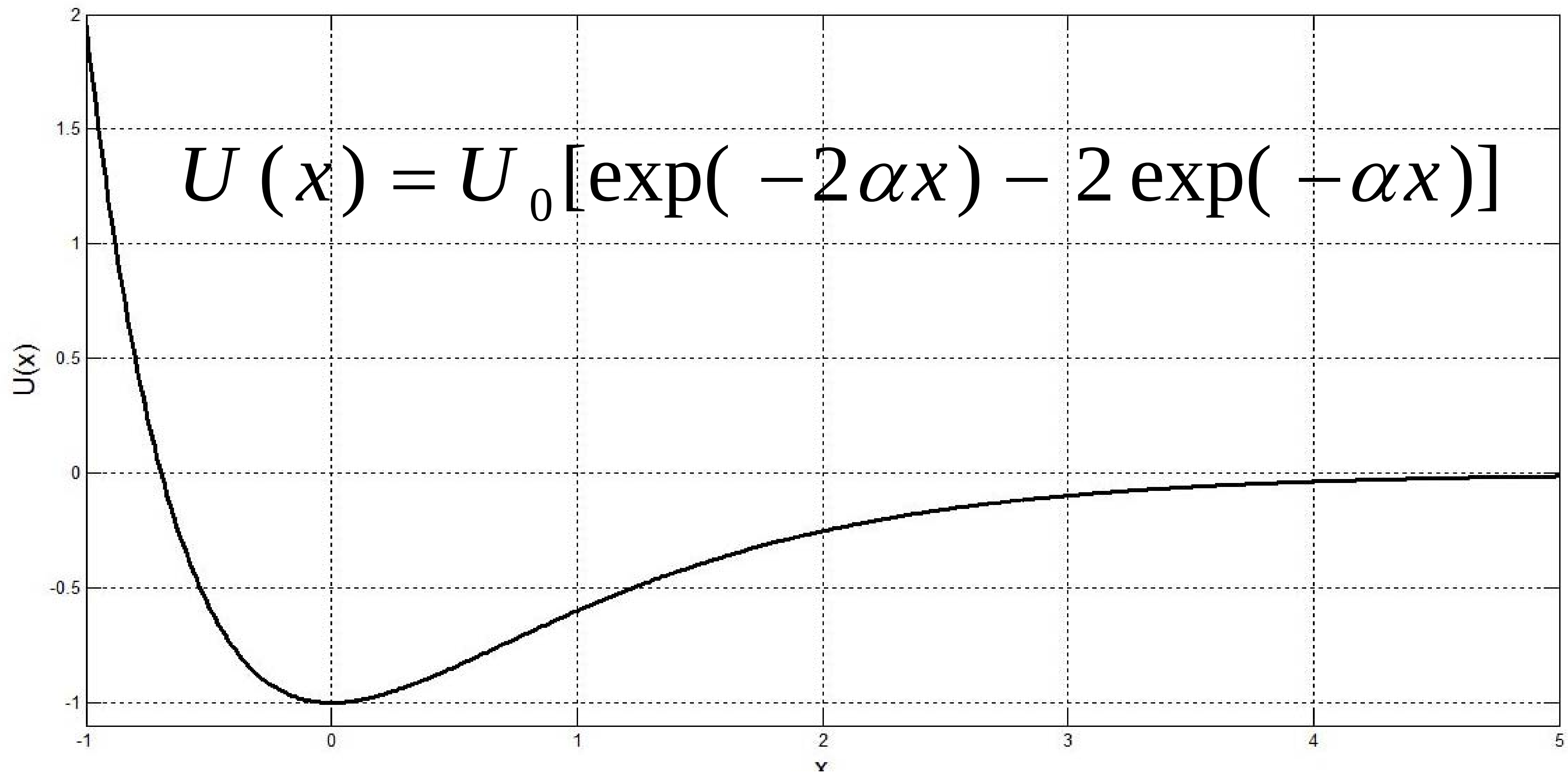
XXIX научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике

14-15 декабря 2020 г., Москва

О движении заряженной частицы в потенциале Морзе с учётом лоренцевых сил трения

Е.С. Алексеева
Нижегородское математическое общество
А.Э. Рассадин
Высшая школа экономики

Потенциал Морзе в квантовой механике (1929 г.)



$$U(x) = U_0[\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)]$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\cdot\psi = E\psi$$

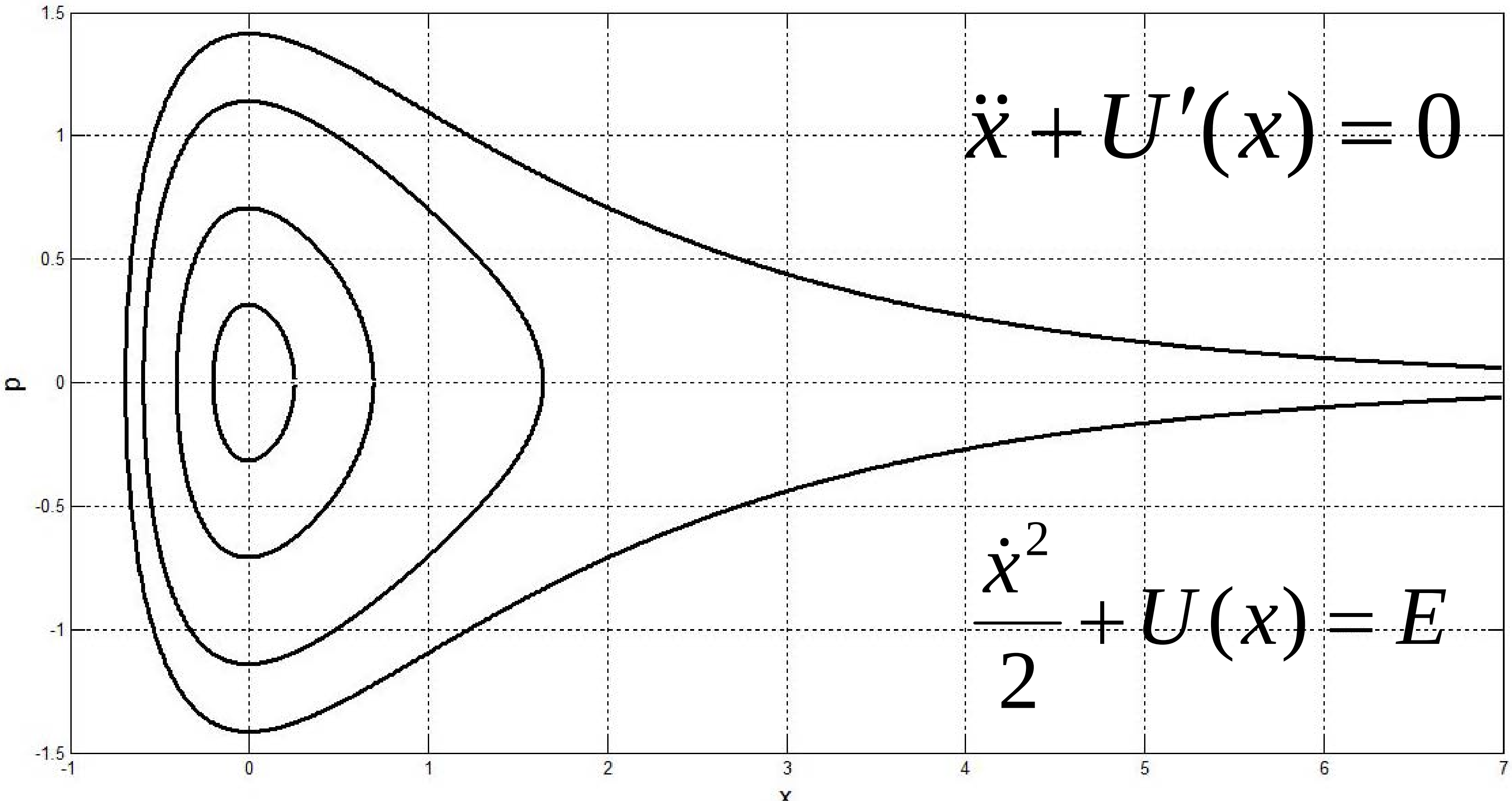
$$\xi = \frac{2\sqrt{2mU_0}}{\alpha\hbar}\exp(-\alpha x)$$

$$\psi \sim \exp(-\xi/2)\cdot\xi^s\cdot F(-n, 2s+1, \xi)$$

$$s = \frac{\sqrt{2mU_0}}{\alpha\hbar} - \frac{1}{2} - n$$

$$E_n = -U_0\cdot\left[1 - \frac{\alpha\cdot\hbar}{\sqrt{2mU_0}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

Потенциал Морзе в классической механике



$$\ddot{x} + U'(x) = 0$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$$

$$x(t,E) = \ln \frac{1 - \sqrt{1+E} \cdot \cos(\sqrt{-2E} \cdot t)}{-E}$$

Уравнение движения заряженной частицы в потенциале Морзе с учётом торможения излучением

$$\ddot{x} + U'(x) = \gamma \cdot \dddot{x} \qquad 0 < \gamma << 1$$

$$\ddot{x} = -U'(x) + \ldots \qquad \gamma = \frac{2q^2}{3c^3} \cdot \frac{\alpha\sqrt{U_0}}{m^{3/2}}$$

$$\dddot{x} = -U'(x) \cdot \dot{x} + \ldots$$

$$\ddot{x} + \gamma U''(x)\dot{x} + U'(x) = 0$$

$$U(x) = \exp(-2x) - 2\exp(-x)$$

В окрестности точки x=0:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + 2x = 0$$

Точка (0,0) — устойчивый фокус:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i \cdot \sqrt{2-\gamma}$$

Вблизи неё энергия системы зависит от времени следующим образом:

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + x^2 \sim \exp(-2\gamma t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x)\right] = -\gamma \cdot U''(x) \cdot \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}(U'(x)\cdot\dot{x}) = U''(x)\cdot\dot{x}^2 + U'(x)\cdot\ddot{x}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{T(E)}\int_0^{T(E)} f(t,E)\cdot dt$$ **— усреднение по периоду невозмущённого движения**

$$\overline{\ddot{x}^2} = \overline{U''(x)\cdot\dot{x}^2}$$ **— теорема вириала**

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma\cdot\overline{\ddot{x}^2}$$ **— средние по периоду невозмущённого движения потери энергии определяются интенсивностью дипольного излучения**

$$x(t,E)=\ln\frac{1+\sqrt{-E}}{-2E}-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{-E}}{1+\sqrt{-E}}\right)^{n/2}\frac{\cos(n\sqrt{-2E}\cdot t)}{n}$$

Переменная действия:

$$I(E)=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dx=\frac{T(E)}{2\pi}\cdot\overline{\dot{x}^2}$$

$$\dot{x}(t,E)=2\cdot\sqrt{-2E}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{-E}}{1+\sqrt{-E}}\right)^{n/2}\sin(n\sqrt{-2E}\cdot t)$$

Равенство Парсеваля даёт:

$$I(E)=\sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{-E})$$

$$E(I)=-(\sqrt{2}-I)^2/2$$

$$\ddot{x}(t,E) = -4E \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{-E}}{1+\sqrt{-E}} \right)^{n/2} \cos(n\sqrt{-2E} \cdot t)$$

Равенство Парсеваля:

$$\overline{\ddot{x}^2} = 2\sqrt{-E} \cdot (1+E)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2 \cdot \gamma \cdot \sqrt{-E} \cdot (1+E)$$

$$E(t) = -th^2(\gamma \cdot t/2 + arth\sqrt{-E_0})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{-2 \cdot E}$$

$$\theta(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\gamma} \ln \frac{ch(\gamma \cdot t/2 + arth\sqrt{-E_0})}{ch(arth\sqrt{-E_0})}$$

$$x_{as}(t) = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - E(t)} \cdot \cos\theta(t)}{-E(t)}$$

$$I(t) = \sqrt{2} \cdot [1 - th(\gamma \cdot t/2 + arth\sqrt{-E_0})]$$

Литература:

- Alekseeva E.S., Rassadin A.E. Asymptotic description of one-dimensional classical motion of mass point in potential wells with small damping // Путь в науку. Математика: Материалы V Международной молодежной научно-практической конференции / Гл. ред. Д.А. Куликов. – Ярославль: ЯрГУ, 2018. С. 19-20.
- Alekseeva E.S., Rassadin A.E. On damped classical oscillations in the modified Pöschl-Teller potential well // Интегрируемые системы и нелинейная динамика: тезисы докладов. — Ярославль: ЯрГУ, 2018. (Международная научная конференция, 1–5 октября 2018 г., Ярославль). С. 11-13.
- Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Асимптотический анализ уравнений Клейна-Гордона-Фока с чисто кубической нелинейностью // "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" имени Е.В. Воскресенского: VIII Международная научная молодежная школа-семинар (Саранск, 16-20 июля 2018 г.). Саранск: СВМО, 2018. С.: 12-15.
- Alekseeva E.S., Rassadin A.E. On Asymptotic Solution for One of the Simplest Model of Cosmological Inflation // International conference on Dynamical Systems 'Shilnikov WorkShop 2018' (Nizhny Novgorod, Russia, December 17-18, 2018). Book of abstracts. P. 3.

Литература:

- **Потапов А.А., Рассадин А.Э., Степанов А.В. Неявное асимптотическое решение для затухающей бегущей волны заряда в длинной линии с сегнетоэлектрическими конденсаторами с отрицательной дифференциальной емкостью // Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике: материалы 11-й Всероссийской научно-технической конференции. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2018, С. 33-35.**
- **Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Асимптотическое описание слабозатухающих колебаний классической частицы в потенциале Пёшля-Теллера // Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» сборник тезисов (г. Уфа, 18 – 22 марта 2019 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – 86 с.**
- **Алексеева Е.С. Асимптотические решения уравнений движения для систем с торможением электромагнитным излучением // XXIV Туполевские чтения (школа молодых ученых): Международная молодёжная научная конференция, 7–8 ноября 2019 года: Материалы конференции. Сборник докладов. – В 6 т.; Т. 5. – Казань: изд-во ИП Сагиева А.Р., 2019. – 734 с.: ил. С. 90-94.**