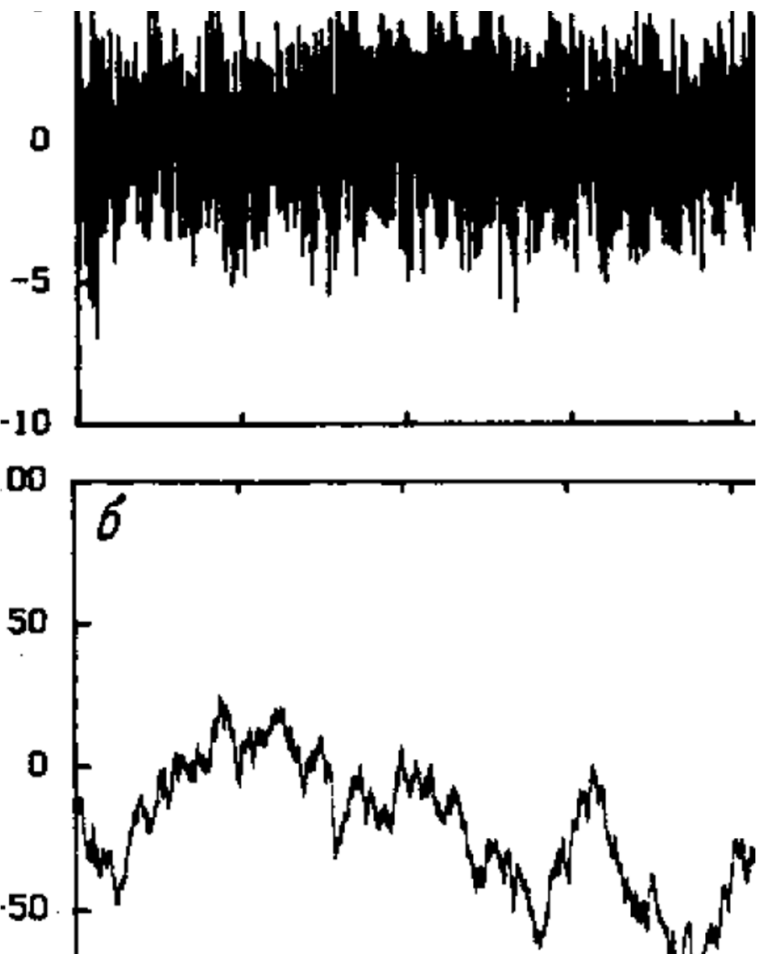
О ВОЗМОЖНОЙ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

О.Н. Хатунцева
г. Королев,
РКК "Энергия", МФТИ

Некоторые стохастические процессы являются неопределенными и непредсказуемыми даже «в среднем» и не могут быть описаны стационарной плотностью вероятности случайной величины.



Существующие способы описания стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений:

1. Уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^1(x_1, \ldots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^2(x_1, \ldots, x_N) \right] W,$$

2. Стохастические дифференциальные уравнения:

а). *уравнения Ланжевена:*

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{n} g_i^m(\mathbf{x}) \eta_m(t),$$

б). *уравнения Ито:*

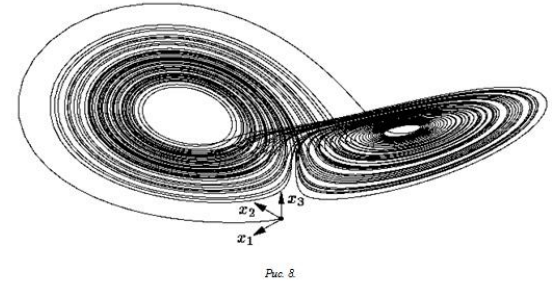
$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t,\ t)\, dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t,\ t)\, d\mathbf{B}_t, \qquad \text{где } dB_t \sim \sqrt{dt}$$

$$(\text{Из уравнения } dX = X\sqrt{dt} \text{ не следует } X = X_0 e^{\sqrt{dt}})$$

Для описания конкретной динамической системы, находящейся вдали от положения равновесия, остаются открытыми вопросы:

1. в каком именно виде задавать коэффициенты в стохастических уравнениях так, чтобы правильно учитывать коллективные явления взаимодействия подсистем на разных масштабах;
2. не доказанным является отсутствие дифференциалов по времени, отличных от первой и половинной степеней;
3. проблема совместного решения диф. уравнений в частных производных (например, уравнений Навье-Стокса) и стохастических дифференциальных уравнений.

Операторные методы описания нестационарной плотности вероятности



Оператор Перрона-Фробениуса для динамических систем

Теория Купмана – фон Неймана

$$x(t)=\varphi(x,t) \to P(x,t)=L(P(x),t)$$

$$x_{n+1}=f(x_n) \to P_{n+1}(y)=\int \delta(f(x)-y)P_n(x)dx$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = L|\psi\rangle$$

$$\downarrow$$

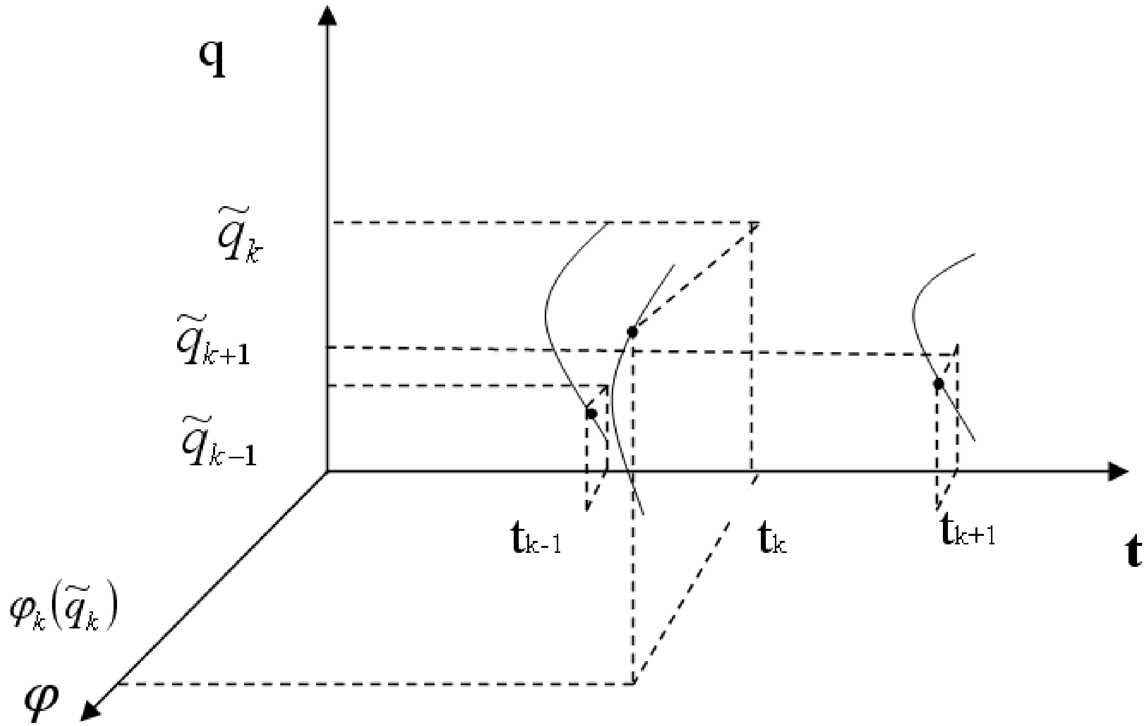
$$|\psi(t)\rangle = U_t|\psi(0)\rangle$$

Ассоциируются с уравнением Лиувилля.

Операторы линейные несамосопряженные.

Единственность решения для нестационарной плотности вероятности!

Описание стохастической системы, не имеющей выделенных положений равновесия, в расширенном фазовом пространстве



$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(q)dq$$

$\tilde{Q}(\tilde{q}) = \{\tilde{q}\}$ - множество реализованных значений параметра q

$Q(q) = \{q\}$ - множество всех возможных значений параметра q

$$\tilde{Q}(\tilde{q}) \subset Q(q)$$

$$\varphi(t_i, q) = \varphi_i(q)$$

В каждый фиксированный момент времени функция является нормированной:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(q) dq$$

$$\tilde{q}_i = \langle q \rangle_i + (\Delta q)_i$$

$$\langle q \rangle_i = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi_i(q) dq$$

$$\uparrow$$

среднее значение возможных реализаций величины q в данный момент времени

Заменим во всех выражениях параметры, реализуемые в фиксированные моменты времени, параметрами, реализуемыми в любые моменты времени:

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i) \rightarrow \tilde{q}(t)$$

$$(\Delta q)_i = (\Delta q)(t_i) \rightarrow (\Delta q)(t)$$

$$\varphi_i(q) = \varphi(t_i, q) \rightarrow \varphi(t, q)$$

$$\tilde{q}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q\varphi(t,q)\,dq + (\Delta q)(t)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,q)\,dq \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,q)\,dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t}\,dq = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - k) \frac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t} dq + \frac{\partial (\Delta q)}{\partial t}, \qquad k = const$$

$\varphi(t,q)$ **изменяется между любыми моментами времени только при изменении** $\tilde{q}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\tilde{q}(t),q)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(q - \langle q \rangle_k\right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} dq + \frac{\partial (\Delta q)}{\partial t}$$

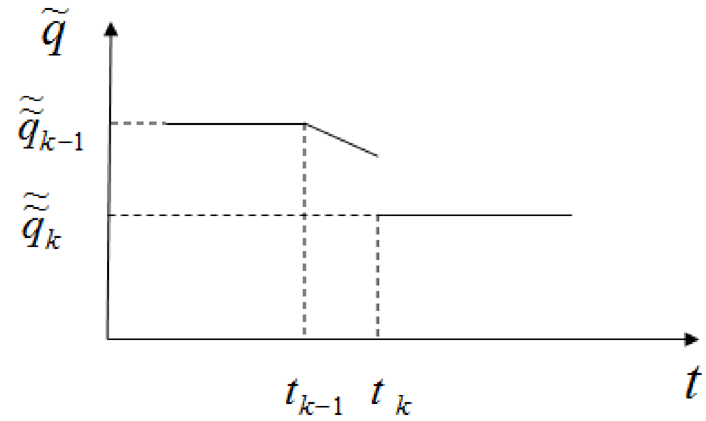
Основные требования при проецировании описываемого процесса из расширенного фазового пространства на плоскость (t, q) :

$$\varphi(t,q)\Big|_{t=t_i} = \varphi_i(q)\Big|_{q=\tilde{q}_i}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi(t,q)}{\partial q}\right)_{t=t_i} = \left(\frac{\partial \varphi_i(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_i}$$

$\tilde{q}(t)$ **претерпевает разрыв между любыми рассматриваемыми моментами времени**

$$\tilde{q}(t)=\begin{cases}\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t), & если \quad t<t_k\\ \tilde{\tilde{q}}_k(t), & если \quad t\geq t_k\end{cases}$$



$$H=\frac{\tilde{q}(t)-\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)}{\tilde{\tilde{q}}_k(t)-\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)}=U_{-}(t-t_{k-1})=\begin{cases}0, & при \quad t<t_k\\ 1, & при \quad t\geq t_k\end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial(t-t_k)}=\delta(t-t_k)$$

В линейном приближении изменения функции в окрестности точки t_k

$$\left(\left.\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k} \big/ \partial t\right)_{t=t_k} \cdot (t-t_k) = \left(\partial\varphi_k(q)/\partial q\right)_{q=\tilde{q}_k} \cdot (q-\tilde{q}_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \delta(t-t_k) = \delta\left(\frac{\left(\partial\varphi_k(q)/\partial q\right)_{q=\tilde{q}_k}}{\left(\left.\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k} \big/ \partial t\right)_{t=t_k}}(q-\tilde{q}_k)\right) = \left|\frac{\left(\left.\partial\varphi(t,q)\right|_{q=\tilde{q}_k} \big/ \partial t\right)_{t=t_k}}{\left(\partial\varphi_k(q)/\partial q\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right| \delta(q-\tilde{q}_k)$$

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}=\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(q-\langle q\rangle_k\right)\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial H}\frac{dH}{dt}dq=$$

$$=\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(q-\langle q\rangle_k\right)\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}}\left(\tilde{\tilde{q}}_k(t)-\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)\right)\left|\frac{\left(\partial \varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\delta\left(q-\tilde{q}_k\right)dq=$$

$$=\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}+\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)\left(\tilde{\tilde{q}}_k(t)-\tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)\right)\left|\frac{\left(\partial \varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k}/\partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}$$

Осредняем левую и правую часть выражения по плотности вероятности $\varphi_k(q)dq$:

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial (\Delta q)}{\partial t} \right\rangle + \left(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k\right)\left(\tilde{\tilde{q}}_k(t) - \tilde{\tilde{q}}_{k-1}(t)\right) \left| \frac{\left(\partial \varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} \Big/ \partial t\right)_{t=t_k}}{\left(d\varphi_k(q)/dq\right)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \varphi_k(q) dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{\left(\partial \varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} \big/ \partial t \right)_{t=t_k}}{\left(\partial \varphi_k(q) / \partial q \right)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq =$$

$$= (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{\left(\partial \varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} \big/ \partial t \right)_{t=t_k}}{\left(\partial \varphi_k(q) / \partial q \right)_{q=q_k}} \right| \varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$$

В случае рассмотрения любой неизменной во времени функции $\varphi(q)$

$$\Downarrow$$

$$\langle \Delta q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle \frac{\partial(\Delta q)}{\partial t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial t} \varphi(q) dq = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial(\Delta q)}{\partial t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \varphi_k(q) dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\left(\frac{1}{\partial\varphi(t,q)/\partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t \right)_{t=t_k}}{\left(\partial\varphi_k(q)/\partial q \right)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq =$$

$$= \left(\Delta\left(\frac{1}{\partial\varphi(t,q)/\partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{\left(\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde{q}_k} / \partial t \right)_{t=t_k}}{\left(\partial\varphi_k(q)/\partial q \right)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q},q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}$$

Основное решение задачи определения динамики стохастического процесса в линейном приближении.

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = \left(\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}\right)\left(\left(\frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi_{k-1}(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}}\right)$$

$$\tilde{q}_k = q\big|_{q=\tilde{q}_k} \qquad q \to \tilde{q}_k$$

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = \left(\varphi_k(\tilde{q}_k) - \varphi_{k-1}(\tilde{q}_k)\right)\left(\left(\frac{1}{\frac{\partial \varphi_k(\tilde{q}_k)}{\partial(\tilde{q}_k)}} - \frac{1}{\frac{\partial \varphi_{k-1}(\tilde{q}_k)}{\partial(\tilde{q}_k)}}\right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(\tilde{q}_k)}\right)$$

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_k\right)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_{k-1}\right)}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_k\right)}\right)\left(\left(\frac{1}{\frac{\partial\varphi_k\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_k\right)}{\partial\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_k\right)}} - \frac{1}{\frac{\partial\varphi_{k-1}\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_{k-1}\right)}{\partial\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_{k-1}\right)}}\right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q\rangle_k}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k - \langle q\rangle_k\right)}\right)$$

$$\tilde{q}_k - \langle q\rangle_i := p_i, \qquad i = k-1, k$$

$$\frac{p_k - \left(\tilde{q}_{k-1} - \langle q\rangle_k\right)}{\varphi_k\left(p_k\right)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}\left(p_{k-1}\right)}{\varphi_k\left(p_k\right)}\right)\left(\left(\frac{1}{\frac{\partial\varphi_k\left(p_k\right)}{\partial p_k}} - \frac{1}{\frac{\partial\varphi_{k-1}\left(p_{k-1}\right)}{\partial p_{k-1}}}\right) + \frac{p_k}{\varphi_k\left(p_k\right)}\right)$$

Решение задачи определения динамики стохастического процесса в линейном приближении.

$$\frac{p-\left(\tilde{q}_{k-1}-\langle q\rangle\right)}{\varphi(p)}=\left(1-\frac{\varphi_{k-1}\left(p_{k-1}\right)}{\varphi(p)}\right)\left(\left(\frac{1}{\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p}}-\frac{1}{\frac{\partial\varphi_{k-1}\left(p_{k-1}\right)}{\partial p_{k-1}}}\right)+\frac{p}{\varphi(p)}\right)$$

$$p=\tilde{q}-\langle q\rangle,\qquad p_{k-1}=\tilde{q}-\langle q\rangle_{k-1}$$

Существуют два предельных случая решения задачи

I. Предел “острых” функций. Когда небольшое изменение реализуемого значения параметра приводит к большому изменению плотности вероятности:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} >> 1$$

II. Когда справедливо допущение:

$$\tilde{q}_{k-1} = \langle q \rangle_k$$ - мартингалы

I. Предел "острых" функций.

$$p = \varphi(p)\left(\frac{1}{\dfrac{\partial \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\partial p_{k-1}}} - \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi(p)}{\partial p}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(p) = \begin{cases} p\, d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} + \sqrt{p^2\left(d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}\right)^2 + \alpha} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} const \cdot p \\ p\, d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} - \sqrt{p^2\left(d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}\right)^2 + \alpha} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{const}{p} \end{cases}$$

II. Когда справедливо допущение:

$$\tilde{q}_{k-1} = \langle q \rangle_k$$ - мартингалы

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi(p)}{\partial p}} = \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}} - \frac{p}{\varphi(p)\left(1 - \dfrac{\varphi(p)}{\varphi_{k-1}}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\varphi_{k-1}} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}} p = \left|\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi} - 1\right| \left(\frac{1}{\left|\dfrac{\varphi_{k-1}}{\varphi} - 1\right|^{-1} \pm 1} \pm \ln \left| \left|\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi} - 1\right|^{-1} \pm 1 \right| \right)$$

$$\varphi(p) \approx \left| \frac{\varphi_{k-1}^2 / \left(\partial \varphi_{k-1} / \partial p_{k-1}\right)}{p} \right|,$$ если $p >> \varphi_{k-1} / \left(\partial \varphi_{k-1} / \partial p_{k-1}\right)$

ПОЛУЧЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЭВОЛЮЦИЮ ТРАЕКТОРИЙ ИССЛЕДУЕМОГО ПАРАМЕТРА В ФАЗОВОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ РАССМОТРЕНИЯ “ОСТРЫХ” ФУНКЦИЙ.

$$p = \varphi(p)\left(\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}} - \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi(p)}{\partial p}}\right), \qquad \partial\varphi_{k-1}/\partial p_{k-1} = \left(\partial\varphi_{k-1}(q)/\partial q\right)\Big|_{q=\tilde{q}}$$

Введя обозначения: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = \chi, \qquad \dfrac{\varphi^2}{\chi^3}\dfrac{\partial\chi}{\partial p} = \eta$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial p} = -\dfrac{\eta\chi}{\varphi} \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial p} = \dfrac{\eta\chi^3}{\varphi^2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = \chi \end{cases}$$

Сделав замену переменных: $\varphi = e^{s}, \quad \chi e^{-s} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \mu$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial p} = \mu \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial p} = \eta\mu^3 - \mu^2 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial p} = -\eta\mu \end{cases}$$

$$(\eta, \mu, s; p) \Rightarrow (\eta, \mu; p)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial p} = \eta\mu^3 - \mu^2 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial p} = -\eta\mu \end{cases}$$

Полученные системы уравнений описывают эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве

Исследуем размерность Хаусдорфа-Безиковича стохастической системы:

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta^{-1}},$$

В фазовом стохастическом пространстве: $(\eta, \mu; p)$

$$D_{\eta\mu} = -\frac{\ln\left(\dfrac{\eta\mu}{\eta_0\mu_0}\right)}{\ln\left(\dfrac{p}{p_0}\right)} \approx -\frac{d\left(\ln\left(\dfrac{\eta\mu}{\eta_0\mu_0}\right)\right)}{d\left(\ln\left(\dfrac{p}{p_0}\right)\right)} = -\frac{d\left(\ln\left(\dfrac{\eta}{\eta_0}\right)\right)}{d\left(\ln\left(\dfrac{p}{p_0}\right)\right)} - \frac{d\left(\ln\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)\right)}{d\left(\ln\left(\dfrac{p}{p_0}\right)\right)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\ln\left(\eta/\eta_0\right)\right)}{d\left(\ln\left(p/p_0\right)\right)} = -p\mu \\ \dfrac{d\left(\ln\left(\mu/\mu_0\right)\right)}{d\left(\ln\left(p/p_0\right)\right)} = p\mu\left(\eta\mu - 1\right) \end{cases}$$

$$D_{\eta\mu} \approx 2\frac{p}{\varphi}\frac{d\varphi}{dp} - \frac{p}{d\varphi/dp}\frac{d^2\varphi}{dp^2}$$

Минимальная размерность стохастического фазового пространства

$$D_{\mu\eta} = 0$$

$$p = 0$$

$$\varphi = \frac{const}{p+b} \underset{p>>b}{\approx} \frac{const}{p}$$

$1/f$ - фликкер шумы

$1/r$ - электрические и гравитационные потенциалы

Максимальная размерность стохастического фазового пространства

$$D_{\mu\eta} = 2$$

$$\varphi = const \cdot p$$

Конфайнмент ?!!

Алгоритм описания физических систем с учетом стохастических процессов.

Детерминированный случай:

$$f(t,\vec{x}):\ \ df/dt = \hat{A}\, f$$

$$\Downarrow\ (t,\vec{x}) \to (t,\vec{x};S\{\varphi[p(t,\vec{r};\tau)]\}),$$

Стохастический случай:

$$f(t,\vec{x}) \to f(t,\vec{x};S\{\varphi[p(t,\vec{r};\tau)]\})$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{\partial S/\partial \varphi}\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$S(t,\vec{r};\tau) = -\int \varphi[p(t,\vec{r};\tau)] \ln \varphi[p(t,\vec{r};\tau)]\, d[p(t,\vec{r};\tau)]$$

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle = -\frac{d}{d\,э} \int \left(\varphi(p) + э\, h(p)\right) \ln\left(\varphi(p) + э\, h(p)\right) dp \Big|_{э=0} =$$

$$= -\int \left(\ln \varphi(p) + 1\right) h(p)\, dp = \left\langle -\left(\ln \varphi(p) + 1\right), h \right\rangle$$

$$\delta S / \delta \varphi = -\ln \varphi(p) - 1$$

$$-\left(\ln \varphi + 1\right)\delta\varphi = \delta\left(-\varphi \ln \varphi\right) \Rightarrow \tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$$

$$dS/dt = 1/\tau$$

масштаб времени, на котором энтропия изменяется на единицу

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}$$

Описание динамики рассматриваемой системы с учетом внутренних стохастических процессов

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial t} + \sum\limits_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial t} - \dfrac{1}{\tau e^s\left(s+1\right)}\dfrac{\partial f}{\partial s} = \hat{A} f \\
\dfrac{\partial s}{\partial p} = \mu \\
\dfrac{\partial \mu}{\partial p} = \mu^3 \eta - \mu^2 \\
\dfrac{\partial \eta}{\partial p} = -\mu\eta
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i - \dfrac{1}{\tau e^s (s+1)} \dfrac{\partial f}{\partial s} = \hat{A} f \\ s = \ln\left(p\, d\varphi_0 / dp_0 \pm \sqrt{p^2 \left(d\varphi_0 / dp_0 \right)^2 + \alpha} \right) \end{cases}$$

Иногда расширение фазового пространства может приводить к существенному изменению вида искомой функции. При этом, зависимость полученной функции от стохастической переменной может быть слабой.

Тогда имеет смысл рассматривать единственное уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}=\hat{A}f$$

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТОДА ОПИСАНИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В РАСШИРЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРЕМЕННЫХ.

$$\begin{cases} f_k = f_{k-1} + \Delta s_k e^{s_{k-1}} \left(s_{k-1} - 1\right) \tau \left(\hat{A} f_{k-1} - \dfrac{\partial f_{k-1}}{\partial t} - \sum\limits_i \dfrac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) \\ \Delta s_k = e^{\Delta s_k} - \dfrac{1}{1 + \Delta s_k \left(\eta_{k-1} \mu_{k-1} - 1\right)} - p_{k-1} \mu_{k-1} \end{cases}$$

Выводы:

1. Расширение пространства переменных и рассмотрение в этом пространстве непрерывно изменяющейся плотности вероятности для систем, не имеющих выделенного состояния равновесия, позволило получить соотношение, связывающее плотности вероятности отклонения случайной величины от средних значений реализаций случайных величин в двух временных точках.

2. Показано, что в определенном интервале значений случайной величины такое решение не единственно.

2. Получена система уравнений, описывающих эволюцию траекторий отклонений исследуемого параметра от среднего значения в фазовом стохастическом пространстве.

3. Проведен анализ размерности фазового стохастического пространства, на основе которого найдены устойчивые и неустойчивые ветви решения.

4. Предложен метод описания физических процессов с учетом стохастических возмущений в расширенном фазовом пространстве на основе уравнений в частных производных.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!