

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Физический
ИНСТИТУТ



имени
П.Н.Лебедева

Российской академии наук

Ф И А Н



К.П. Зыбин, А.С. Ильин,
А.В. Копьев, В.А. Сирота

Отделение теоретической физики им. И.Е. Тамма
ФИАН им. П.Н. Лебедева

О влиянии флуктуаций магнитного поля на турбулентные пульсации скорости

Москва, 2020

О влиянии флуктуаций магнитного поля на турбулентные пульсации скорости

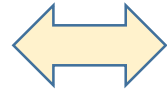
- Проблема турбулентного мелкомасштабного магнитного динамо в сильно проводящей среде
- Кинематическое динамо в изотропном турбулентном потоке
- Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений
- Вырождение обратного воздействия магнитного поля на скорость
- Выводы

Проблема турбулентного мелкомасштабного магнитного динамо в сильно проводящей среде

Основной механизм мелкомасштабного динамо: вмороженность магнитного поля

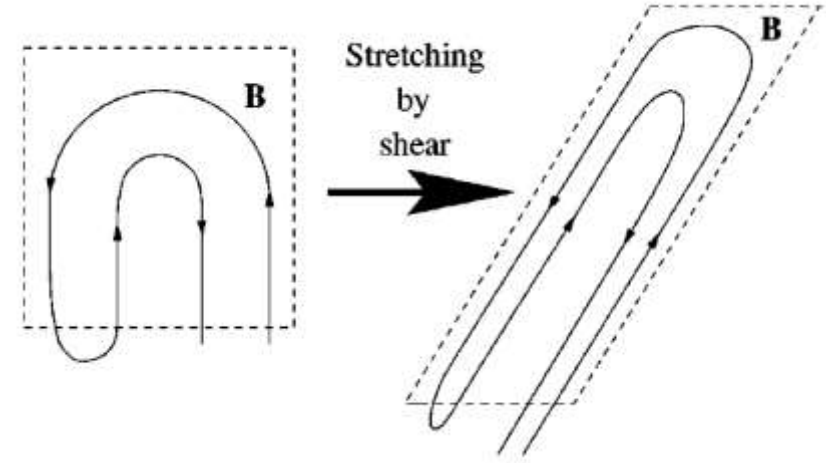
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}$$

Транспорт магнитного поля в идеально проводящей среде



$$\frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{v}$$

Динамика инфинитезимальной жидкой частицы

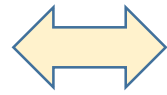


Проблема турбулентного мелкомасштабного магнитного динамо в сильно проводящей среде

Основной механизм мелкомасштабного динамо: вмороженность магнитного поля

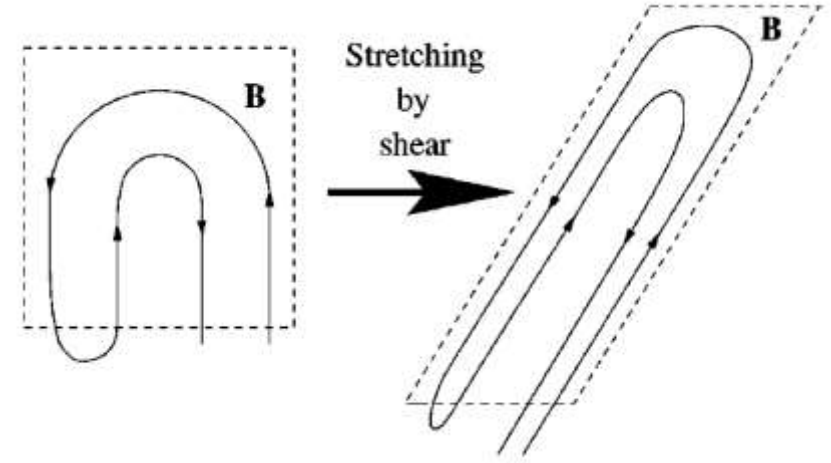
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}$$

Транспорт магнитного поля в идеально проводящей среде



$$\frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{v}$$

Динамика инфинитезимальной жидкой частицы

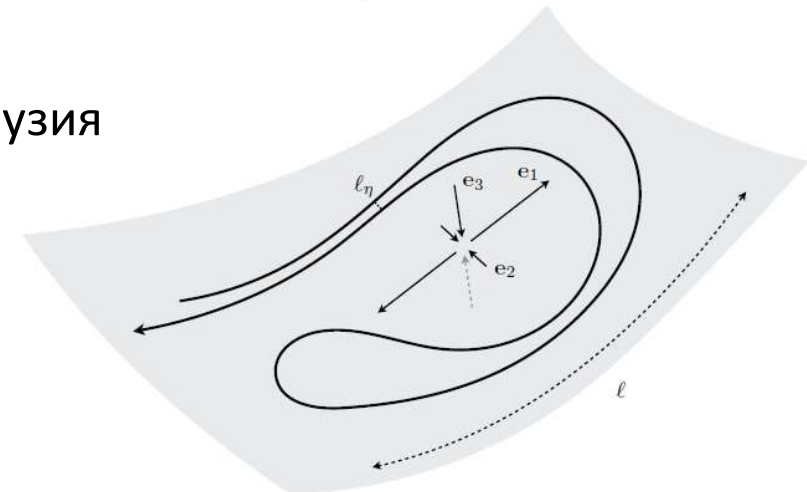


Наличие магнитной диффузии (конечность проводимости) замедляет рост

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

Вклад конечной проводимости выражается наличием диффузии

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad \text{— магнитная диффузия}$$



Кинематическое динамо в изотропном турбулентном потоке

Система МГД уравнений ($\rho = 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p_B + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \end{cases}$$

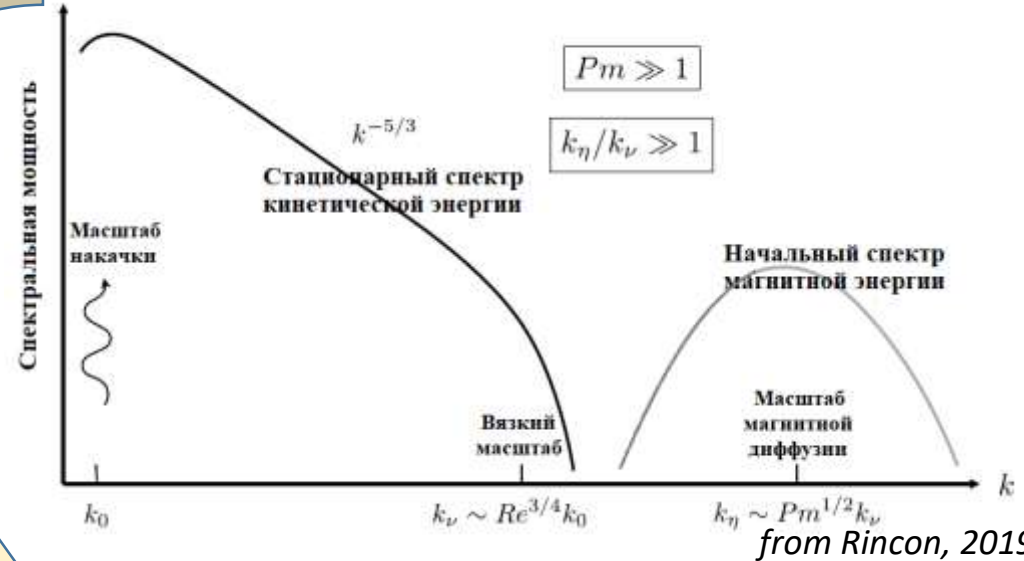
\mathbf{f}_v – стационарный гауссов изотропный процесс

$$p_B = p + \frac{B^2}{8\pi} \quad \text{– магнитное давление}$$

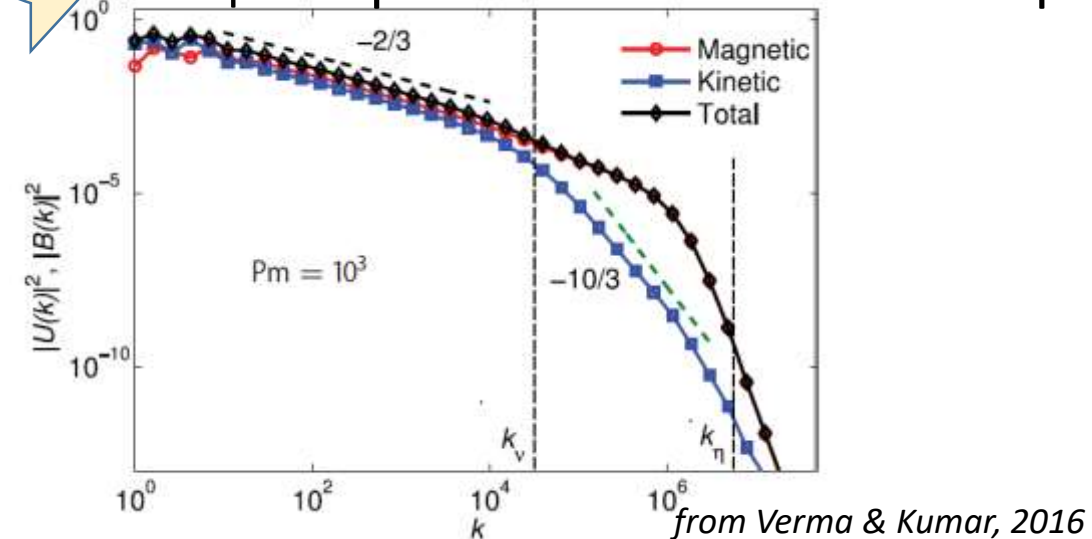
$\nu \Delta \mathbf{v} \gg \eta \Delta \mathbf{B}$ – высокая проводимость

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} \gg 1$$

Колмогоровский начальный спектр



Стационарный нелинейный спектр



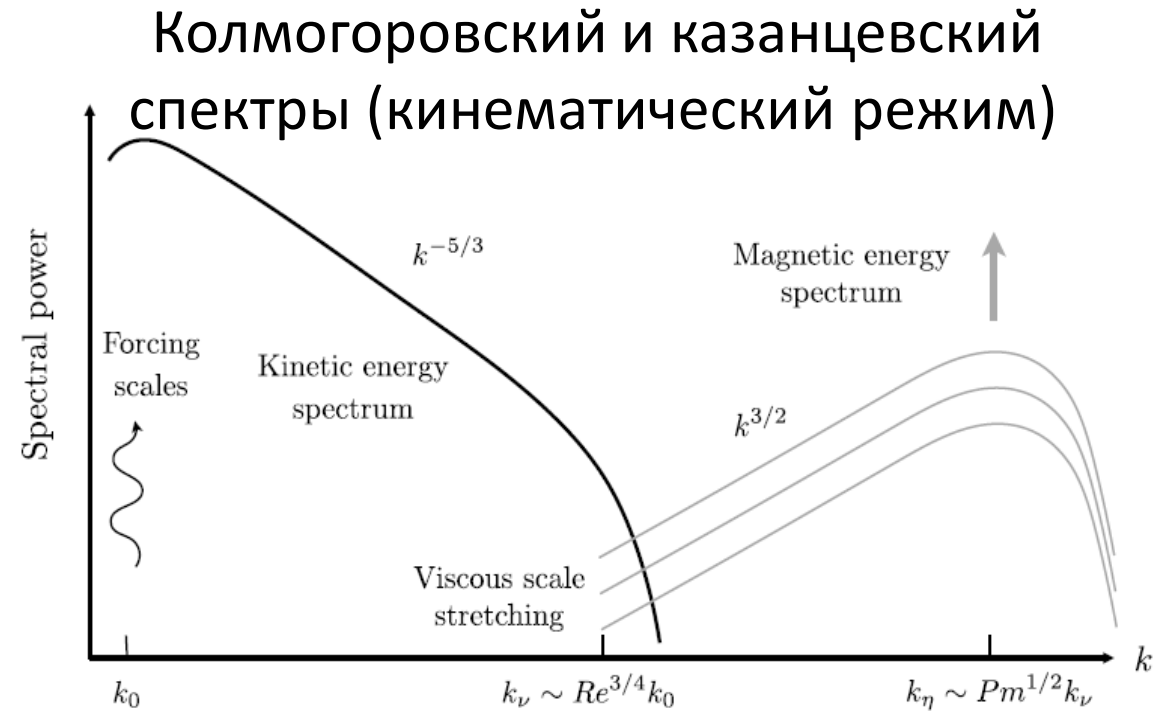
Кинематическое динамо в изотропном турбулентном потоке

Система МГД уравнений ($\rho = 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}}_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ - квази-лагранжева СО}} = \underbrace{(\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p_B + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \end{cases}$$

$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \gg (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}$ – кинематический режим
(без обратного влияния)

$$v_i(\mathbf{r}, t) = v_i(\mathbf{0}, t) + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t)}_{A_{ik}(t)} \cdot r_k \text{ – режим Бэтчелора}$$



Главный результат: отброшенный член $\mathbf{f} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}$ (сила Лоренца) остается мал даже когда градиенты магнитного поля становятся сравнимы с градиентами скорости. Он не оказывает обратного влияния на поле скорости.

Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

диффузионный масштаб $l_\eta = \sqrt{\eta / \lambda_1}$

направление расширения/сжатия

магнитная диффузия

$$A_{ik}(t) = \frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t) \text{ – стационарный изотропный процесс, } A_{ii} = 0$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q} \mathbf{A}$$

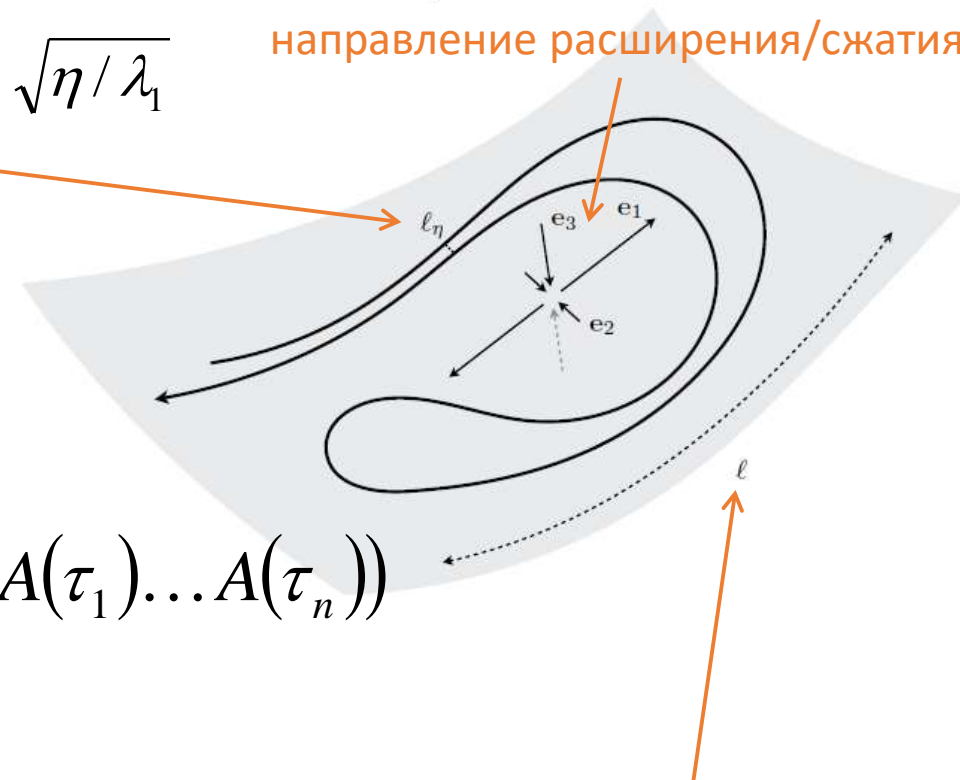
$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}$$

$$\det \mathbf{Q} = 1$$

Формальное решение: T-экспонента

$$\mathbf{Q} = T^+ e^{-\int \mathbf{A} d\tau} = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n T^+(A(\tau_1) \dots A(\tau_n))$$

Общее решение:
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Q}^{-1} \int \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k} \mathbf{Q} \mathbf{r} - \eta \mathbf{k} \left(\int_0^t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T d\tau \right) \mathbf{k}^T} d\mathbf{k}$$



корреляционная длина

$$\langle \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) \tilde{B}_m(\mathbf{k}', 0) \rangle_{i.c.} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-k^2 l^2} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n)$$

$\mathbf{A}(t)$ обладает заданным ляпуновским спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

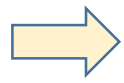
$$\frac{1}{t} \langle \ln \mathbf{B}^2(t) \rangle = \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

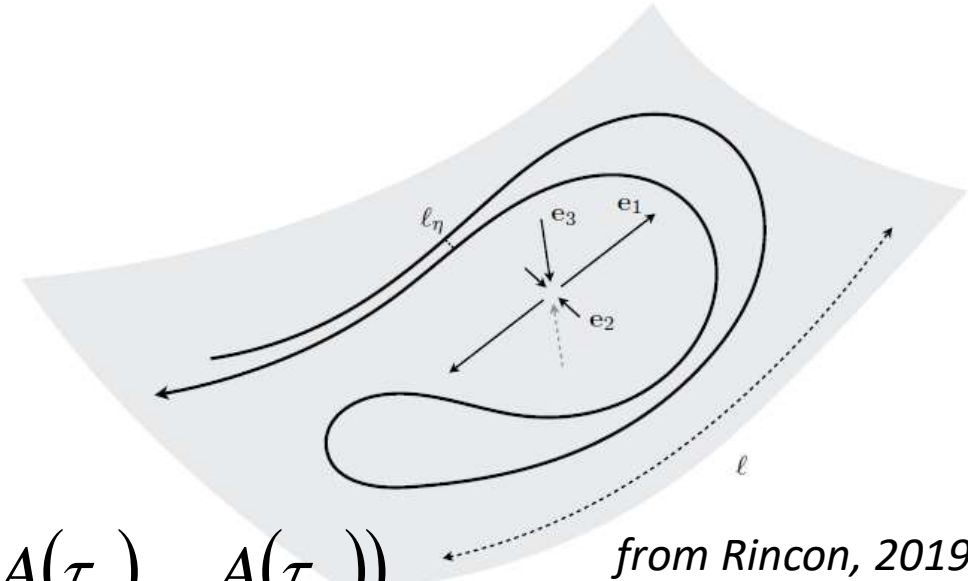
$$A_{ik}(t) = \frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t) \text{ – стационарный изотропный процесс, } A_{ii} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= -\mathbf{Q} \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}(0) &= \mathbf{E} \\ \det \mathbf{Q} &= 1 \end{aligned} \right\}$$



Формальное решение: T-экспонента

$$\mathbf{Q} = T^+ e^{-\int \mathbf{A} d\tau} = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n T^+(A(\tau_1) \dots A(\tau_n))$$



from Rincon, 2019

$$\left\langle \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) \tilde{B}_m(\mathbf{k}', 0) \right\rangle_{i.c.} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-k^2 l^2} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n)$$

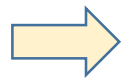
$\mathbf{A}(t)$ обладает заданным ляпуновским спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

Классическая постановка задачи о развитии однородных возмущений

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{A} \mathbf{r} \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B} \quad \tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}$$

$$A_{ik}(t) = \frac{\partial v_i}{\partial r_k}(t) \text{ – стационарный изотропный процесс, } A_{ii} = 0$$

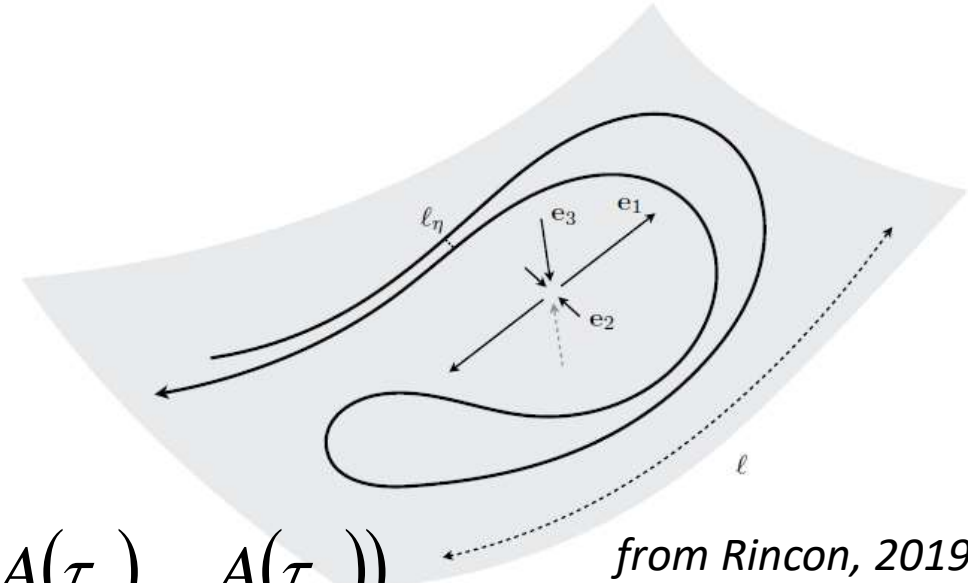
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q} \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E} \\ \det \mathbf{Q} = 1 \end{cases}$$



Формальное решение: T-экспонента

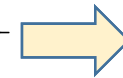
$$\mathbf{Q} = T^+ e^{-\int \mathbf{A} d\tau} = \sum_n \frac{1}{n!} \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n T^+(A(\tau_1) \dots A(\tau_n))$$

$$\tilde{f}_m(\mathbf{r}, t) = \int \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{r} - \eta \mathbf{k} \left(\int_0^t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T d\tau \right) \mathbf{k}^T} d\mathbf{k} Q_{ml}^{-1} \int i k'_n \tilde{B}_l(\mathbf{k}', 0) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{Q} \mathbf{r} - \eta \mathbf{k}' \left(\int_0^t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T d\tau \right) \mathbf{k}'^T} d\mathbf{k}'$$



from Rincon, 2019

$$\langle \tilde{B}_n(\mathbf{k}, 0) \tilde{B}_m(\mathbf{k}', 0) \rangle_{i.c.} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-k^2 l^2} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n)$$



$$\langle \tilde{f}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = ?$$

$\mathbf{A}(t)$ обладает заданным ляпуновским спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

Вырождение обратного воздействия магнитного поля на скорость

Временный рост на стадии идеальной проводимости $t \ll |\lambda_3^{-1}| \ln l / l_\eta$:

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} \propto e^{2\zeta_1 t} \quad \frac{1}{t} \langle \ln \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle = 2\lambda_1 > 0$$

Schekochihin et al., 2004

Затухание на достаточно больших временах $t > |\lambda_3^{-1}| \ln l / l_\eta$:

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle_{i.c.} \propto \begin{cases} e^{-2\zeta_2 t} & \zeta_2 \geq 0 \\ e^{4\zeta_2 t} & \zeta_2 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} \langle \ln \tilde{\mathbf{f}}^2(t) \rangle = \begin{cases} -2\lambda_2 & \lambda_2 \geq 0 \\ 4\lambda_2 & \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Zybin, Il'yn, Kopyev, Sirota, EPL 2020

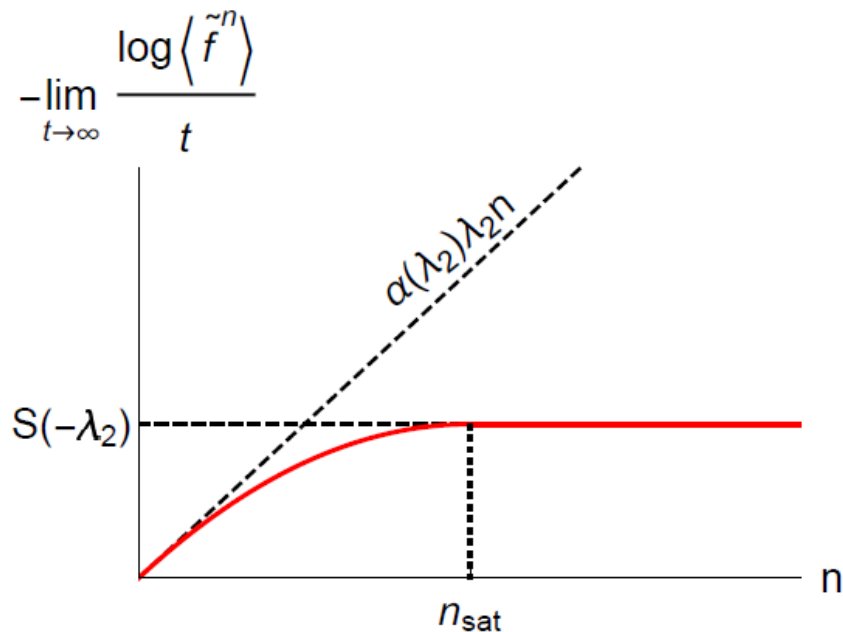
Вырождение обратного воздействия магнитного поля на скорость

Гауссово статистически обратимое поле скорости ($\lambda_2 = 0$)

$$\langle \tilde{f}^n(t) \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} d\zeta_2 e^{-\zeta_2^2/2Dt} (e^{-2n\zeta_2} + e^{-n\zeta_2}) \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Zybin, Il'yn, Kopyev, Sirota, EPL 2020

Произвольная необратимая статистика ($\lambda_2 \neq 0$)



$$\alpha(\lambda_2) = \begin{cases} -1 & \lambda_2 < 0 \\ 2 & \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

$$n_{\text{sat}} = \frac{S'(-\lambda_2)}{\alpha(\lambda_2)}$$

Zybin, Il'yn, Kopyev, Sirota, EPL 2020

Выводы

- Оказалось, что нарастание магнитного поля в рассмотренной постановке не приводит к обратному влиянию на поле скорости и это влияние даже уменьшается

$$\tilde{f} \equiv (B\nabla)B \neq B^2/l_\eta$$

- Одной из причин вырождения обратного влияния является вытягивание магнитного поля вдоль линии растяжения (кинематический эффект)
- Другая причина связана с конечной проводимостью потока. Так, в идеально проводящей среде ($\eta=0$) сила Лоренца экспоненциально нарастает. Однако наличие даже малой диффузии существенно уменьшает инкремент нарастания магнитного поля, что приводит к затуханию всех моментов силы Лоренца (динамический эффект)
- Затухание происходит на временах $t > \left| \lambda_3^{-1} \right| \ln l / l_\eta$. Таким образом, сила Лоренца остается малой в случае сколь угодно малой конечной диффузии, если начальные возмущения достаточно малы
- Вырождение обратного воздействия имеет место до тех пор, пока справедливо линейное разложение скорости: $t < \lambda_1^{-1} \ln l_v / l$

Параметры теории

$$Re = \frac{u_0 l_0}{\nu} \quad \text{– число Рейнольдса}$$

$$Rm = \frac{u_0 l_0}{\eta} \quad \text{– магнитное число Рейнольдса}$$

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} = \frac{Rm}{Re} \quad \text{– магнитное число Прандтля}$$

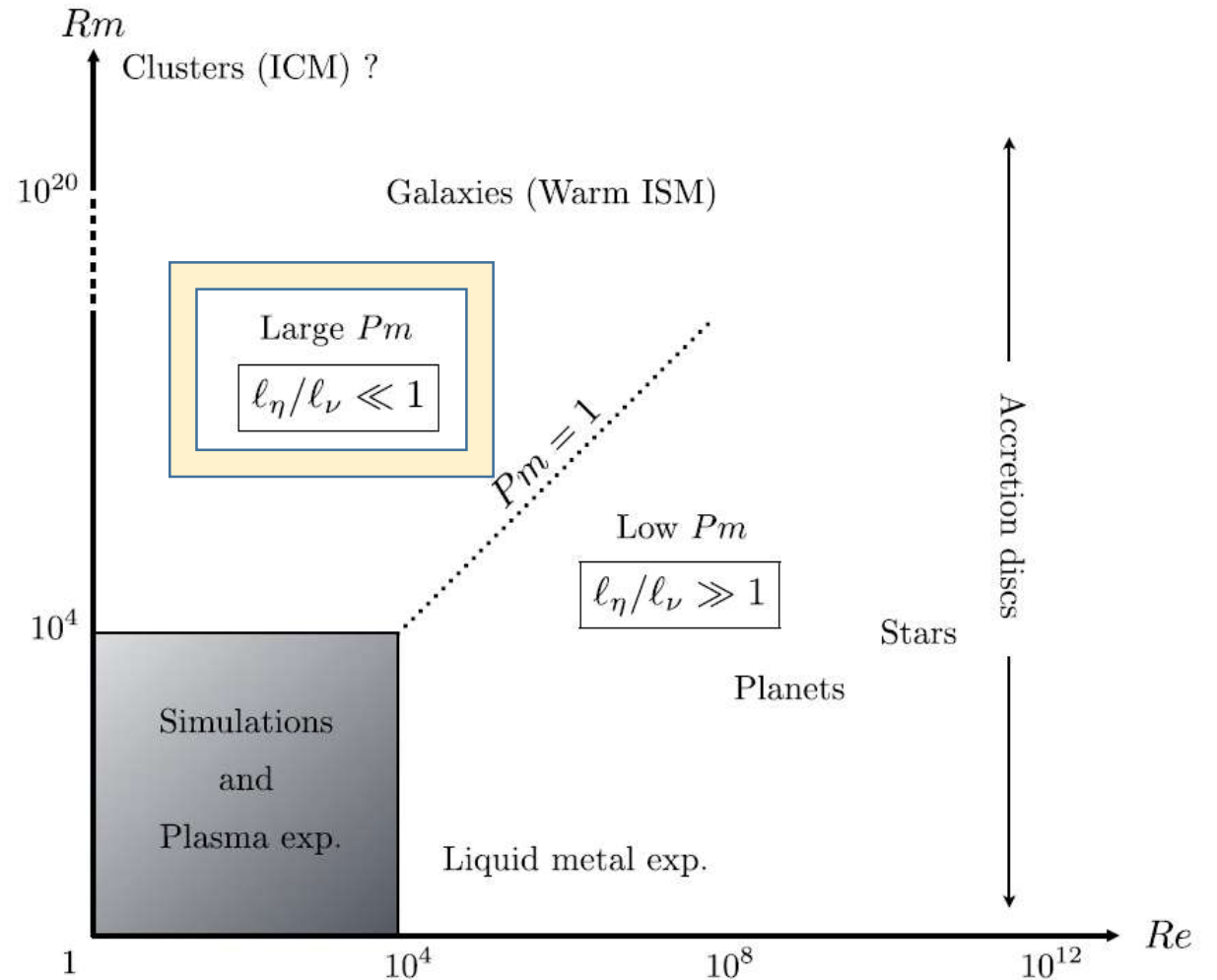
ν – кинематическая вязкость

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad \text{– магнитная диффузия}$$

σ – проводимость жидкости (плазмы)

$$l_\nu \sim Re^{-3/4} l_0 \quad \text{– вязкий масштаб}$$

$$l_\eta \sim \begin{cases} Pm^{-1/2} l_\nu, & Pm \gg 1 \\ Pm^{-3/4} l_\nu, & Pm \ll 1 \end{cases} \quad \text{– масштаб магнитной диффузии}$$



Энергетический парадокс

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p_B + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \langle B^2 \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \frac{\eta}{4\pi} \langle (\nabla \mathbf{B})^2 \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle - \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle + \langle \mathbf{v} \mathbf{f}_v \rangle \end{cases}$$

↕ Обмен энергией

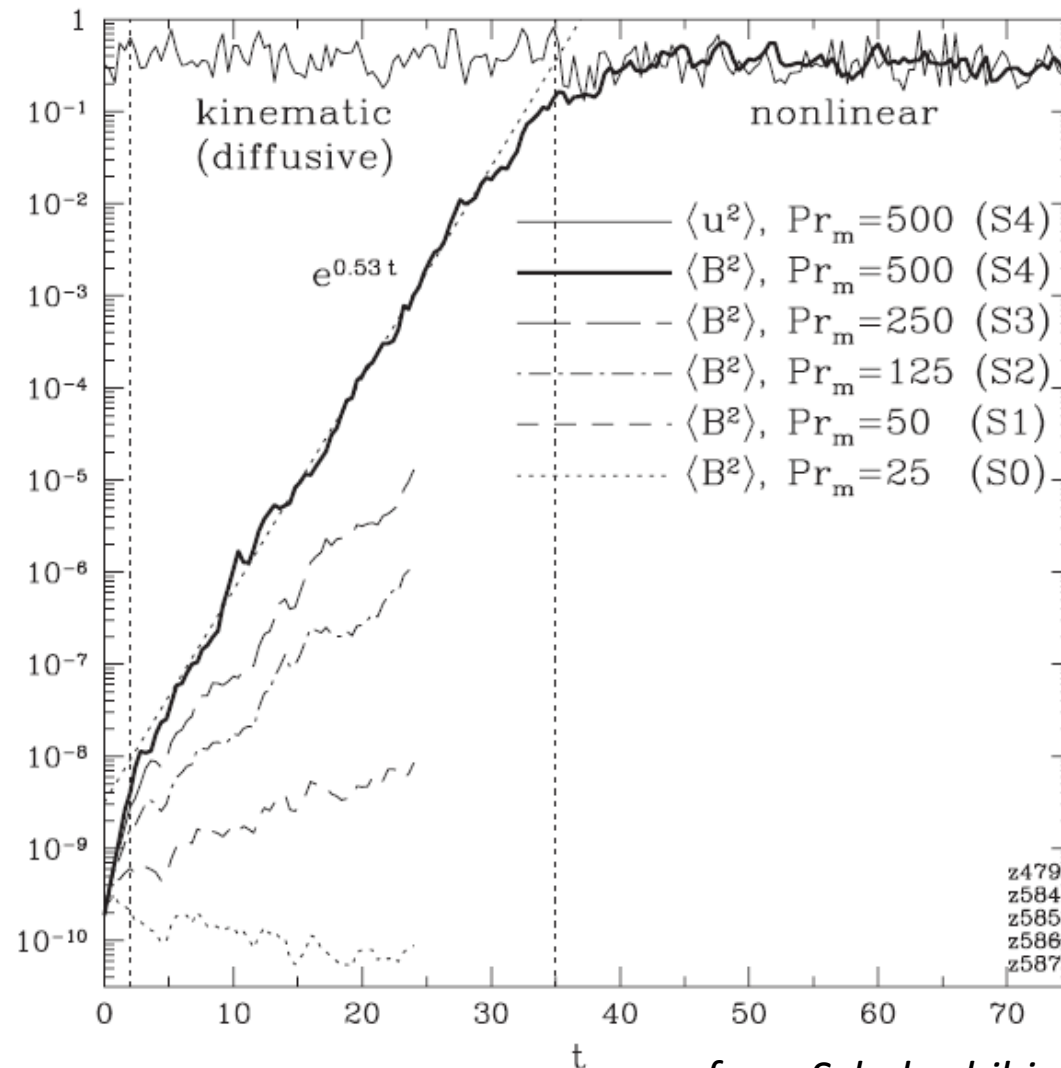
$$\lambda \underbrace{\langle \mathbf{v} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \rangle}_{\text{растет экспоненциально}} \leq \frac{1}{2} \left(\underbrace{\lambda^2 \langle \mathbf{v}^2 \rangle}_{\text{стационарно}} + \underbrace{\langle ((\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B})^2 \rangle}_{\text{затухает}} \right)$$

растет экспоненциально

стационарно

затухает

$\langle \mathbf{v}^2 \rangle$ – бесконечно в режиме Бэтчелора!



from Schekochihin, 2004