Неоднородные течения жидкости в задачах геофизической гидродинамики

Бурмашева Н.В.
Институт машиноведения УрО РАН
Уральский федеральный университет имени первого президента России Б.Н. Ельцина

Просвиряков Е.Ю.
Институт машиноведения УрО РАН
Сколковский институт науки и технологий
Уральский федеральный университет имени первого президента России Б.Н. Ельцина

Система уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{V} + \left(\boldsymbol{V},\nabla\right)\cdot\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V} = -\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{V},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{2}\left(f_3, f_2, f_1\right)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0. \qquad (1)$$

$$f_1 = 2\Omega\cos\varphi_1$$
$$f_2 = 2\Omega\cos\varphi_2$$
$$f_3 = 2\Omega\cos\varphi_3$$

- **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // **Труды Института математики УрО РАН. 2020.** Том 26 № 2. С. 79-87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87
- **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // **Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2020.** Т. 32. С. 33-48. DOI DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
- **Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.** Исследование стратификации гидродинамических полей для слоистых течений вертикально завихренной жидкости // **DReaM. 2020.** Вып. 3. С. 29-46. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.

Класс решений (класс Линя-Сидорова-Аристова):

$$V_x = U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y,$$

$$V_y = V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y,$$

$$V_z = 0, \qquad (2)$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y + P_{12}(z)xy + P_{11}(z)\frac{x^2}{2} + P_{22}(z)\frac{y^2}{2}.$$

Переопределенная редуцированная система:

$$P_{11}' = 0, P_{12}' = 0, P_{22}' = 0; \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\nu u_1'' &= u_1^2 + (u_2 - f_1) v_1 + P_{11}, \\
\nu u_2'' &= u_1 u_2 + (u_2 - f_1) v_2 + P_{12}, \\
\nu v_1'' &= u_1 (v_1 + f_1) + v_1 v_2 + P_{12}, \\
\nu v_2'' &= u_2 (v_1 + f_1) + v_2^2 + P_{22}, \\
u_1 + v_2 &= 0;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$P_1' = f_2 u_1 - f_3 v_1, \quad P_2' = f_2 u_2 - f_3 v_2; \tag{5}$$

$$\nu U'' = U u_1 + V (u_2 - f_1) + P_1, \qquad \nu V'' = U (v_1 + f_1) + V v_2 + P_2; \tag{6}$$

$$P_0' = f_2 U - f_3 V. \tag{7}$$

Теорема.

Если существует такое $c \in R$, *что выполняется равенство*

$$c^2 f_1^{\,2} + 2cf_1^{\,3} - P_{11}^{\;2} - 4P_{12}^{\;2} - 2f_1^{\,2}\left(P_{11} - P_{22}\right) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^{\;2} = 0,$$

то переопределенная система (4) является разрешимой, при этом пространственные ускорения принимают постоянные значения:

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f_1}, \quad u_2 = \frac{P_{11} - P_{22} - f_1 c}{2f_1}, \quad v_1 = \frac{P_{11} - P_{22} + f_1 c}{2f_1}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f_1}.$$

$$P_1' = f_2 u_1 - f_3 v_1,$$
$$P_2' = f_2 u_2 - f_3 v_2;$$

Точное решение.

$$P_1 = \alpha_1 z + p_1, \; P_2 = \alpha_2 z + p_2,$$

где $\alpha_1 = f_2 u_1 - f_3 v_1$, $\alpha_2 = f_3 u_1 + f_2 u_2$, а p_1, p_2 – постоянные интегрирования.

- Пусть $v_1 + f_1 = 0$:

$$\nu U'' = U u_1 + V(u_2 - f_1) + P_1,$$
$$\nu V'' = U(v_1 + f_1) + V v_2 + P_2;$$

$$P_0' = f_2 U - f_3 V.$$

Если $u_1 = 0$:

$$U = \frac{(u_2 - f_1)\alpha_2}{120\nu^2} z^5 + \frac{p_2(u_2 - f_1)}{24\nu^2} z^4 + \frac{(C_2(u_2 - f_1) + \alpha_1)}{6\nu} z^3 + \frac{(C_1(u_2 - f_1) + p_1)}{2\nu} z^2 + C_4 z + C_3;$$

$$P_0 = \frac{f_2 \alpha_2 (u_2 - f_1)}{720\nu^2} z^6 + \frac{f_2 p_2 (u_2 - f_1)}{120\nu^2} z^5 + \frac{f_2(C_2(u_2 - f_1) + \alpha_1) - f_3 \alpha_2}{24\nu} z^4 +$$
$$+ \frac{f_2(C_1(u_2 - f_1) + p_1) - f_3 p_2}{6\nu} z^3 + \frac{C_4 f_2 - C_2 f_3}{2} z^2 + (C_3 f_2 - C_1 f_3) z + C_5,$$

Если $u_1 > 0$:

$$V = \frac{\alpha_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz);$$

$$U = -\frac{\alpha_2 (u_2 - f_1) + \alpha_1 u_1}{u_1^2} z - \frac{p_2 (u_2 - f_1) + p_1 u_1}{u_1^2} - \frac{C_1 (u_2 - f_1)}{2u_1} \sin(kz) - \frac{C_2 (u_2 - f_1)}{2u_1} \cos(kz) +$$
$$+ C_3 \exp(-kz) + C_3 \exp(kz);$$

$$P_0 = -\frac{f_3 \alpha_2 u_1 + f_2 ((u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1)}{2u_1^2} z^2 - \frac{f_3 p_2 u_1 + f_2 ((u_2 - f_1) p_2 + p_1 u_1)}{u_1^2} z + C_5 -$$
$$- \frac{C_2 (2 f_3 u_1 + f_2 (u_2 - f_1))}{2ku_1} \sin(kz) + \frac{C_1 (2 f_3 u_1 + f_2 (u_2 - f_1))}{2ku_1} \cos(kz) -$$
$$- \frac{C_3 f_2}{k} \exp(-kz) + \frac{C_4 f_2}{k} \exp(kz).$$

Здесь $k = \sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}, & \text{если } u_1 \ge 0, \\ \sqrt{\frac{(-u_1)}{\nu}}, & \text{если } u_1 < 0. \end{cases}$

Если $u_1 < 0$:

$$V = \frac{\alpha_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sinh(kz) + C_2 \cosh(kz);$$

$$U = -\frac{(u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1}{u_1^2} z - \frac{(u_2 - f_1) p_2 + p_1 u_1}{u_1^2} - \frac{C_1 (u_2 - f_1)}{2u_1} \sinh(kz) - \frac{C_2 (u_2 - f_1)}{2u_1} \cosh(kz) +$$
$$+ C_3 \sin(kz) + C_3 \cos(kz);$$

$$P_0 = -\frac{f_3 \alpha_2 u_1 + f_2 ((u_2 - f_1)\alpha_2 + \alpha_1 u_1)}{2u_1^2} z^2 - \frac{f_3 p_2 u_1 + f_2 ((u_2 - f_1) p_2 + u_1 p_1)}{u_1^2} z + C_5 -$$
$$- \frac{C_2 (2 f_3 u_1 + f_2 (u_2 - f_1))}{2ku_1} \sinh(kz) - \frac{C_1 (2 f_3 u_1 + f_2 (u_2 - f_1))}{2ku_1} \cosh(kz).$$

- <u>Пусть $v_1+f_1 \neq 0$.</u>

<u>Если $S=0$:</u>

$$V=\frac{\alpha_1\left(v_1+f_1\right)-u_1\alpha_2}{120\nu^2}z^5+\frac{p_1\left(v_1+f_1\right)-u_1p_2}{24\nu^2}z^4+C_4z^3+C_3z^2+C_2z+C_1;$$

$$U=\frac{u_1\left(\alpha_1\left(f_1+v_1\right)-\alpha_2u_1\right)}{120\nu^2\left(f_1+v_1\right)}z^5+\frac{u_1\left(p_1\left(f_1+v_1\right)-p_2u_1\right)}{24\nu^2\left(f_1+v_1\right)}z^4+\frac{6\nu C_4u_1+\alpha_1\left(f_1+v_1\right)-\alpha_2u_1}{6\nu\left(f_1+v_1\right)}z^3+$$

$$+\frac{2\nu C_3u_1+p_1\left(f_1+v_1\right)-p_2u_1}{2\nu\left(f_1+v_1\right)}z^2+\frac{\left(6\nu C_4+C_2u_1-\alpha_2\right)}{f_1+v_1}z+\frac{2\nu C_3-p_2+C_1u_1}{f_1+v_1};$$

$$P_0=-\frac{\left(f_1f_3-f_2u_1+f_3v_1\right)\left(f_1\alpha_1+v_1\alpha_1-u_1\alpha_2\right)}{720\nu^2\left(f_1+v_1\right)}z^6-\frac{\left(f_1f_3-f_2u_1+f_3v_1\right)\left(f_1p_1-p_2u_1+p_1v_1\right)}{120\nu^2\left(f_1+v_1\right)}z^5+$$

$$+\frac{-6\nu C_4\left(f_1f_3-f_2u_1+f_3v_1\right)+f_2\left(f_1\alpha_1+v_1\alpha_1-u_1\alpha_2\right)}{24\nu\left(f_1+v_1\right)}z^4+$$

$$+\frac{-2\nu C_3\left(f_1f_3-f_2u_1+f_3v_1\right)+f_2\left(f_1p_1-p_2u_1+p_1v_1\right)}{6\nu\left(f_1+v_1\right)}z^3-$$

$$-\frac{-6\nu C_4f_2+C_2\left(f_1f_3-f_2u_1+f_3v_1\right)+f_2\alpha_2}{2\left(f_1+v_1\right)}z^2-\frac{-2\nu C_3f_2+f_2p_2+C_1\left(f_1f_3-f_2u_1+f_3v_1\right)}{f_1+v_1}z+C_5$$

$$S=-\frac{u_1^2+\left(u_2-f_1\right)\left(v_1+f_1\right)}{\nu^2}$$

Если $S>0$:

$$V = C_1\cosh(kz)\cos(kz)+C_2\cosh(kz)\sin(kz)+C_3\sinh(kz)\cos(kz)+C_4\sinh(kz)\sin(kz)+$$
$$+\frac{\alpha_1(v_1+f_1)-u_1\alpha_2}{Sv^2}z+\frac{p_1(v_1+f_1)-u_1p_2}{Sv^2};$$

$$U=\frac{\left(2k^2vC_4+C_1u_1\right)}{f_1+v_1}\cosh(kz)\cos(kz)+\frac{\left(-2k^2vC_3+C_2u_1\right)}{f_1+v_1}\cosh(kz)\sin(kz)+$$
$$+\frac{\left(2k^2vC_2+C_3u_1\right)}{f_1+v_1}\sinh(kz)\cos(kz)+\frac{\left(-2k^2vC_1+C_4u_1\right)}{f_1+v_1}\sinh(kz)\sin(kz)+$$
$$+\frac{f_1u_1\alpha_1+u_1v_1\alpha_1-Sv^2\alpha_2-u_1^2\alpha_2}{Sv^2\left(f_1+v_1\right)}z+\frac{-Sv^2p_2+f_1p_1u_1-p_2u_1^2+p_1u_1v_1}{Sv^2\left(f_1+v_1\right)};$$

$$P_0=\frac{C_3\left(f_2\left(2k^2v+u_1\right)-f_3\left(f_1+v_1\right)\right)+C_2\left(f_2\left(2k^2v-u_1\right)+f_3\left(f_1+v_1\right)\right)}{2k\left(f_1+v_1\right)}\cosh(kz)\cos(kz)+$$
$$+\frac{C_4\left(f_2\left(2k^2v+u_1\right)-f_3\left(f_1+v_1\right)\right)-C_1\left(f_2\left(2k^2v-u_1\right)+f_3\left(f_1+v_1\right)\right)}{2k\left(f_1+v_1\right)}\cosh(kz)\sin(kz)+$$
$$+\frac{C_1\left(f_2\left(2k^2v+u_1\right)-f_3\left(f_1+v_1\right)\right)+C_4\left(f_2\left(2k^2v-u_1\right)+f_3\left(f_1+v_1\right)\right)}{2k\left(f_1+v_1\right)}\sinh(kz)\cos(kz)+$$
$$+\frac{C_2\left(f_2\left(2k^2v+u_1\right)-f_3\left(f_1+v_1\right)\right)-C_3\left(f_2\left(2k^2v-u_1\right)+f_3\left(f_1+v_1\right)\right)}{2k\left(f_1+v_1\right)}\sinh(kz)\sin(kz)+$$
$$+\frac{-\left(f_1+v_1\right)\left(-f_2u_1+f_3\left(f_1+v_1\right)\right)\alpha_1+\left(-f_2\left(Sv^2+u_1^2\right)+f_3u_1\left(f_1+v_1\right)\right)\alpha_2}{2Sv^2\left(f_1+v_1\right)}z^2-$$
$$-\frac{Sv^2f_2p_2+\left(-f_2u_1+f_3\left(f_1+v_1\right)\right)\left(-p_2u_1+p_1\left(f_1+v_1\right)\right)}{Sv^2\left(f_1+v_1\right)}+C_5.$$

здесь $k^4=S/4$.

Если $S<0$:

$$V = C_1\cos(kz) + C_2\sin(kz) + C_3\cosh(kz) + C_4\sinh(kz) +$$

$$+\frac{\alpha_1(v_1+f_1)-u_1\alpha_2}{S\nu^2}z+\frac{p_1(v_1+f_1)-u_1p_2}{S\nu^2};$$

$$U=\frac{C_1\left(u_1-k^2\nu\right)}{f_1+v_1}\cos(kz)+\frac{C_2\left(u_1-k^2\nu\right)}{f_1+v_1}\sin(kz)+\frac{C_3\left(u_1+k^2\nu\right)}{f_1+v_1}\cosh(kz)+\frac{C_4\left(u_1+k^2\nu\right)}{f_1+v_1}\sinh(kz)+$$

$$+\frac{u_1\left((f_1+v_1)\alpha_1-u_1\alpha_2\right)-S\nu^2\alpha_2}{S\nu^2(f_1+v_1)}z+\frac{u_1\left(-p_2u_1+p_1(f_1+v_1)\right)-S\nu^2p_2}{S\nu^2(f_1+v_1)};$$

$$P_0=\frac{C_4\left(f_2\left(k^2\nu+u_1\right)-f_3(f_1+v_1)\right)}{k(f_1+v_1)}\cosh(kz)+\frac{C_3\left(f_2\left(k^2\nu+u_1\right)-f_3(f_1+v_1)\right)}{k(f_1+v_1)}\sinh(kz)+$$

$$+\frac{C_2\left(f_2\left(k^2\nu-u_1\right)+f_3(f_1+v_1)\right)}{k(f_1+v_1)}\cos(kz)-\frac{C_1\left(f_2\left(k^2\nu-u_1\right)+f_3(f_1+v_1)\right)}{k(f_1+v_1)}\sin(kz)+$$

$$+\frac{-(f_1+v_1)\left(-f_2u_1+f_3(f_1+v_1)\right)\alpha_1+\left(-f_2\left(S\nu^2+u_1^2\right)+f_3u_1(f_1+v_1)\right)\alpha_2}{2S\nu^2(f_1+v_1)}z^2-$$

$$-\frac{S\nu^2f_2p_2+\left(-f_2u_1+f_3(f_1+v_1)\right)\left(-p_2u_1+p_1(f_1+v_1)\right)}{S\nu^2(f_1+v_1)}z+C_5.$$

Исследование разрешимости системы уравнений тепловой конвекции.

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x,$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

$$V_x = U(z) + u_1(z)\,x + u_2(z)\,y,$$

$$V_y = V(z) + v_1(z)\,x + v_2(z)\,y,$$

$$T = T_0(z) + T_1(z)\,x + T_2(z)\,y,$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)\,x + P_2(z)\,y.$$

$$u_1^2 + u_2 v_1 = \nu u_1'',$$
$$u_1 u_2 + u_2 v_2 = \nu u_2'',$$
$$u_1 v_1 + v_1 v_2 = \nu v_1'',$$
$$u_2 v_1 + v_2^2 = \nu v_2'',$$
$$u_1 + v_2 = 0;$$

$$u_1 T_1 + v_1 T_2 = \chi T_1'',$$
$$u_2 T_1 + v_2 T_2 = \chi T_2'';$$

$$P_1' = g\beta T_1,$$
$$P_2' = g\beta T_2;$$

$$U u_1 + V u_2 = -P_1 + \nu U'',$$
$$U v_1 + V v_2 = -P_2 + \nu V'';$$

$$U T_1 + V T_2 = \chi T_0'',$$
$$P_0' = g\beta T_0.$$

Теорема 1.

Переопределенная редуцированная система имеет нетривиальное точное решение в выбранном классе, являющееся точным решением системы уравнений тепловой конвекции, если пространственные ускорения удовлетворяют соотношениям:

$$u_1 = u\cos\vartheta\sin\vartheta, \quad u_2 = u\cos^2\vartheta, \quad v_1 = -u\sin^2\vartheta,$$

где u — функция, удовлетворяющая уравнению $u'' = 0$, а ϑ — некоторое число.

Теорема 2.

При любых значениях параметров u, ϑ, определяющих вид пространственных ускорений, редуцированная система имеет нетривиальное точное решение, притом единственное.

Пример.

$$V_x = U(z) + u(z)y, \quad V_y = V(z),$$
$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y; \quad T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y.$$

$$u'' = 0, \quad T_1'' = 0, \quad P_1' = g\beta T_1, \quad \chi T_2'' = uT_1, \quad P_2' = g\beta T_2,$$
$$\nu V'' = P_2, \quad \nu U'' = Vu + P_1, \quad \chi T_0'' = UT_1 + VT_2, \quad P_0' = g\beta T_0.$$

$$U(0) = V(0) = 0, \quad \eta U'(h) = \xi_1, \quad \eta V'(h) = \xi_2,$$
$$T_0(0) = 0, \quad T_1(0) = A, \quad T_2(0) = B,$$
$$T_0(h) = \vartheta, \quad T_1(h) = C, \quad T_2(h) = D,$$
$$P_0(h) = P_1(h) = P_2(h) = 0.$$

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, №3. С. 528–541. DOI: 10.14498/vsgtu1770

$$T_1 = A + (C-A)Z;\; T_2 = -\frac{\Omega h^2}{6\chi}(1-Z)Z\big((C+2A)+(C-A)Z\big);$$

$$\begin{aligned}
T_0 = \vartheta Z + \frac{4Z(1-Z)}{12!\eta\nu^2\chi^3}\Big\{&-23760 g\beta\eta\nu\chi^2 h^5 \times \\
&\times\big[5A^2(2-Z)(1+2Z-Z^2)(4-2Z+Z^2)+ \\
&+5AC(26+26Z-30Z^2+5Z^3+5Z^4-2Z^5)+ \\
&+C^2(82+82Z+82Z^2-58Z^3+5Z^4+5Z^5)\big]- \\
&-3g\beta\eta\nu\Omega^2h^9\big[2A^2(2-Z)(912+1368Z+1596Z^2-3680Z^3+ \\
&+1998Z^4+294Z^5-833Z^6+336Z^7-42Z^8)+ \\
&+AC(7851+7851Z+7851Z^2-27569Z^3+15397Z^4+ \\
&+921Z^5-3479Z^6-14Z^7+756Z^8-168Z^9)+ \\
&+2C^2(2088+2088Z+2088Z^2-4072Z^3-607Z^4+ \\
&+1857Z^5-343Z^6-343Z^7+42Z^8+42Z^9)\big]- \\
&-g\beta\eta\chi\Omega^2h^9\big[A^2(2-Z)(19456+29184Z-9512Z^2-7080Z^3+ \\
&+3838Z^4-636Z^5-398Z^6+216Z^7-27Z^8)+ \\
&+AC(82985+82985Z-23935Z^2-14035Z^3+8141Z^4- \\
&-637Z^5-637Z^6-142Z^7+243Z^8-54Z^9)+ \\
&+C^2(43268+43268Z+43268Z^2-10192Z^3-10192Z^4+ \\
&+4592Z^5-358Z^6-358Z^7+27Z^8+27Z^9)\big]- \\
&-9979200h^3\nu^2\xi_1\chi^2\big[A(1+Z-Z^2)+C(1+Z+Z^2)\big]+ \\
&+332640h^5\nu^2\xi_2\chi\Omega\big[A(3+3Z+3Z^2-7Z^3+2Z^4)+ \\
&+C(3+3Z+3Z^2-2Z^3-2Z^4)\big]+ \\
&+332640h^5\nu\xi_2\chi^2\Omega\big[A(14+14Z-16Z^2-Z^3+2Z^4)+ \\
&+C(13+13Z+13Z^2-2Z^3-2Z^4)\big]\Big\}.
\end{aligned}$$

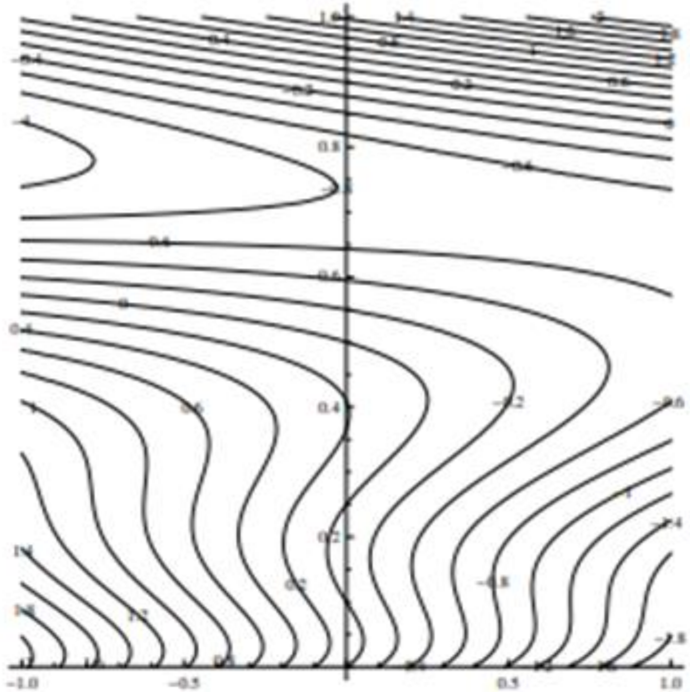

Figure . Isolines of the temperature T in the section $y = 0$

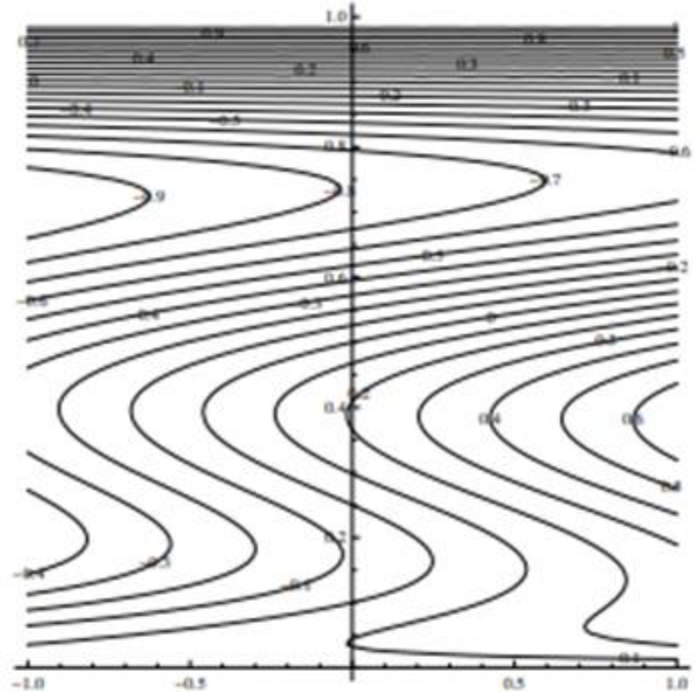

Figure . Isolines of the temperature T in the section $x = 0$

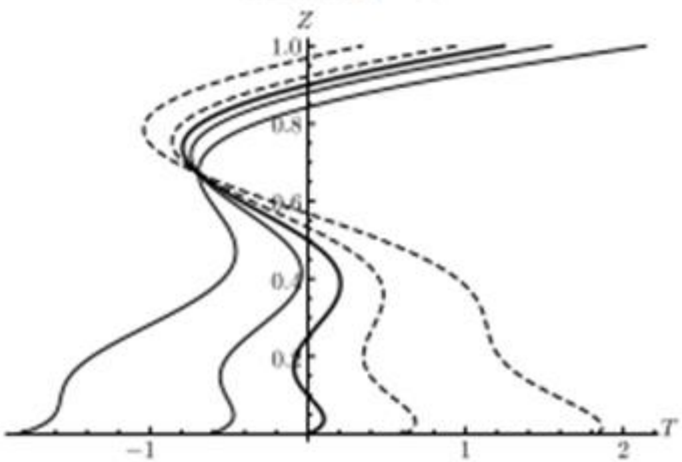

Figure . Temperature T in the section $y = 0$ for $x = 0.9$, $x = 0.3$, $x = 0$, $x = -0.3$ and $x = -0.9$ (from left to right)

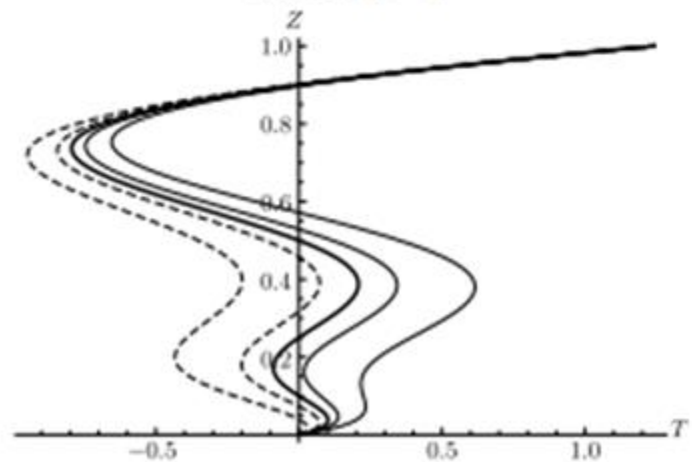

Figure . Temperature T in the section $x = 0$ for $y = -0.9$, $y = -0.3$, $y = 0$, $y = 0.3$ and $y = 0.9$ (from left to right)

Спасибо за внимание.

Бурмашева Н.В. **Просвиряков Е.Ю.**
nat_burm@mail.ru evgen_pros@mail.ru