

# ИНСТИТУТ ОКЕАНОЛОГИИ ИМ. П.П. ШИРШОВА РАН

*XXIX Научная сессия по нелинейной динамике*

Переслегин С.В., Левченко Д.Г., Карпов И.О.

## **ВИБРАЦИОННАЯ ВОЛНА НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ: ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАДИОЛОКАЦИОННОЕ НАБЛЮДЕНИЕ**

Содержание:

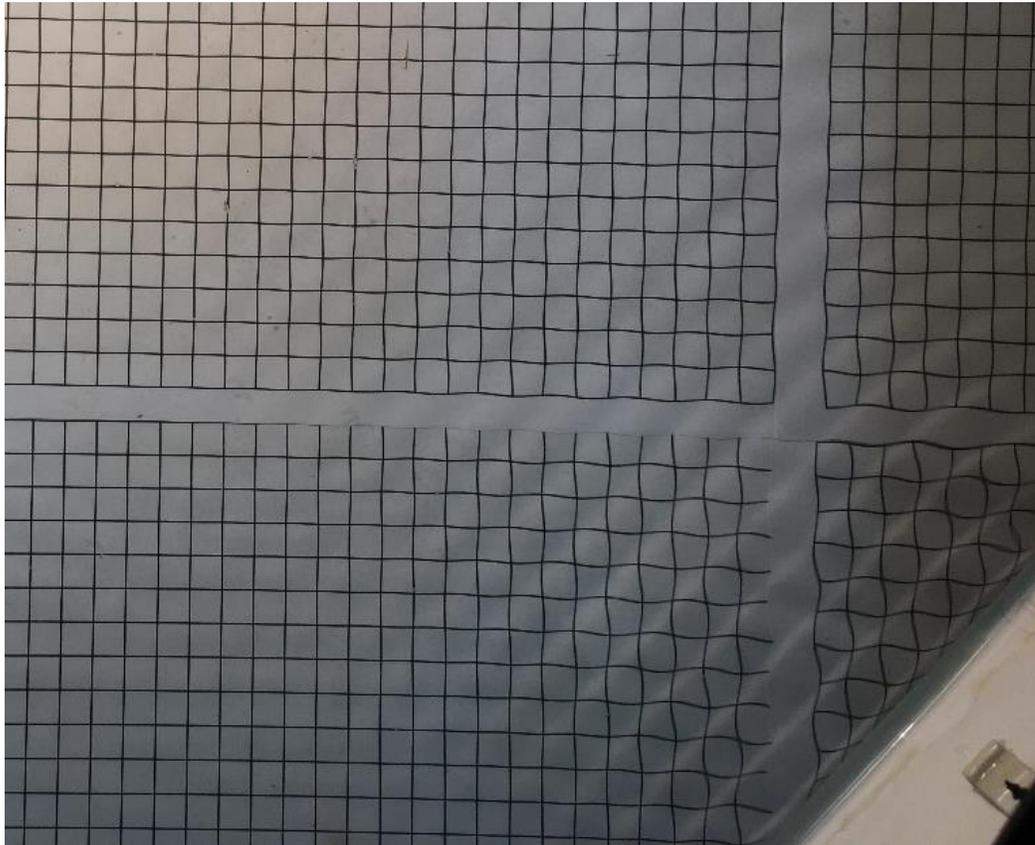
1. Лабораторный эксперимент и полученные результаты
2. Модели взаимодействий
3. Сопоставление эксперимента с имеющимися моделями взаимодействий
4. Радиолокация вибрационных волн: от лабораторного к натурному эксперименту
5. Краткие выводы



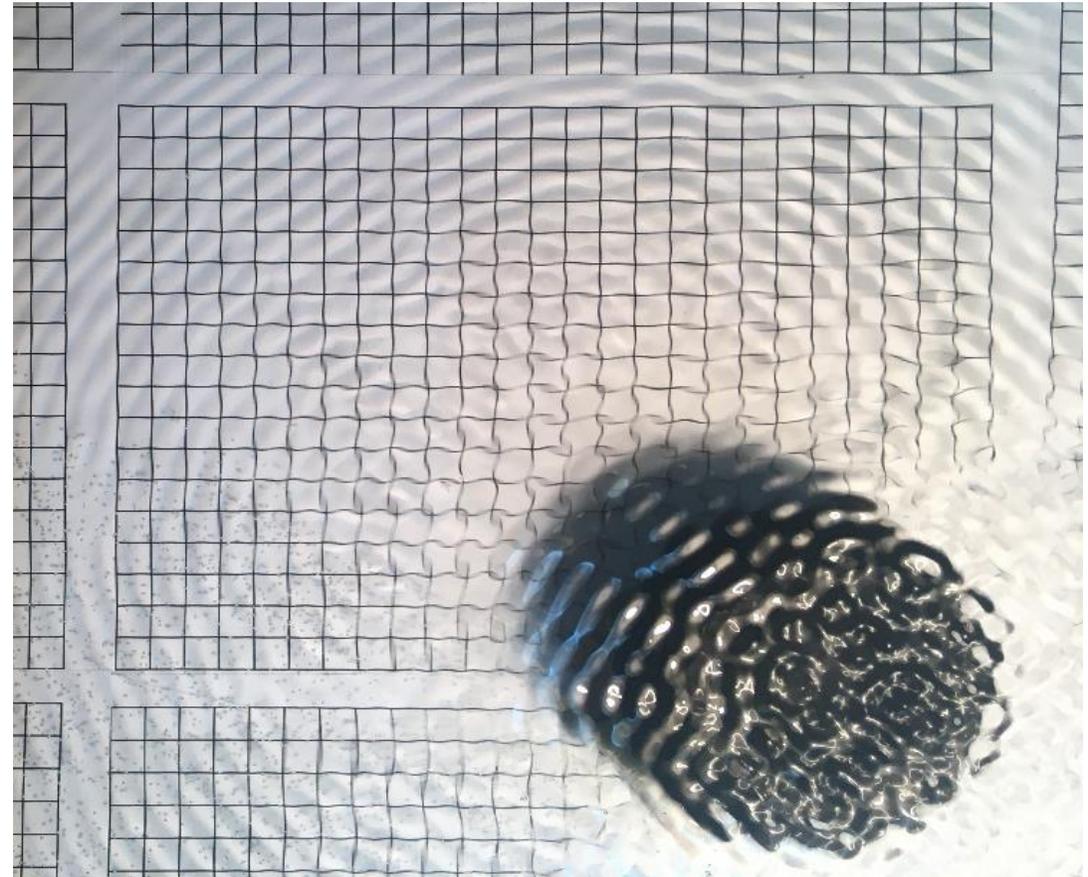
**Лабораторная установка. Видны ванна, рупорная антенна локатора, лопатка приповерхностного вибратора и донный вибратор**



## Теневые фотоснимки поверхностных вибрационных волн

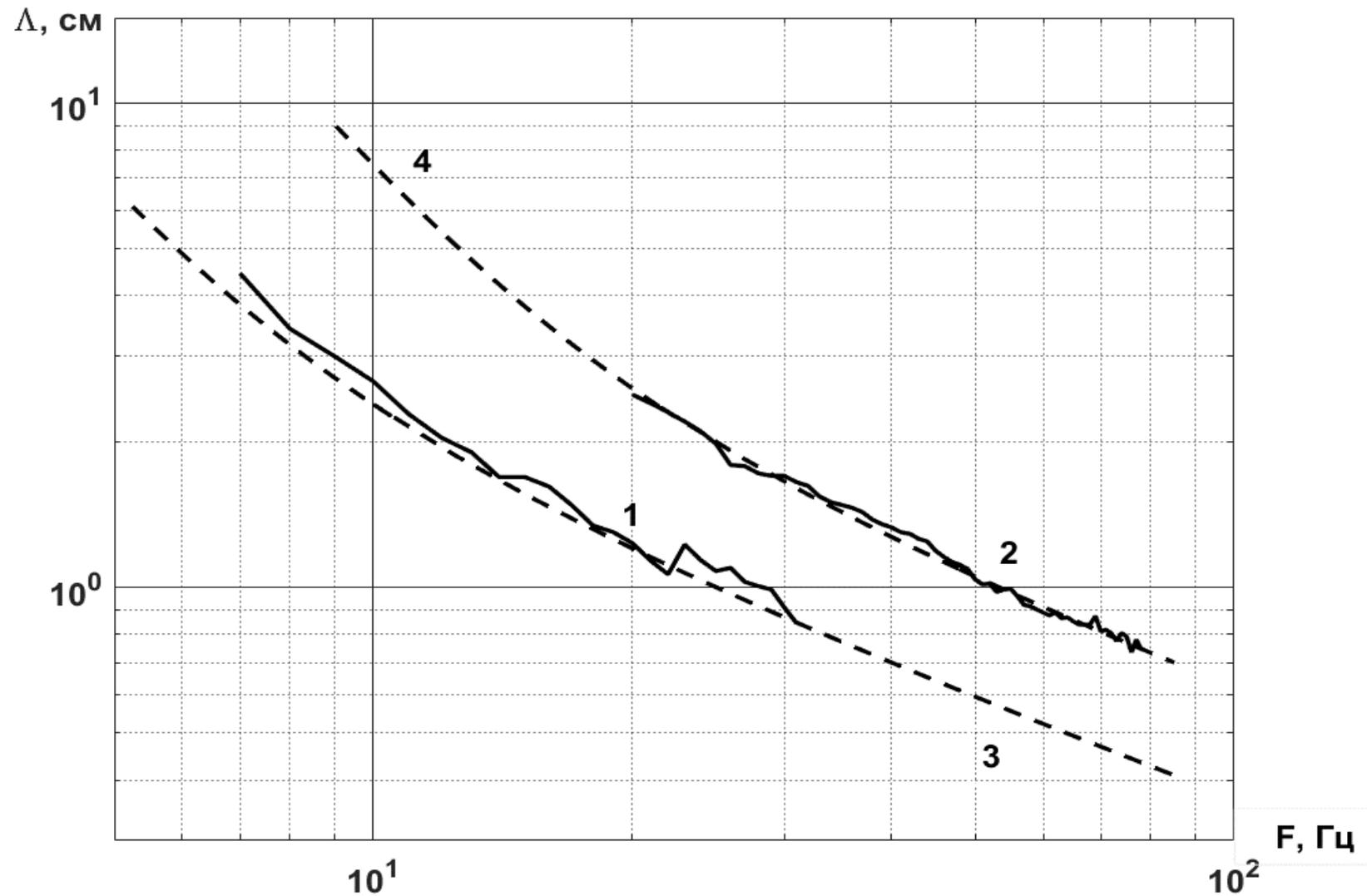


Бегущая плоская волна длиной 1,5 см, возбуждаемая приповерхностным вибратором на частоте 17 Гц. Масштабная сетка с размером ячейки 1 см.



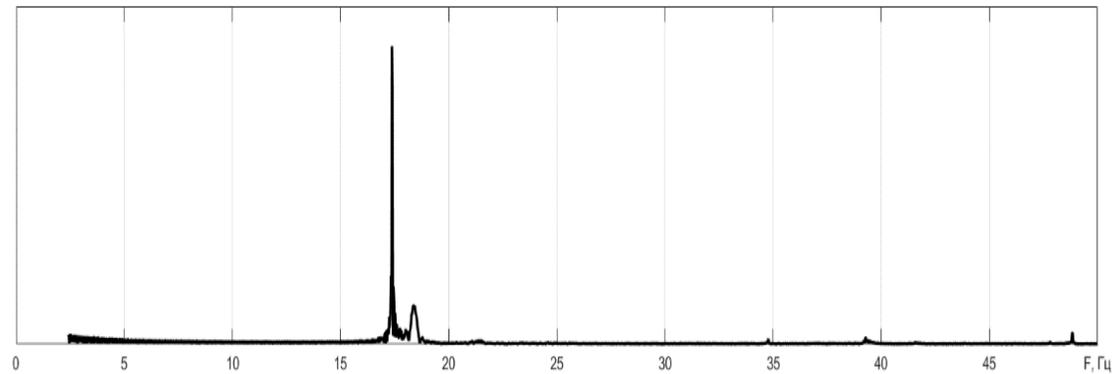
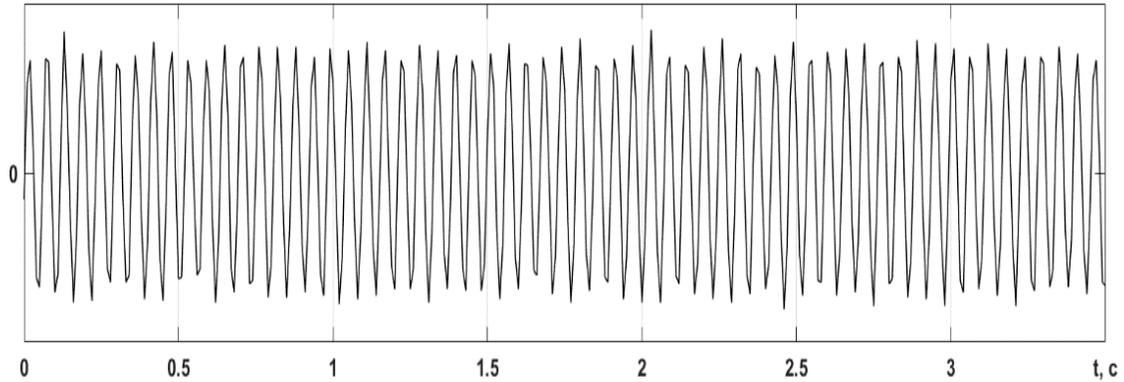
«Рябь Фарадея» над донным вибратором и кольцевая бегущая волн длиной 1,2 см при частоте вибратора 49 Гц. Масштабная сетка с размером ячейки 1 см.

# Зависимости длины бегущей ГК волны от частоты вибраторов

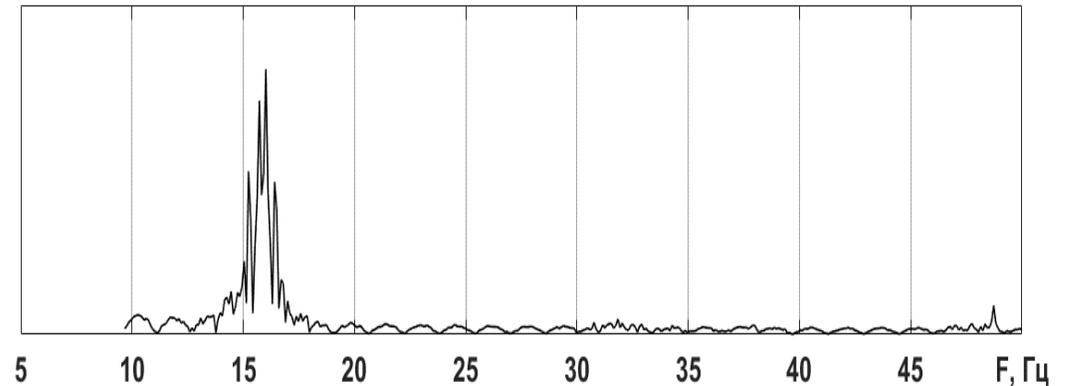
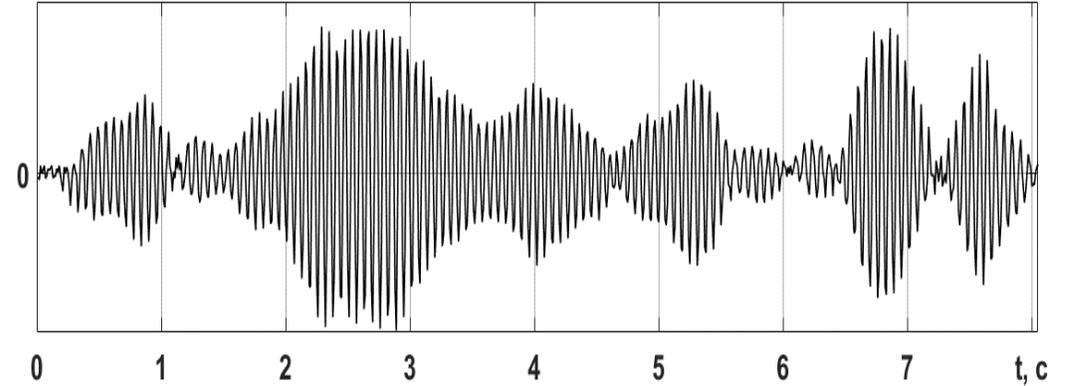


1 – приповерхностный вибратор; 2 – донный вибратор; 3 – исходное дисперсионное соотношение; 4 – дисперсионное соотношение для донного вибратора при  $n=1$ .

# Осциллограммы и спектры сигнала на выходе фазового детектора радара

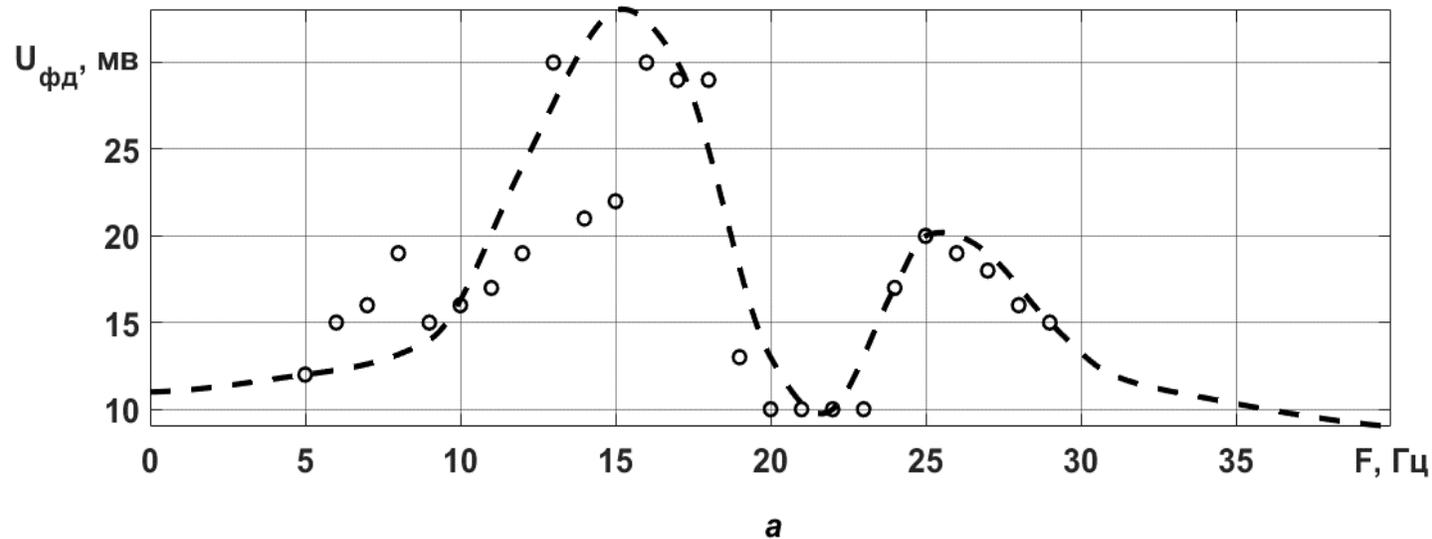


Приповерхностный вибратор. Частота вибратора и поверхностной волны  $17\text{ Гц}$ , длина поверхностной плоской волны  $\sim 1,5\text{ см}$ .



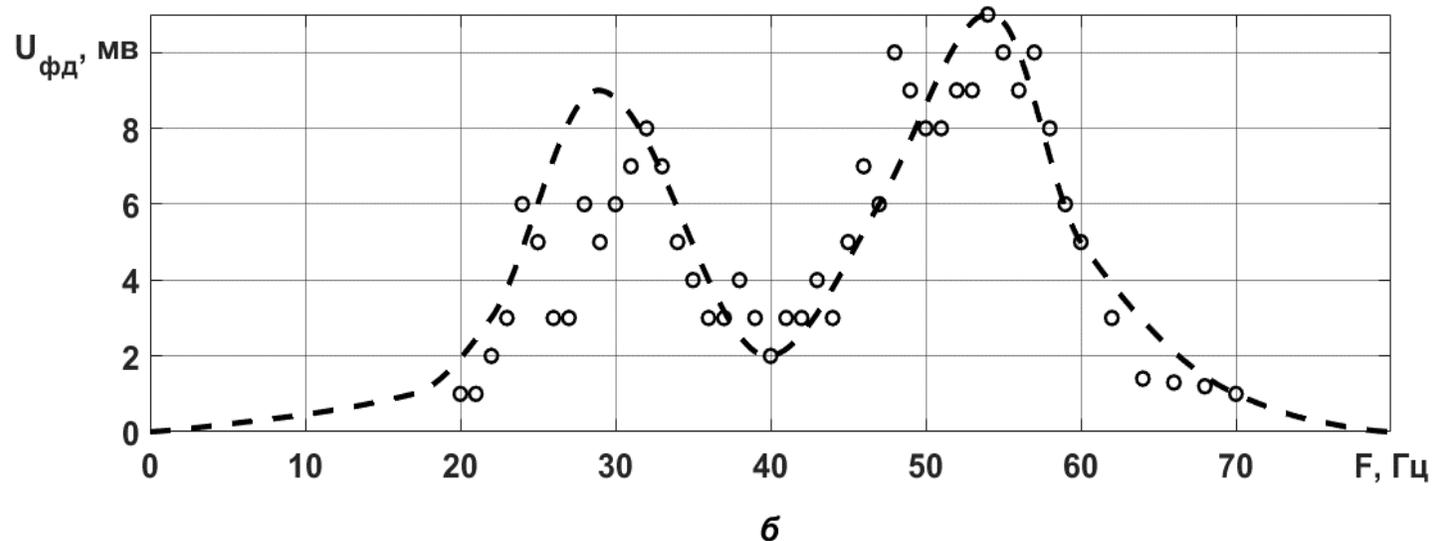
Донный вибратор. Частота вибратора  $35\text{ Гц}$ , частота поверхностной кольцевой волны  $17\text{ Гц}$ , длина поверхностной кольцевой волны  $\sim 1,7\text{ см}$ . Ширина спектра амплитудных флуктуаций  $\sim 2\text{ Гц}$

# Зависимости амплитуды сигнала на выходе ФД радара от частоты вибрации.



Приповерхностный (а) и донный (б) вибраторы. Максимумы соответствуют модам дифракционного (брэгговского) резонанса ( $m=1$  и  $m=2$ ).

В целом, наблюдаемые картины для подводного вибратора вполне соответствуют имеющейся модели параметрического возбуждения ГК волн (см. далее).



Однако, возникают следующие вопросы:

1. Какова природа наблюдаемых амплитудных флуктуаций?
2. Как объяснить существенное увеличение второго брэгговского максимума (по сравнению с приповерхностным вибратором)?

## Модель параметрического возбуждения ГК волны (на базе известных источников)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad - \text{уравнение непрерывности для плоской волны}$$

$$\varphi = \xi c \exp(kz) \cos(kx - \omega t) \quad - \text{решение уравнения (потенциал скорости частиц)}$$

$$\left[ \left( g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right]_{z=0} = 0 \quad - \text{граничное условие для ГК поверхностной волны} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \left( g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) k \varphi = 0$$

$$\text{С учётом внешней вибрации } \xi(t) = \xi_0 \cos \omega t \quad \text{получаем} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k \left( g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 + \xi \omega^2 \cos \omega t \right) \varphi = 0$$

$$\text{и в результате имеем уравнение, подобное уравнению Матье:} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega_0^2 (1 + \mu \cos \omega t) \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\text{где } \omega \text{ — частота вибратора,} \quad \omega_0 = \left( g k_v + \sigma \frac{k_v^3}{\rho} \right)^{1/2} \quad - \text{собственная частота системы,}$$

$$\mu = \xi_0 k \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1 \quad - \text{безразмерный параметр,} \quad k_v \quad - \text{волновое число образующейся ГК волны}$$

Решение уравнения (1) имеет вид:  $\varphi(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \omega_0 t + C_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ , где  $\alpha$  — инкремент усиления.

Это решение получается при кратных значениях частот  $\omega_0$  и  $\omega$ :  $\omega_0 = n\omega/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

## Сопоставление модельных и экспериментальных данных

1. Экспериментальные данные (без участия радара) показывают, что «область параметрического возбуждения»  $\Delta\omega$  перемещается по спектру ГК волн без какого-либо «резонанса», подобного колебательному контуру с параметрическим возбуждением. Поэтому устоявшийся термин «**параметрический резонанс**» в данном случае **представляется некорректным.**

2. Инкремент усиления зависит от амплитуды возбуждающей волны:

$$\alpha = \frac{\xi_0 \omega^3}{8 \left( g + \frac{\sigma k_v^2}{\rho} \right)}$$

Вводя декремент затухания (определяемый кинематической вязкостью)  $\chi = 2\eta k_v^2$   $\eta = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , и приравнивая декремент к инкременту, можно определить порог

возбуждения:  $\xi_0 > 16\eta \sqrt{\frac{k_v}{g + \frac{\sigma}{\rho} k_v^2}}$ , который имеет **максимальную величину в центре ГК области:** при

$$k_{v0} = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} \quad A_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 1,74 \text{ см}, \quad F_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\rho g^3}{\sigma}} = 13,5 \text{ Гц}$$

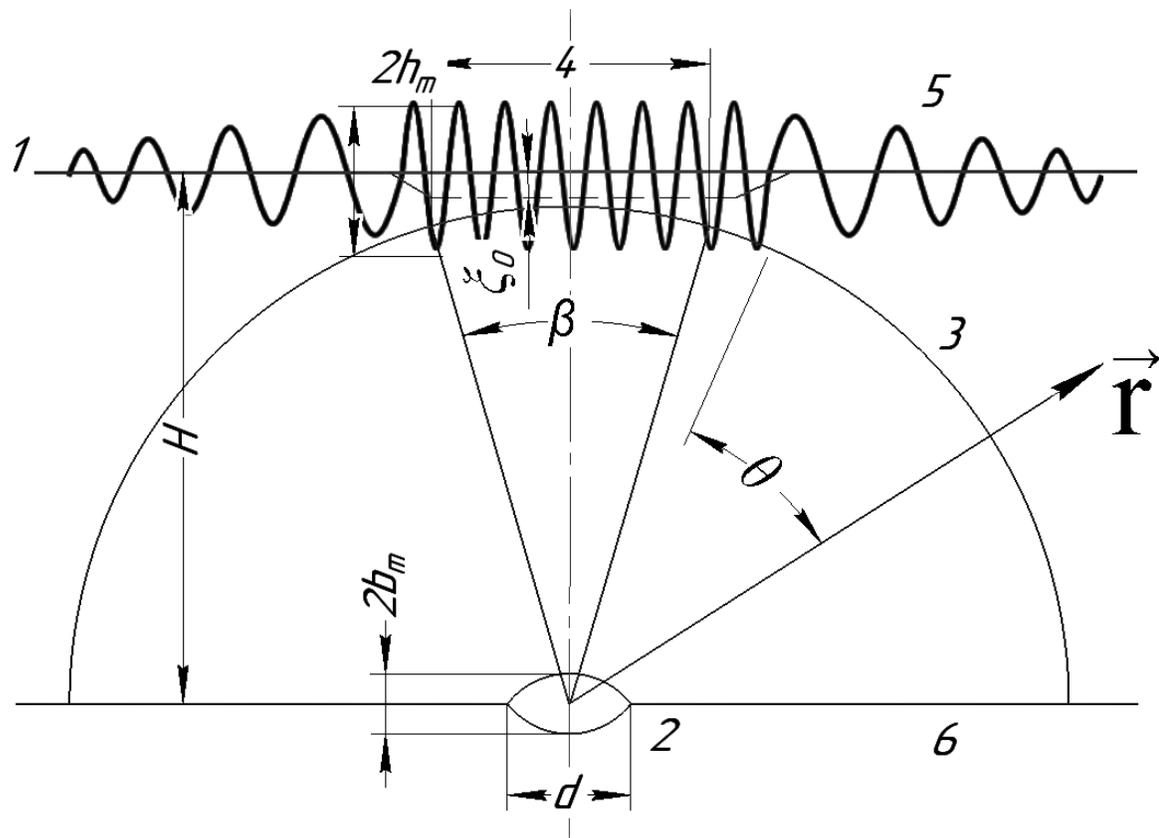
и удвоенной частоте вибратора получается

$\xi_0 > 16\eta \sqrt{\frac{\pi}{A_0 g}} \sim 10^{-5} \text{ м}$ . Эксперимент это подтверждает (косвенно!) Вопрос: **почему величина порога в центре ГК области не минимальна, а максимальна?**

3. Имеется (также из внешних источников) определение ширины области возбуждения  $-\frac{\xi_0 k_v}{2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) < \frac{\Delta\omega}{\omega_0} < \frac{\xi_0 k_v}{2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$

Её расчётная величина в центре ГК области при  $\xi_0 = 10^{-4} \text{ м}$  составляет 0,15. Описываемый выше **эксперимент не позволяет измерить эту величину.** Мы надеемся продолжить эксперимент, применяя, кроме радара, и другие технологии.

# Взаимосвязь параметров донного вибратора с параметрами поверхностной кольцевой волны



Донный вибратор: 1 – водная (мягкая) поверхность, 2 – вибрирующая мембрана, 3 – диаграмма направленности вибратора, 4 – область вынужденных (стоячих) волн, 5 – область свободных (бегущих) кольцевых волн, 6 – дно ванны (жесткая поверхность),  $\xi_0$  – амплитуда возбуждающей вибрационной волны,  $h_m = Q\xi_0$  – амплитуда возбуждаемой кольцевой волны

$$p = j\rho\omega \frac{V}{4\pi r} \exp j(kr - \omega t)$$

– давление в среде от акустического источника,  $V$  – объёмная скорость мембраны,  $r$  – расстояние от источника,  $d/\lambda < 0,1$ . В случае  $kr \ll 1$  давление можно представить в виде:

$$p = j\rho\omega \frac{V}{4\pi r} \left( 1 + jkr - \frac{(kr)^2}{2} - j\frac{(kr)^3}{6} + \dots \right) \exp(j\omega t).$$

где  $p_1 = j\rho\omega \frac{V}{4\pi r}$  и  $p_2 = -\rho\omega \frac{Vk}{4\pi} = -\rho V \frac{\omega^2}{4\pi c}$

– гидродинамическая (сильная) и звуковая (очень слабая) составляющие. Производя необходимые расчёты, получаем взаимосвязи:

$$\xi_0 = \frac{\omega d}{2H} \sqrt{\frac{b_m^3}{2\pi g}} \quad \text{– для амплитуды возбуждающей волны}$$

$$p_m = \frac{\rho d^2 b_m \omega^2}{32\pi H} \rightarrow 0,03 \rho^3 \sqrt{\frac{d^4 \omega^4 h_m^2 g}{Q^2 H}} \quad \text{– для амплитуды давления у поверхности над источником}$$

$Q$  – усиление

# Радиолокация ГК волн, возбуждаемых донным вибратором

Будем считать, что **вибрирует именно скин-слой**. При радиолокационном (обратном) резонансном рассеянии бегущая ГК волна, при её фазовом синхронизме с проекцией «неподвижной» радиоволны вызывает модуляцию отраженного сигнала, и на выходе фазового детектора возникает сигнал

$$U_m = \frac{2\pi}{\lambda} h_m \cos^2 \gamma \sqrt{P_2 \eta R^*} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

амплитуда которого  $U_m$  определяется мощностью сигнала  $P_2$  на выходе антенны и амплитудой  $h_m$  поверхностной ГК волны. Обозначены:  $\gamma$  – угол визирования поверхности;  $R^*$ ,  $\eta$  – коэффициент передачи и волновое сопротивление смесителя (фазового детектора),  $\omega_0$  – частота поверхностной ГК волны.

УЭПР поверхности  $S^0 = 4\pi k_r^4 \cos^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_2 |q|^2 \Psi(k_x, k_y)$ ,  $\Psi_h(k_x, k_y)$  – спектральная плотность волн,

а волновые числа  $k_x, k_y$  приравниваются к горизонтальным проекциям радиоволновых чисел:

$$p_x = k_r (\sin \gamma_2 \sin \varphi_2 - \sin \gamma_1 \sin \varphi_1), \quad p_y = k_r (\sin \gamma_2 \cos \varphi_2 - \sin \gamma_1 \cos \varphi_1), \quad k_r = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad \text{При обратном рассеянии имеем}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad p_x = 0, \quad p_y = k_y = 2k_r \sin \gamma, \quad \text{и длина «резонансной» поверхностной волны} \quad \Lambda_{res} = \frac{m\lambda}{2 \sin \gamma}$$

где числа  $m=1, 2, \dots$  соответствуют модам дифракционного резонанса. В случае  $m=1$  УЭПР принимает вид

$$(S^0)_{vibr} = \frac{\pi}{2} k_r^2 h_m^2 |q|^2 \cos^2 \gamma \cdot ctg^2 \gamma \quad \text{При заданной минимальной УЭПР имеем} \quad (h_m)_{min} = \sqrt{\frac{(S_{VV}^0)_{min}}{2\pi^3} \frac{\lambda \sin \gamma}{|q_{VV}| \cos^2 \gamma}}$$

## От лабораторного к натурному эксперименту

Лабораторная установка имеет параметры:  $\lambda=(2,0 - 2.5) \text{ см}$ ,  $\gamma=60^\circ$ ,  $|q_{VV}|=4,6$ ,  $(S_{VV}^0)_{\min}=10^{-3}$

тогда имеем  $(h_m)_{\min} \sim 70 \text{ мкм}$ . Необходимая амплитуда вибратора  $b_m = 2\pi \sqrt[3]{\frac{h_m^2 g H^2}{Q^2 \omega^2 d^2}}$

При частоте накачки  $\omega=2\pi \cdot 30 \text{ Гц}$ ,  $d=2 \text{ см}$ ,  $H=10 \text{ см}$ , получаем  $b_m \sim 0,1 \text{ см}$  при  $Q=10$  и  $p_m \sim 0,7 \text{ Па}$  – что и подтверждается в эксперименте.

УЭПР морской поверхности при обратном рассеянии:  $(S^0)_{wind} = \frac{\pi}{4} k_r^4 |q|^2 \text{ ctg}^4 \gamma \Psi_h(K)$ ,

Здесь  $\Psi_h(K) = \frac{a_0}{2\pi} K^{-4} \eta \left( \frac{K}{K^*} \right)$ ,  $a_0=6,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\eta \left( \frac{K}{K^*} \right); 2,3$  и тогда, при  $K = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \gamma$  в первом

приближении имеем  $(S^0)_{wind} = \frac{a_0 |q|^2 \eta}{64} \cos^4 \gamma$ . Следовательно, соотношение УЭПР для развитых ветровых

и вибрационных волн составляет  $\frac{(S^0)_{vibr}}{(S^0)_{wind}}; 10^4 k_r^2 h_m^2$  Получается, что при  $\lambda=2,5 \text{ см}$ ,  $k_r=2,7 \text{ см}^{-1}$ ,  $h_m=10^{-2} \text{ см}$  –

**УЭПР вибрационных волн оказывается на порядок выше УЭПР мелких ветровых волн – даже без учёта усиления, несмотря на столь малую амплитуду вибрационной волны.**

## Краткие выводы

1. Основным экспериментом (без участия радара) выявлены главные особенности параметрического возбуждения ГК волн: при помещении вибратора на дно водоёма, длина возбуждаемой (кольцевой) бегущей волны следует дисперсионному соотношению – но при вдвое большей частоте вибратора. Возникающая непосредственно над вибратором «рябь Фарадея» представляет собой структуру стоячих волн, переходящую на периферии в кольцевую бегущую волну. Сравнительно медленная амплитудная модуляция, по-видимому, здесь происходит вследствие неустойчивого равновесия между параметрическим возбуждением и затуханием (в данных условиях ширина спектра модуляции составляла  $(1 - 3) \text{Гц}$ ).
2. Когерентный радиолокатор, используя режим резонансного (брэгговского) рассеяния, способен выделить участок кольцевой бегущей волны, возбуждаемой подводным источником вибрации. При этом, как следует из эксперимента, в имеющихся условиях возможна индикация вибрационной ГК волны в диапазонах частот вибратора  $(25 - 35) \text{Гц}$  и  $(45 - 60) \text{Гц}$ .
3. Полученные данные позволяют грубо оценить амплитуду «начальной» поверхностной волны, определяемой донным вибратором и её величину при ожидаемом параметрическом усилении. В условиях данного эксперимента, при глубине ванны  $10 \text{см}$ , диаметре мембраны  $2 \text{см}$  и амплитуде её вибрации  $\sim 0,1 \text{см}$  при частоте  $\sim 35 \text{Гц}$  – амплитуда вибрационной поверхностной кольцевой волны составляла также  $\sim 0,1 \text{см}$  при её частоте  $\sim 17 \text{Гц}$ , что говорит о наличии значительного усиления за счёт параметрического возбуждения.
4. Имеющийся математический аппарат явно недостаточен для выяснения всех параметров возникающей на поверхности бегущей кольцевой ГК волны при её параметрическом возбуждении.
5. Полученные результаты имеют огромное (прикладное) значение, и необходимо переходить к натурному эксперименту, одновременно совершенствуя методику лабораторного эксперимента.

Авторы выражают благодарность С.И. Бадулину и К.К. Ляпину, замечания которых (письменные и устные) помогли многое прояснить и значительно улучшить текст публикуемой статьи.

**Спасибо за внимание**