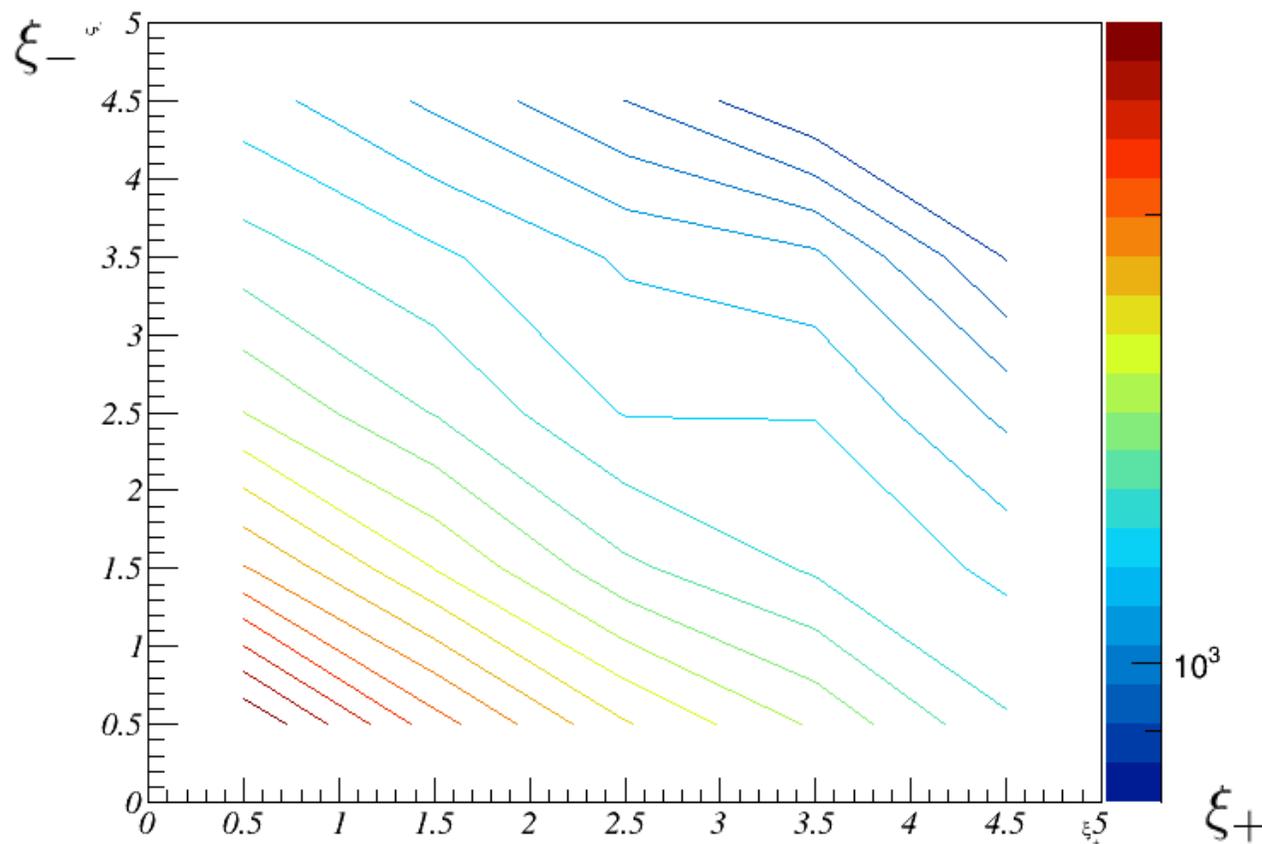
Малоинтенсивные пульсации

# Малоинтенсивные пульсации

Изменение параметра симметрии для малоинтенсивных пульсаций

Линии уровня  
симметричны

т. е.  $a = 0$



Data obtained from  
the JHTDB

# Малоинтенсивные пульсации

Случай гауссового распределения скоростей

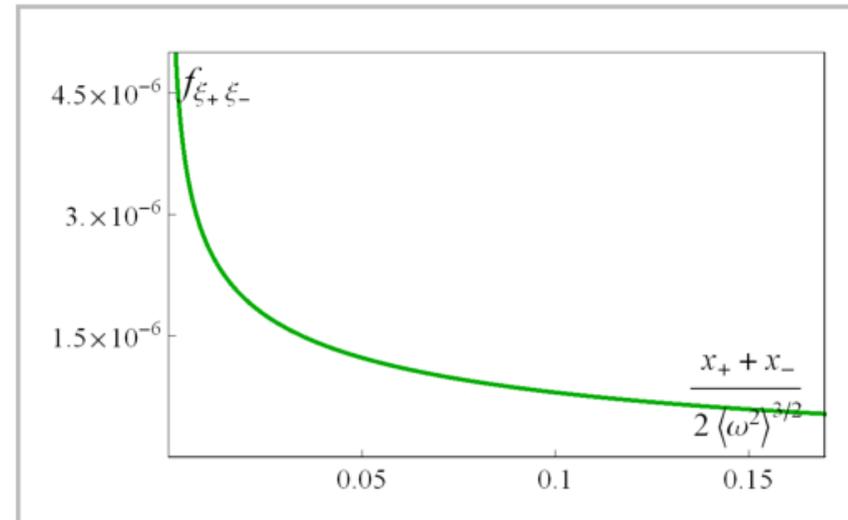
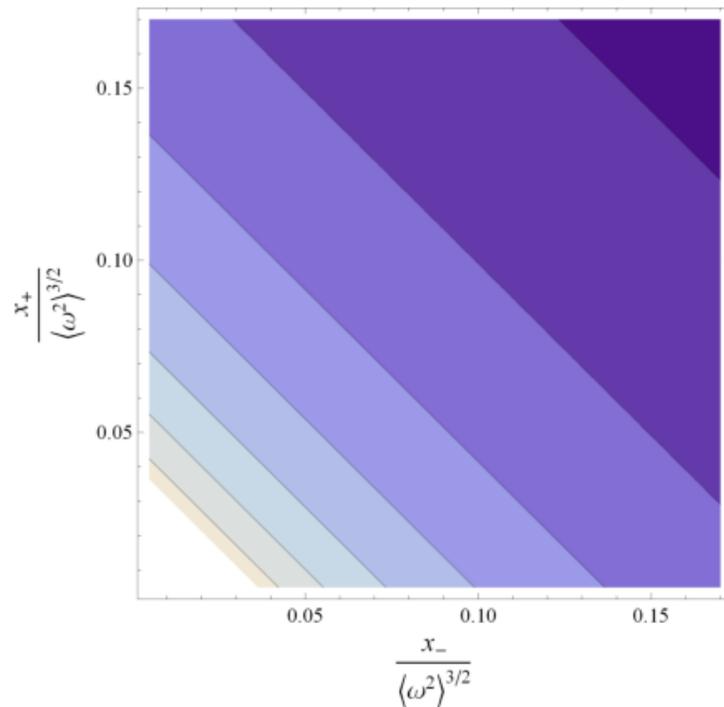
# Малоинтенсивные пульсации

Случай гауссового распределения скоростей

Функция распределения инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$

Линии уровня симметричны

т. е.  $a = 0$



а) уровни двумерного распределения

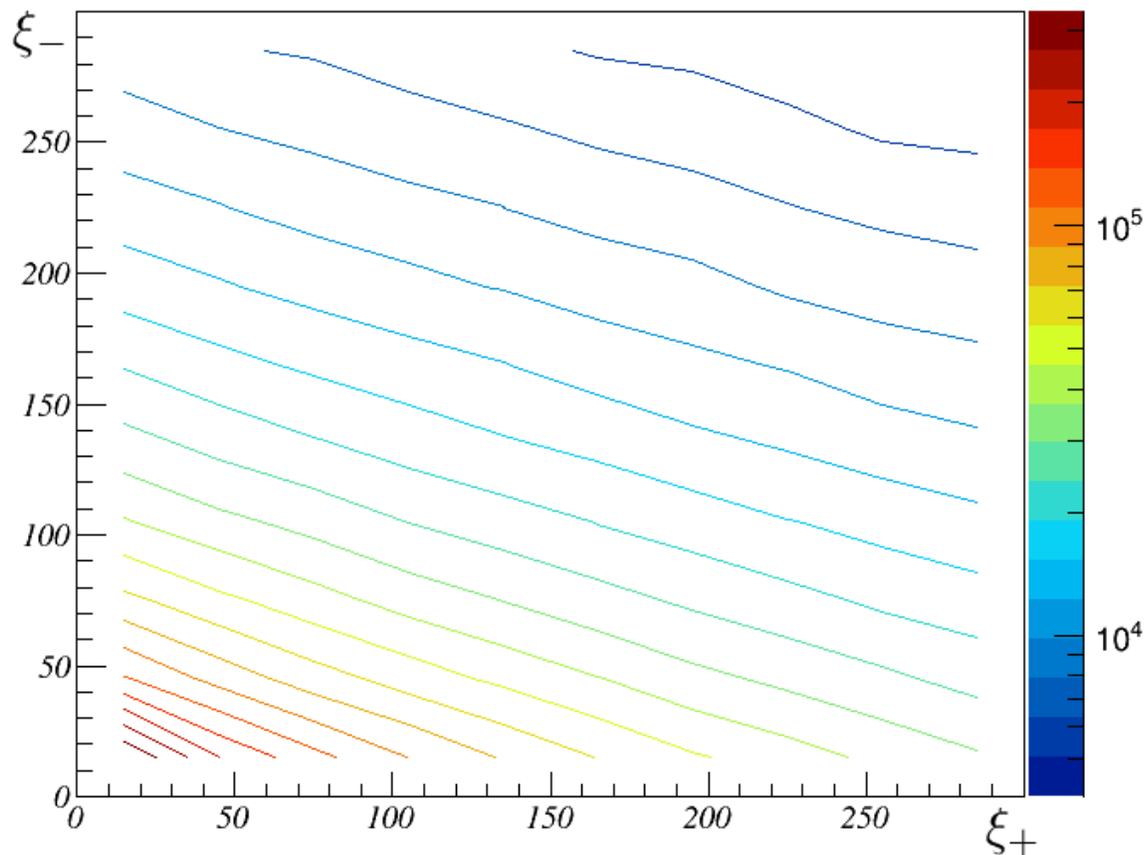
б) абсолютные значения функции

# Выводы

- Введены новые инварианты вращения тензора скоростей деформации, функция распределения которых (в изотропном потоке) обладает ярко выраженной симметрией

# Введение

Функции распределения различных систем инвариантов вращения



$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} R_S$$
$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} R_S$$

- 1) Новые инварианты гораздо удобнее для обработки данных и дают более точную статистическую информацию
- 2) Наблюдается симметрия функции распределения этих инвариантов

Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

# Выводы

- Введены новые инварианты вращения тензора скоростей деформации, функция распределения которых (в изотропном потоке) обладает ярко выраженной симметрией
- Выведена связь функции распределения новых инвариантов с известными и исследуемыми ранее функциями распределения

# Симметрия распределения инвариантов

Аналитическое выражение симметрии

Инвариант, отвечающий симметрии

$$\xi_a = \frac{1+a}{2}\xi_+ + \frac{1-a}{2}\xi_- = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}a}{2}R_S$$

Симметрия функции распределения инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$

$$f_{\xi_+\xi_-}(x_+, x_-) = f\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right)$$



Симметрия функции распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2}(-q)^{1/2} f\left((-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}ar\right)$$

# Определение параметра симметрии $a$

## Симметрия и безразмерный инвариант $S$

Интегральное преобразование для функции распределения  $f_s$  безразмерного инварианта

$$f_s(z) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{Q_S R_S} \left( -t^2, t^3 \frac{2z}{3\sqrt{3}} \right) t^4 dt$$

$f_{Q_S R_S}$  – функция распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

Симметрия функции распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2} (-q)^{1/2} f \left( (-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} ar \right)$$

Функция распределения определяется **однозначно**

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}$$

# Выводы

- Введены новые инварианты вращения тензора скоростей деформации, функция распределения которых (в изотропном потоке) обладает ярко выраженной симметрией
- Выведена связь функции распределения новых инвариантов с известными и исследуемыми ранее функциями распределения
- Сформулирован метод нахождения параметра симметрии
- Найдено численное значение параметра симметрии для изотропного потока, смоделированного в университете Джона Хопкинса и представленного в открытый доступ в интернете

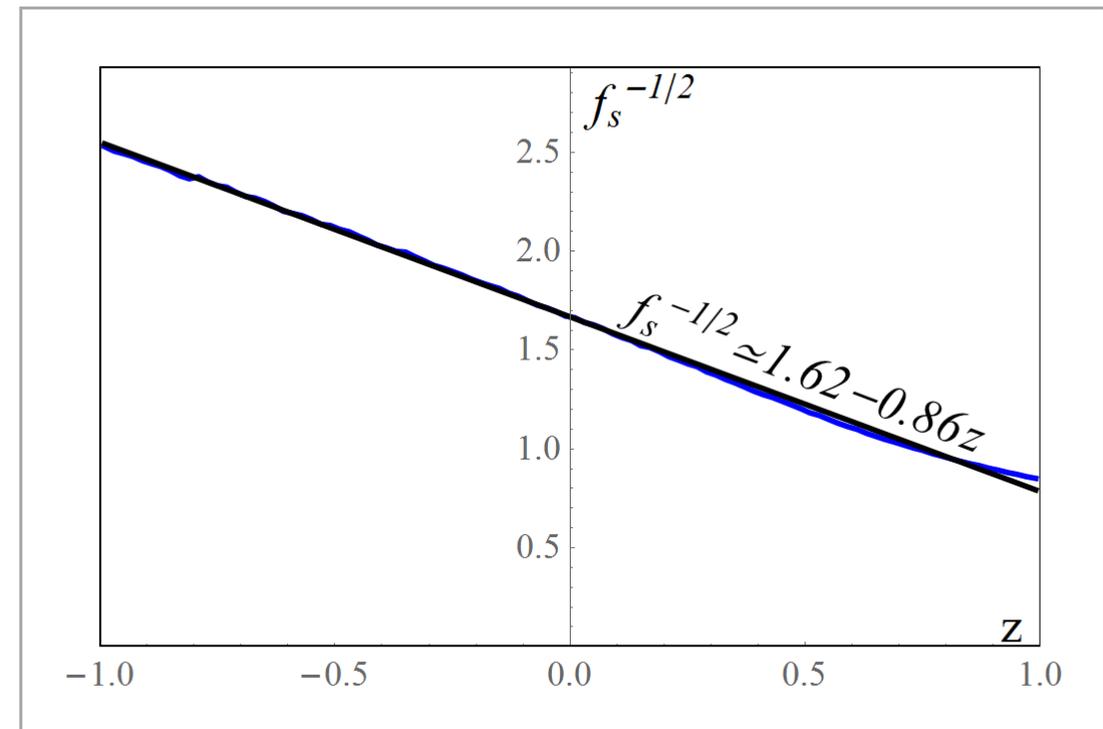
# Определение параметра симметрии $a$

Метод наименьших квадратов для определения параметра

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{f_s(z)}} = \sqrt{\frac{2}{1-a^2}} (1 + az)$$

$$a \simeq -0.53$$



Data obtained from the JHTDB at  
<http://turbulence.pha.jhu.edu>

# Выводы

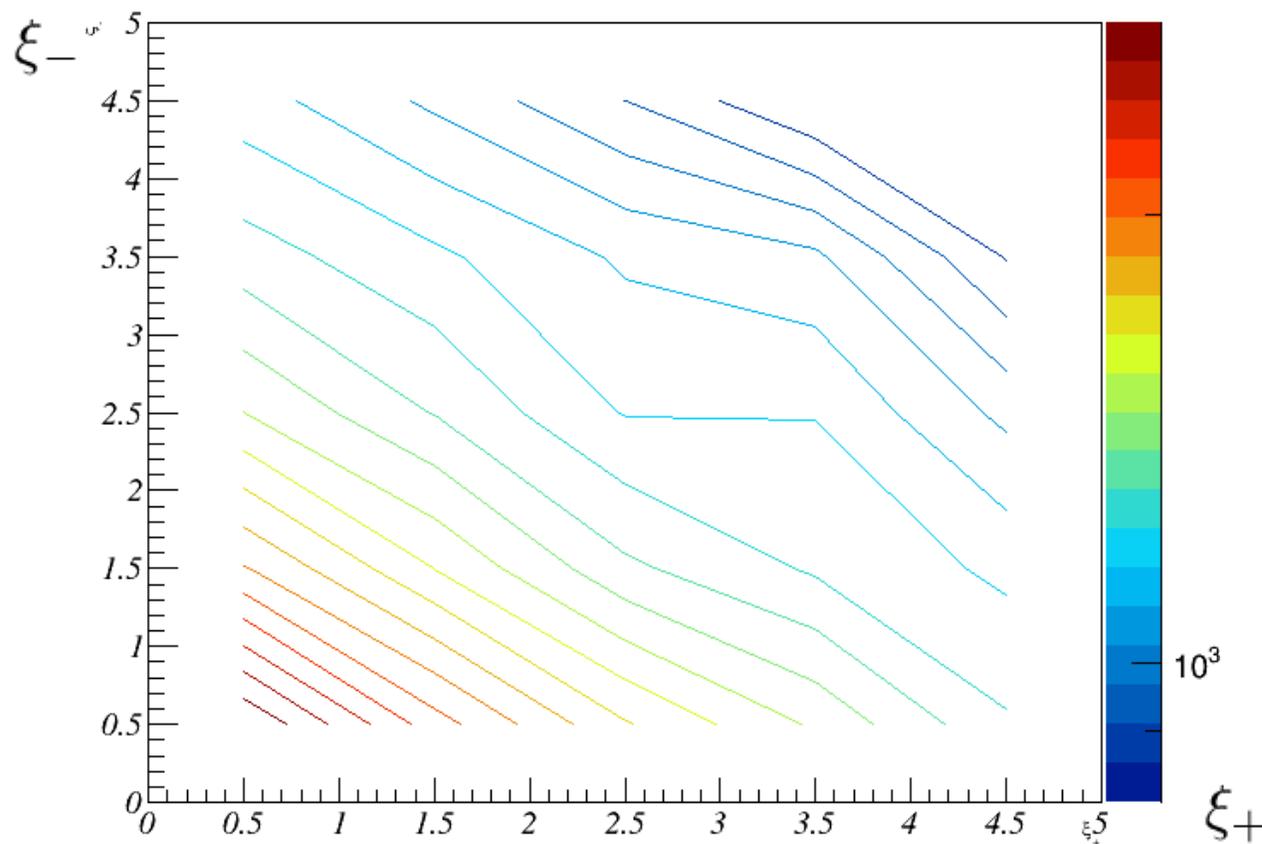
- Введены новые инварианты вращения тензора скоростей деформации, функция распределения которых (в изотропном потоке) обладает ярко выраженной симметрией
- Выведена связь функции распределения новых инвариантов с известными и исследуемыми ранее функциями распределения
- Сформулирован метод нахождения параметра симметрии
- Найдено численное значение параметра симметрии для изотропного потока, смоделированного в университете Джона Хопкинса и представленного в открытый доступ в интернете
- Объяснено изменение параметра симметрии для малоинтенсивных пульсаций

# Малоинтенсивные пульсации

Изменение параметра симметрии для малоинтенсивных пульсаций

Линии уровня  
симметричны

т. е.  $a = 0$



Data obtained from  
the JHTDB

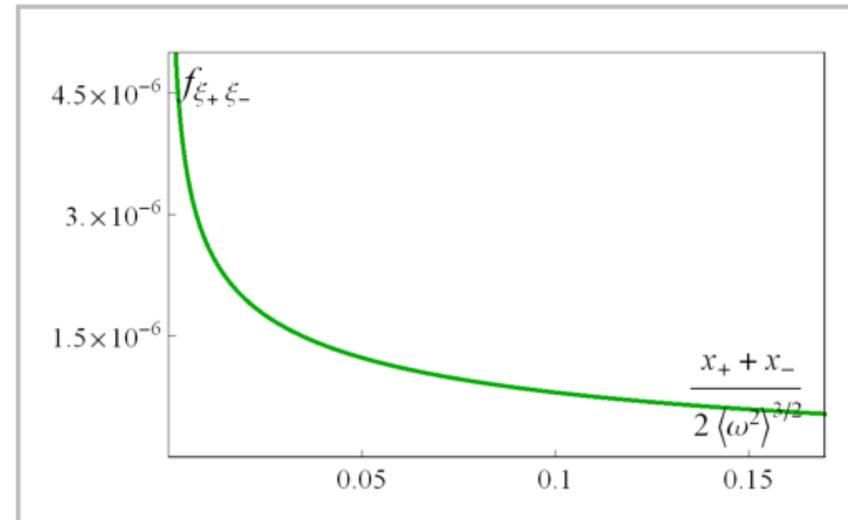
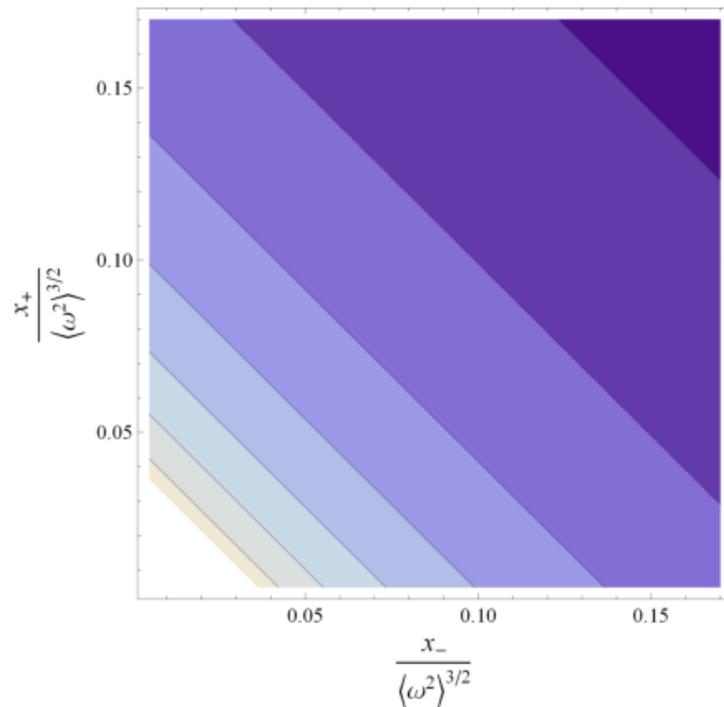
# Малоинтенсивные пульсации

Случай гауссового распределения скоростей

Функция распределения инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$

Линии уровня симметричны

т. е.  $a = 0$



а) уровни двумерного распределения

б) абсолютные значения функции

# Спасибо за внимание!

## Выводы

- Введены новые инварианты вращения тензора скоростей деформации, функция распределения которых (в изотропном потоке) обладает ярко выраженной симметрией
- Выведена связь функции распределения новых инвариантов с известными и исследуемыми ранее функциями распределения
- Сформулирован метод нахождения параметра симметрии
- Найдено численное значение параметра симметрии для изотропного потока, смоделированного в университете Джона Хопкинса и представленного в открытый доступ в интернете
- Объяснено изменение параметра симметрии для малоинтенсивных пульсаций