Система уравнений для двумерных волн, распространяющихся на поверхности трёхмерной глубокой жидкости

С. В. Дремов[1,3], Д.И. Качулин[1,3], А.И. Дьяченко[2,3]

[1] Новосибирский государственный университет

[2] Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

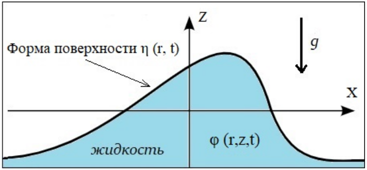
[3] Сколковский институт науки и технологий

XXX научная сессия совета РАН по нелинейной динамике
Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, 20-21 декабря, 2021

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-72-30028

Исходная постановка задачи

Рассматривается 3D гидродинамика потенциальных течений идеальной несжимаемой глубокой жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести:



$$\boxed{\triangle\phi = 0}$$

$$-\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty, \ -\infty < z < \eta(x, y, t)$$

$\vec{r} = (x, y)$

$\eta(\vec{r}, t)$ — форма поверхности

$\psi(\vec{r}, t)$ — потенциал скорости на поверхности

$\phi(\vec{r}, z, t)$ — потенциал скорости внутри жидкости

Граничные условия:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + g\eta = 0 \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\eta\nabla\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{array}\right| \text{при } z = \eta(x, y, t)$$

Система уравнений является гамильтоновой, а η и ψ — гамильтоновы переменные [V. E. Zakharov, 1968].

Гамильтонова система уравнений

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}, \ \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}$$

$$H = \frac{1}{2}\int dxdy \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla\phi)^2 dz + \frac{g}{2}\int \eta^2 dxdy$$

Zakharov, V. E. (1968). Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 9(2), 190-194.

Уравнение Захарова

В предположении малости крутизны $\mu \ll 1$ гамильтониан можно разложить в ряд по степеням η и ψ. Применяя каноническое преобразование $\eta, \psi \to b, b^*$, можно упростить исходный гамильтониан, убрав из него все нерезонансные слагаемые:

Упрощённый гамильтониан

$$H(b, b^*) = \int w_{\vec{k}} b_{\vec{k}} b^*_{\vec{k}} d\vec{k} + \frac{1}{2} \int T^{\vec{k}_2, \vec{k}_3}_{\vec{k}, \vec{k}_1} b^*_{\vec{k}} b^*_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3} d\vec{k} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3$$

Уравнение движение в таком случае есть уравнение Захарова:

$$\frac{\partial b_{\vec{k}}}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta b_{\vec{k}}^*} = 0$$

$$i \frac{\partial b_{\vec{k}}}{\partial t} = w_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + \int T^{\vec{k}_2, \vec{k}_3}_{\vec{k}, \vec{k}_1} b^*_{\vec{k}_1} b_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3$$

$T^{\vec{k}_2, \vec{k}_3}_{\vec{k}, \vec{k}_1}$ — коэффициент четырёхволнового взаимодействия

Разделение одномерных волн

В одномерном случае коэффициент $T_{k,k_1}^{k_2,k_3}$ обладает следующим свойством:

$$T_{k,k_1}^{k_2,k_3} \equiv 0 \text{, если } kk_1 k_2 k_3 < 0$$

Это свойство позволяет разделить одномерные волны на две группы: волны, движущиеся ”вправо”и ”влево”:

Разделение волн на две группы

$$b(x,t) = b^{+}(x,t) + b^{-}(x,t), \quad b_k = b_k^{+} + b_k^{-}$$

$$i\dot{b}_k^{+} = w_k b_k^{+} + \int \left[b_{k_1}^{+\,*} b_{k_2}^{+} b_{k_3}^{+} + 2 b_{k_1}^{-\,*} b_{k_2}^{+} b_{k_3}^{-} \right] T_{k,k_1}^{k_2,k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

$$i\dot{b}_k^{-} = w_k b_k^{-} + \int \left[b_{k_1}^{-\,*} b_{k_2}^{-} b_{k_3}^{-} + 2 b_{k_1}^{+\,*} b_{k_2}^{+} b_{k_3}^{-} \right] T_{k,k_1}^{k_2,k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

Dyachenko A. I. Canonical system of equations for 1D water waves // Studies in Applied Mathematics. – 2020. – Т. 144. – №. 4. – С. 493-503.

Система суперкомпактных уравнений

Каноническое преобразование $b, b^* \to c, c^*$ позволяет записать гамильтониан, а также уравнения движения, в x-пространстве [A.I. Dyachenko, 2020]:

Гамильтониан в x-пространстве

$$
\begin{aligned}
H = \int c^{+*}\hat{V}c^{+}\,dx + \frac{1}{2}\int |c^{+}|^2\left[\frac{i}{2}(c^{+}c_x^{+*} - c^{+*}c_x^{+}) - \hat{k}|c^{+}|^2\right]dx + \\
+\int c^{-*}\hat{V}c^{-}\,dx + \frac{1}{2}\int |c^{-}|^2\left[\frac{i}{2}(c^{-*}c_x^{-} - c^{-}c_x^{-*}) - \hat{k}|c^{-}|^2\right]dx + \\
+\int\left[|c^{+}|^2\hat{k}|c^{-}|^2 + c^{+*}c^{-*}\hat{k}(c^{+}c^{-}) + i(c^{+*}c^{-})\frac{\partial}{\partial x}(c^{+}c^{-})\right]dx
\end{aligned}
$$

Уравнения движения для одномерных встречных волн

$$
\frac{\partial c^{+}}{\partial t} + \partial_x^{+}\frac{\delta H}{\delta c^{+*}} = 0, \qquad \frac{\partial c^{-}}{\partial t} - \partial_x^{-}\frac{\delta H}{\delta c^{-*}} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c^{+}}{\partial t} + i\hat{\omega}c^{+} &= \partial_x^{+}\left[i(|c^{+}|^2 - |c^{-}|^2)c_x^{+} + c^{+}\hat{k}(|c^{+}|^2 - |c^{-}|^2) - ic^{+}c^{-}c_x^{-*} - c^{-*}\hat{k}\left(c^{+}c^{-}\right)\right] \\
\frac{\partial c^{-}}{\partial t} + i\hat{\omega}c^{-} &= \partial_x^{-}\left[i(|c^{-}|^2 - |c^{+}|^2)c_x^{-} - c^{-}\hat{k}(|c^{-}|^2 - |c^{+}|^2) - ic^{-}c^{+}c_x^{+*} + c^{+*}\hat{k}\left(c^{+}c^{-}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$\hat{V} = \hat{\omega}/\hat{k}$, операторы $\hat{k}$ и $\hat{\omega}$ есть умножение на $|k|$ и $\sqrt{g|k|}$ в Фурье-пространстве, а ∂_x^{+} и ∂_x^{-} — на $ik\theta_k$ и $ik\theta_{-k}$, где θ_k —функция Хевисайда.

Dyachenko A. I. Canonical system of equations for 1D water waves //Studies in Applied Mathematics. – 2020. – T. 144. – №. 4. – C. 493-503.

Переход к двумерной модели

Рассмотрим теперь случай двумерных волн:

$$c^{+} = c^{+}(x, y), \quad c^{-} = c^{-}(x, y)$$

$$\vec{k} = (k_x, k_y), \quad \omega = \omega(k_x, k_y)$$

$$\hat{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad \hat{\omega} = \sqrt{g\hat{k}}$$

$$\partial_x^{+} \to i\hat{k}\theta_{k_x}, \quad \partial_x^{-} \to -i\hat{k}\theta_{-k_x}$$

Гамильтониан для двумерных волн в x-пространстве

$$H = \int c^{+*}\hat{V}c^{+}\,dxdy + \frac{1}{2}\int |c^{+}|^2 \left[\frac{1}{2}(c^{+*}\hat{k}^{+}c^{+} - c^{+}\hat{k}^{-}c^{+*}) - \hat{k}|c^{+}|^2\right] dxdy +$$
$$+ \int c^{-*}\hat{V}c^{-}\,dxdy + \frac{1}{2}\int |c^{-}|^2 \left[\frac{1}{2}(c^{-*}\hat{k}^{-}c^{-} - c^{-}\hat{k}^{+}c^{-*}) - \hat{k}|c^{-}|^2\right] dxdy +$$
$$+ \int \left[|c^{+}|^2\hat{k}|c^{-}|^2 + c^{+*}c^{-*}\hat{k}(c^{+}c^{-}) - c^{+*}c^{-}\hat{k}(c^{+}c^{-})\right] dxdy$$

Уравнения движения для двумерных волн

$$i\frac{\partial c^{+}}{\partial t} = \hat{k}^{+}\frac{\delta H}{\delta c^{+*}}, \qquad i\frac{\partial c^{-}}{\partial t} = -\hat{k}^{-}\frac{\delta H}{\delta c^{-*}}$$

Здесь использованы обозначения $\hat{k}^{+} = \hat{k}\theta_{k_x}$ и $\hat{k}^{-} = -\hat{k}\theta_{-k_x}$.

Система суперкомпактных уравнений для двумерных волн

$$i\frac{\partial c^+}{\partial t} = \hat{\omega} c^+ + \hat{k}^+ \left[(|c^+|^2 - |c^-|^2)(\hat{k}^+ c^+) - c^+ \hat{k}(|c^+|^2 - |c^-|^2) + c^+ c^- (\hat{k}^+ c^{-*}) + c^{-*} \hat{k}\left(c^+ c^-\right)\right]$$

$$i\frac{\partial c^-}{\partial t} = \hat{\omega} c^- + \hat{k}^- \left[(|c^-|^2 - |c^+|^2)(\hat{k}^- c^-) + c^- \hat{k}(|c^-|^2 - |c^+|^2) + c^+ c^- (\hat{k}^- c^{+*}) - c^{+*} \hat{k}\left(c^+ c^-\right)\right]$$

Помимо гамильтониана в данной системе сохраняются следующие интегралы движения:

Интегралы движения

$$N^+ = \int \frac{|c_k^+|^2}{|k|} dk, \quad N^- = \int \frac{|c_k^-|^2}{|k|} dk$$

$$P_x = \int \frac{\hat{k}_x}{\hat{k}}(|c^+|^2 + |c^-|^2) dxdy, \quad P_y = \int \frac{\hat{k}_y}{\hat{k}}(|c^+|^2 + |c^-|^2) dxdy$$

Монохроматическая волна

Уравнения в k-пространстве:

$$i\frac{\partial c^+_{\vec{k}}}{\partial t} = \omega_{\vec{k}}\, c^+_{\vec{k}} + |\vec{k}| \int D^{\vec{k}_2 \vec{k}_3}_{\vec{k}\,\vec{k}_1} \left[c^{+\,*}_{\vec{k}_1} c^+_{\vec{k}_2} c^+_{\vec{k}_3} - 2 c^{-\,*}_{\vec{k}_1} c^-_{\vec{k}_2} c^+_{\vec{k}_3} \right] \delta_{\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3}\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\, d\vec{k}_3$$

$$i\frac{\partial c^-_{\vec{k}}}{\partial t} = \omega_{\vec{k}}\, c^-_{\vec{k}} + |\vec{k}| \int D^{\vec{k}_2 \vec{k}_3}_{\vec{k}\,\vec{k}_1} \left[c^{-\,*}_{\vec{k}_1} c^-_{\vec{k}_2} c^-_{\vec{k}_3} - 2 c^{+\,*}_{\vec{k}_1} c^+_{\vec{k}_2} c^-_{\vec{k}_3} \right] \delta_{\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{k}_3}\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\, d\vec{k}_3$$

$$D^{\vec{k}_2 \vec{k}_3}_{\vec{k}\,\vec{k}_1} = \frac{1}{2}(|\vec{k}|+|\vec{k}_1|+|\vec{k}_2|+|\vec{k}_3|) - \frac{1}{4}(|\vec{k}+\vec{k}_1|+|\vec{k}_2+\vec{k}_3|) - \frac{1}{4}(|\vec{k}-\vec{k}_2|+|\vec{k}-\vec{k}_3|+|\vec{k}_1-\vec{k}_2|+|\vec{k}_1-\vec{k}_3|)$$

Решение в виде монохроматической волны:

$$c^+(k_x, k_y) = c_0^+ \delta_{\vec{k}-\vec{k}_0} e^{-i\Omega^+ t}, \; k_x > 0$$

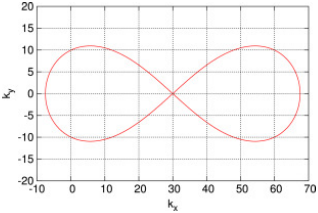
Условия резонанса:

$$\vec{k} + \vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$$

$$\Delta = \omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0$$

$I: \vec{k} = \vec{k}_2,$ — нелинейная поправка к частоте

$II: \vec{k}+\vec{k}_1 = 2\vec{k}_0, \;\; \Delta = 0 \rightarrow$ "восьмёрка"Филлипса



Korotkevich A. O., Dyachenko A. I., Zakharov V. E. Numerical simulation of surface waves instability on a homogeneous grid //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2016. – T. 321. – C. 51-66.

Стоячая волна

Две встречные волны

$$c^+(k_x, k_y) = c_0^+ \delta_{\vec{k}-\vec{k}_+} e^{-i\Omega^+ t}, \; k_x^+ > 0$$

$$c^-(k_x, k_y) = c_0^- \delta_{\vec{k}-\vec{k}_-} e^{-i\Omega^- t}, \; k_x^- < 0$$

Случай $|k_x^+| = |k_x^-| = k_0, \; k_y = 0, \; |c_0^+|^2 = |c_0^-|^2$ соответствует одномерной стоячей волне:

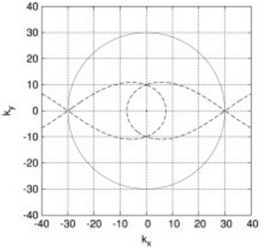
$$c(x, t) = 2c_0 cos(k_0 x) e^{-i\Omega t}, \quad \Omega = \omega_{k_0} - k_0^2 |c_0|^2$$

Условия резонанса:

$$\vec{k} + \vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$$

$$\Delta = \omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0$$

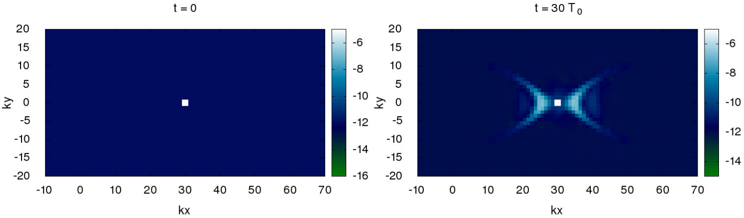
В случае стоячей волны резонансная кривая представляет собой круг радиуса $|k_0|$ с центром в точке $(0, 0)$.



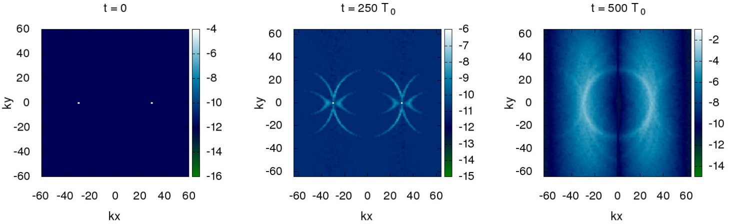
Korotkevich A. O., Dyachenko A. I., Zakharov V. E. Numerical simulation of surface waves instability on a homogeneous grid //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2016. – T. 321. – C. 51-66.

Численные эксперименты

Случай монохроматической волны



Случай стоячей волны



Заключение

- Получена гамильтонова система суперкомпактных уравнений для двумерных встречных волн, распространяющихся на поверхности трёхмерной идеальной глубокой жидкости.
- В рамках данной модели численно исследована задача о модуляционной неустойчивости для монохроматической и стоячей волн, а также задача о резонансных взаимодействиях таких волн.

Спасибо за внимание!