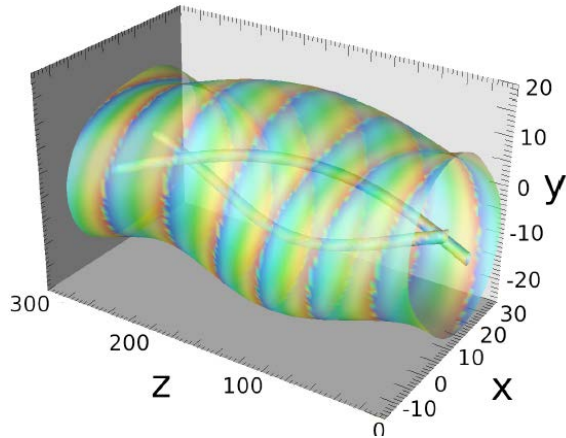
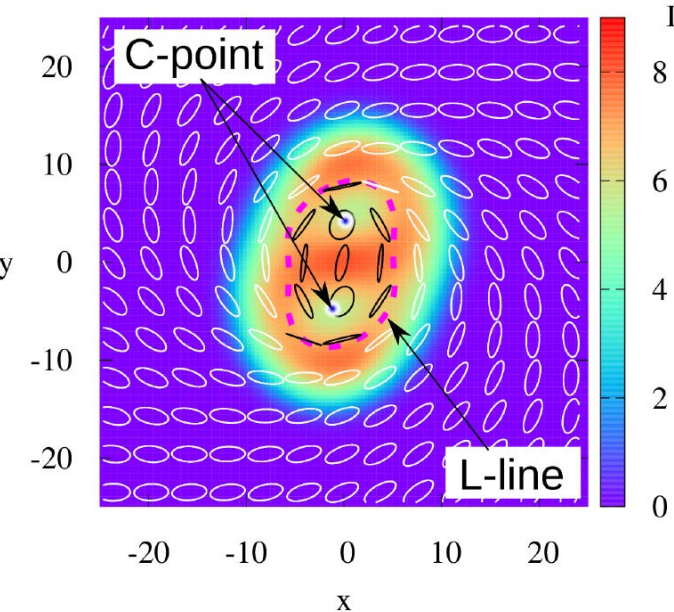


# Трубчатые и поляризационные лазерные солитоны



*Н.А. Веретенов, Н.Н. Розанов, С.В. Федоров*

*Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург*



**XXX** научная сессия Совета по нелинейной динамике, 20-21.12.2021

Мы анализируем лазерные солитоны (солитоны в лазере или лазерной среде с насыщающимся поглощением) с фазовыми и/или поляризационными сингулярностями. Такие сингулярности обладают топологической защищенностью, что важно для информационных приложений.

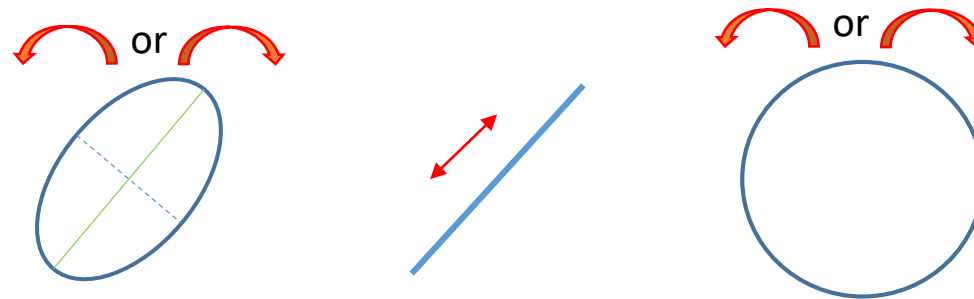
# Фазовые и поляризационные сингулярности

Излучение близко к монохроматической плоской волне (квазиоптическое, или параксиальное приближение)

1. *Изолированные фазовые сингулярности.* Для скалярного поля (существенна только одна его поляризационная компонента) напряженность может обращаться в 0 в некоторых точках. В этих точках фаза излучения не определена. При обходе вокруг нее по замкнутому контуру (если точка изолированная) фазовый набег  $\delta\Phi = 2\pi m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $m$  – топологический заряд).

2. *Поляризация* в общем случае эллиптическая, характеризуется направлением главной оси поляризационного эллипса и направлением вращения вектора электрической напряженности по эллипсу (правая ли левая поляризация). Поляризационная сингулярность возникает при линейной поляризации, когда направление вращения не определено (L-точки или линии), и для круговой поляризации, когда нельзя выделить главную ось (С-точки). При обходе вокруг изолированной точки поляризационной сингулярности направление главной оси поворачивается на целое или полуцелое число оборотов ( $\sim$  «индекс Пуанкаре»  $\eta$ ). (Более точно, Пуанкаре говорит о сингулярностях векторного поля, а у главной оси эллипса направление двузначно)

Эллиптическая, линейная и круговая (циркулярная) поляризация, различны в разных пространственных точках



Индекс Пуанкаре характеризует сингулярность индивидуальных изолированных точек или всей структуры, если контур обхода охватывает все эти точки

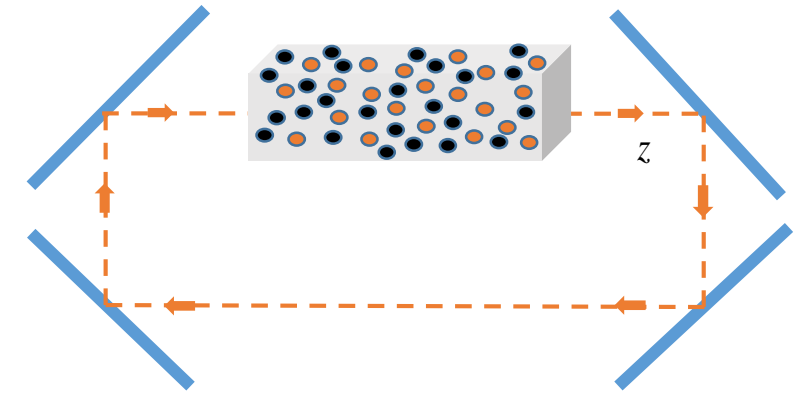
# I. Scalar Tubular Laser Solitons

Continuous medium: a linear matrix with embedded centres of two types – active (laser gain) and passive (saturable absorption).

Distance between the centres  $\ll$  carrier wavelength. Fast response of the centres on laser radiation.

Modified scheme: the medium is enclosed in a cavity of length  $L$ .

The previous scheme: the limit  $L \rightarrow$  infinity.



$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{e}_x E(\mathbf{r}, t) \exp(ik_0 z - i\omega_0 t)] \quad (1)$$

$\omega$  – carrier frequency,  $k_0$  – carrier wavenumber,  $t$  – time,  $z$  – distance along the axis,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{e}_x$  – unit vector of the radiation polarization (linear),  $E$  – slowly varying envelope

**Scalar governing equation:** 
$$2ik_0 \left( \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial E}{\partial t} \right) + (1 - id_{\perp}) \nabla_{\perp}^2 E - (1 - id_{\parallel}) D_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 2ik_0 \alpha_0 f(|E|^2) E \quad (2)$$

$0 < d_{\perp, \parallel} \ll 1$  – coefficients of angular and frequency selectivity,  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$   $f(I) = -1 - \frac{a_0}{1+I} + \frac{g_0}{1+I/b}$

$I = |E|^2$  – intensity,  $v_{gr}$  – group velocity,  $D_2$  – coefficient of quadratic dispersion

(small detuning between working frequencies of active and passive centres)

$\alpha_0$  – coefficient of nonresonance absorption (in the matrix),  $a_0$  and  $g_0$  – coefficients of small-signal absorption and gain,  $b$  – ratio of saturation intensities for gain and absorption.

# Unbounded and bounded medium

Unbounded medium: 3D  $\rightarrow$  2D

$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = \left[ (i + d_{\perp}) \nabla_{\perp}^2 + (i + d_{\parallel}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E_3 + f(|E_3|^2) E_3 \quad \tau = t - z/v_{gr} \quad (1)$$

$$E_3(\mathbf{r}_{\perp}, \tau, z) = E_2(\mathbf{r}_{\perp}, z) \exp(-i\Omega\tau), \quad \mathbf{r}_{\perp} = (x, y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = (i + d_{\perp}) \nabla_{\perp}^2 E_2 + f_2(|E_2|^2) E_2, \quad f_2 = f - (i + d_{\parallel}) \Omega^2 \quad (3)$$

Known are many solutions of this 2D-problem.

Structures with axially symmetric intensity distributions

$$E_3(\mathbf{r}_{\perp}, \tau, z) = E_3(r, \varphi, z) = A_{m,0}(r) \exp(-iK_{m,0}z + im\varphi) \quad (4)$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  - topological index

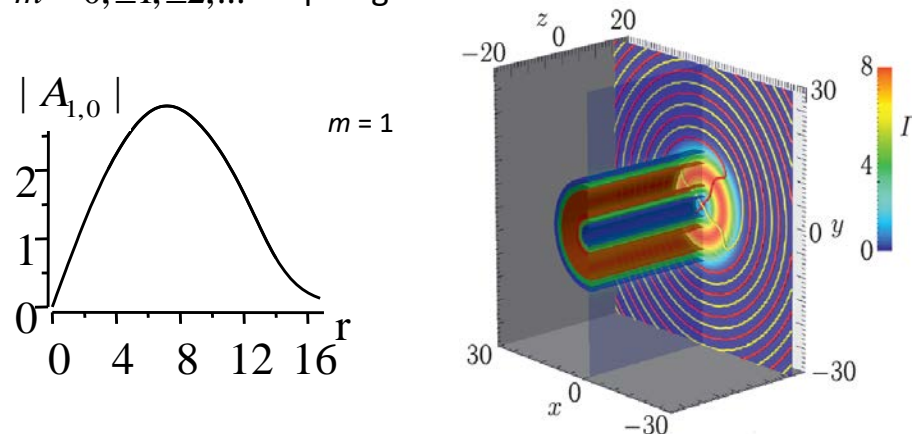


Fig. 1

Linear stability analysis: Unstable structures

Bounded medium: Finite length  $L$  of the cavity

Stable if  $L < L_{cr}$ .

Fig. 2

For larger  $L$ , the symmetry of the structure is lost and the vortex line bends.

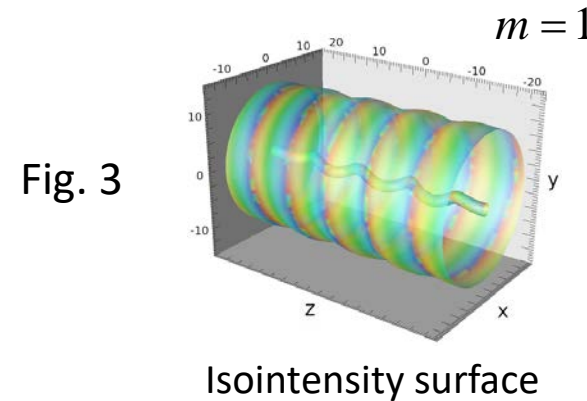
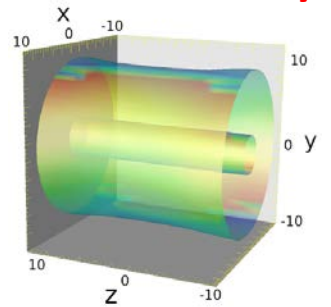


Fig. 3

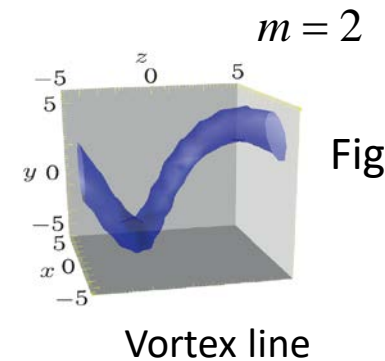


Fig. 4

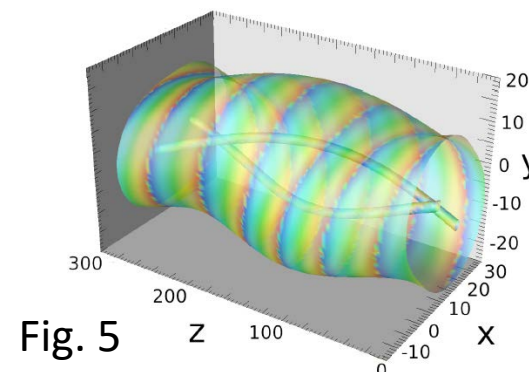


Fig. 5

For  $m > 1$  the vortex line splits into  $m$  spirals ( $m = 2, 3$ )

Tubular solitons represent an intermediate class of solitons between 2D and 3D

# II. Vector solitons. Model and governing equation

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} = (i + d) \nabla_{\perp}^2 E_{\pm} + [f(I) + \varepsilon \delta f_{\pm}(I, \delta I)] E_{\pm}$$

Wide-aperture semiconductor laser with vertical-cavity resonator (VCSEL). Spin-flop model: [San Miguel M., Feng Q., Moloney J.V. *Phys. Rev. A* **52**, 1728 (1995)].

Approximation of fast medium response.

$E_{\pm}(x, y, t)$  – envelopes of the electric strength circular polarization components,

$I = |E_+|^2 + |E_-|^2$  – the total intensity,

$\delta I = \frac{1}{2}(|E_-|^2 - |E_+|^2)$  – difference of intensities,

$\varepsilon$  – the ratio of two relaxation rates, a small parameter,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,

$$f(I) = -1 - \frac{a_0}{1+I} + (1-i\alpha) \frac{g_0}{1+bI}, \quad \alpha - \text{alpha-factor } (\sim \text{frequency detuning})$$

$$\delta f_{\pm}(I, \delta I) = (1-i\alpha) \frac{g_0}{1+bI} \frac{\pm b\delta I + b^2\delta I^2}{1+\varepsilon bI}$$

Equations are invariant to phase shifts in each component, “incoherent coupling.”

We consider cavities with sufficiently short length,  $L \ll L_{\text{cr}}$ , mean-field approximation

$$E_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x \pm iE_y)$$

Experimentally available are different polarization components, and they have different singularities.

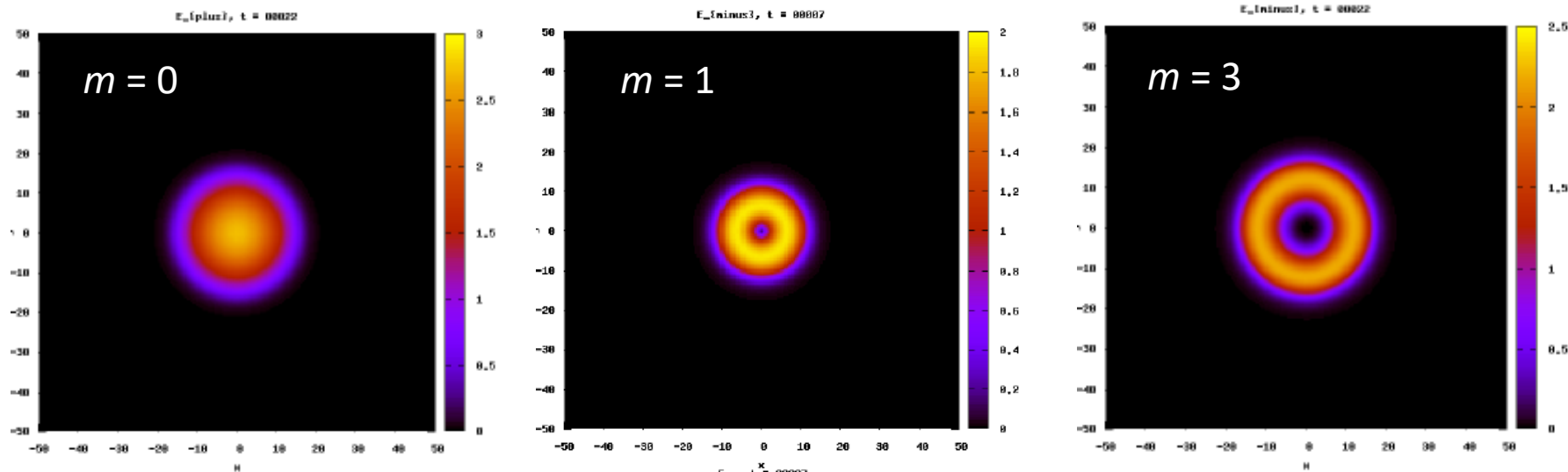
# Degenerate case: $\varepsilon = 0$ ( $\sim$ dissipative Manakov system)

$$f_+ = f_- \equiv f(I) \quad (1) \quad \frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} = (i + d) \nabla_{\perp}^2 E_{\pm} + f(I) E_{\pm} \quad (2) \quad I = |E_+|^2 + |E_-|^2 \quad (3)$$

Known are many types of scalar solitons, e.g. those with axially symmetric intensity distribution

$$E_+ = E_+(r, \varphi) e^{iV|m|t}, E_+(r, \varphi) = e^{im\varphi} A_{|m|}(r) \cos \theta, \quad E_- = 0$$

Examples of transverse distribution of intensity for symmetric scalar solitons



With increase of  $m$ , radius of intensity ring increases and domain of stability decreases. The scalar solitons, even independently to their stability, serve as the basis for construction of vector solitons.

# Degenerate case: $\mathcal{E} = 0$

There is a family of solution of Eqs. (1) with a continuous parameter  $\theta$ , angle of rotation in the space of intensities  $(I_+, I_-)$

For  $\theta = 0, \pi$  or  $\pi/2, -\pi/2$  polarization is circular.  
 For  $\theta = \pi/4$  or  $-\pi/4$  the polarization is linear, radial, the Poincare index  $|\eta| = 1$ . The field Cartesian components

$$E_x = \sqrt{2}A_\eta(r)\cos(\eta\varphi), \quad E_y = \sqrt{2}A_\eta(r)\sin(\eta\varphi). \quad (4)$$

Therefore,  $E_x = 0$  on the line  $x = 0$  – not isolated phase singularity ( $\sim$  edge dislocation). For circular polarizations one can see an isolated phase dislocation with topological charge  $+m$  and  $-m$ .

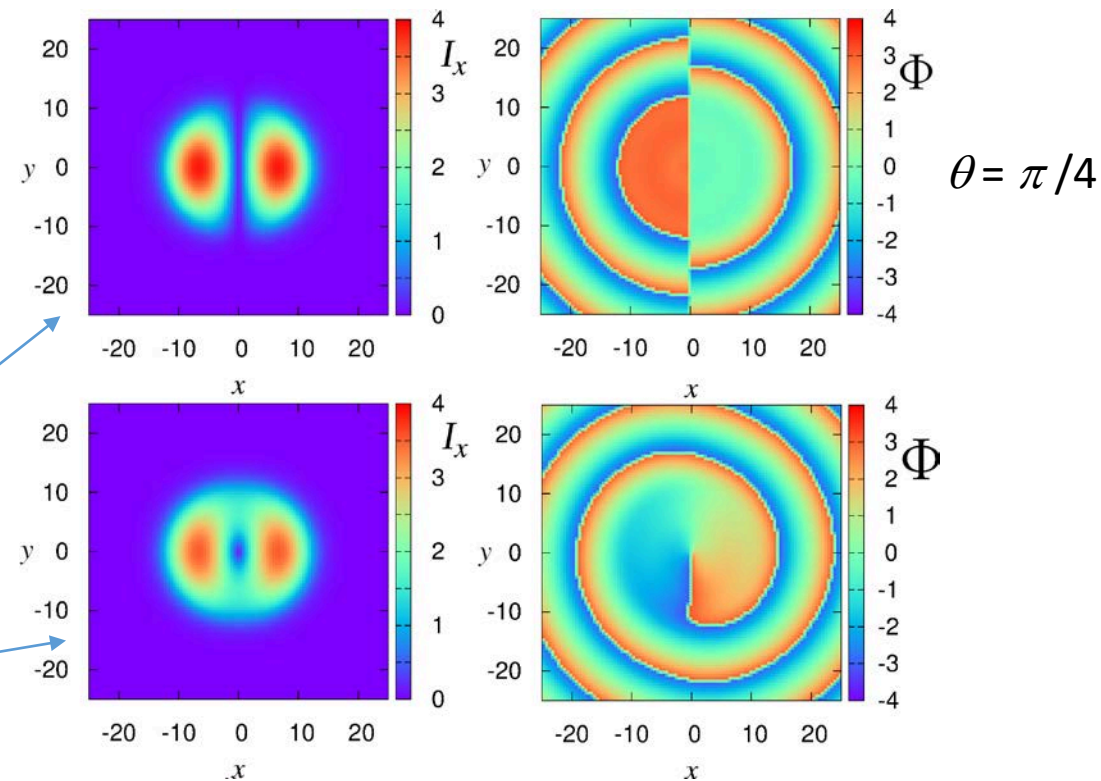
For other values of  $\theta$  the phase singularity is isolated.

All these structures are stable in the framework of Eqs. (1).

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial t} = (i + d)\nabla_\perp^2 E_\pm + f(I)E_\pm \quad (1) \quad I = |E_+|^2 + |E_-|^2 \quad (2)$$

$$E_+(r, \varphi) = e^{im\varphi} A_{|m|}(r)\cos\theta, \quad (3)$$

$$E_-(r, \varphi) = e^{-im\varphi} A_{|m|}(r)\sin\theta$$

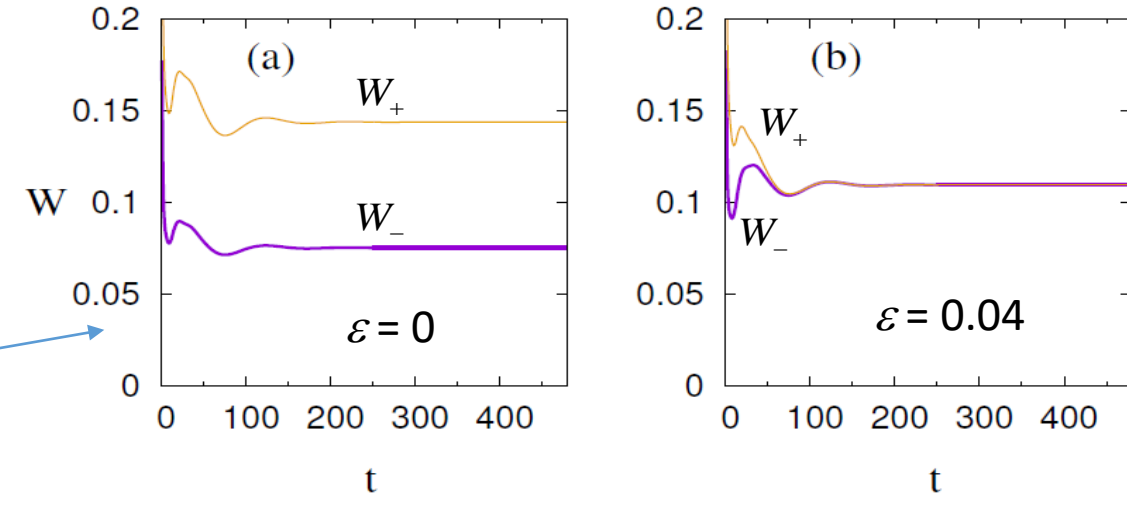


# Non-degenerate case $\epsilon > 0$

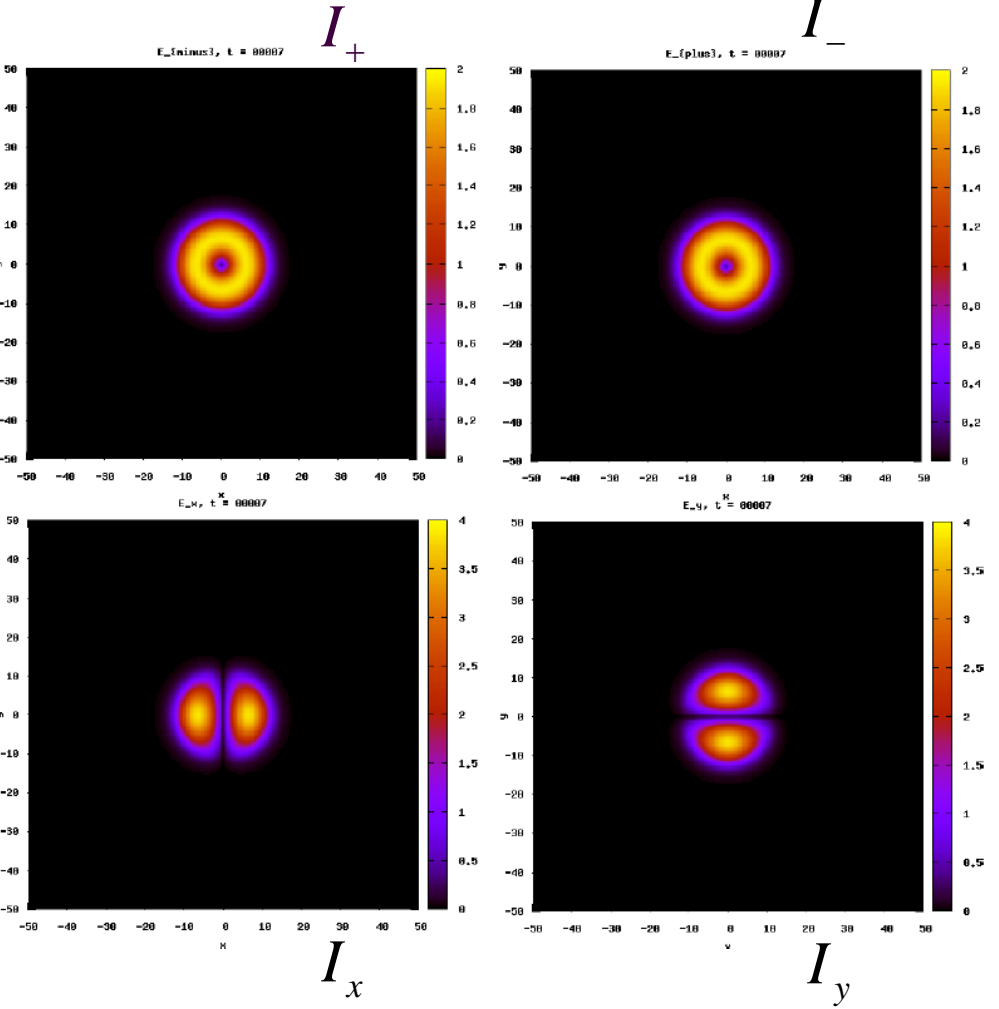
It is possible to show that the previous solutions are unstable except the case of equal intensities of circular polarization components

$$m_+ = 1, \quad m_- = -1$$

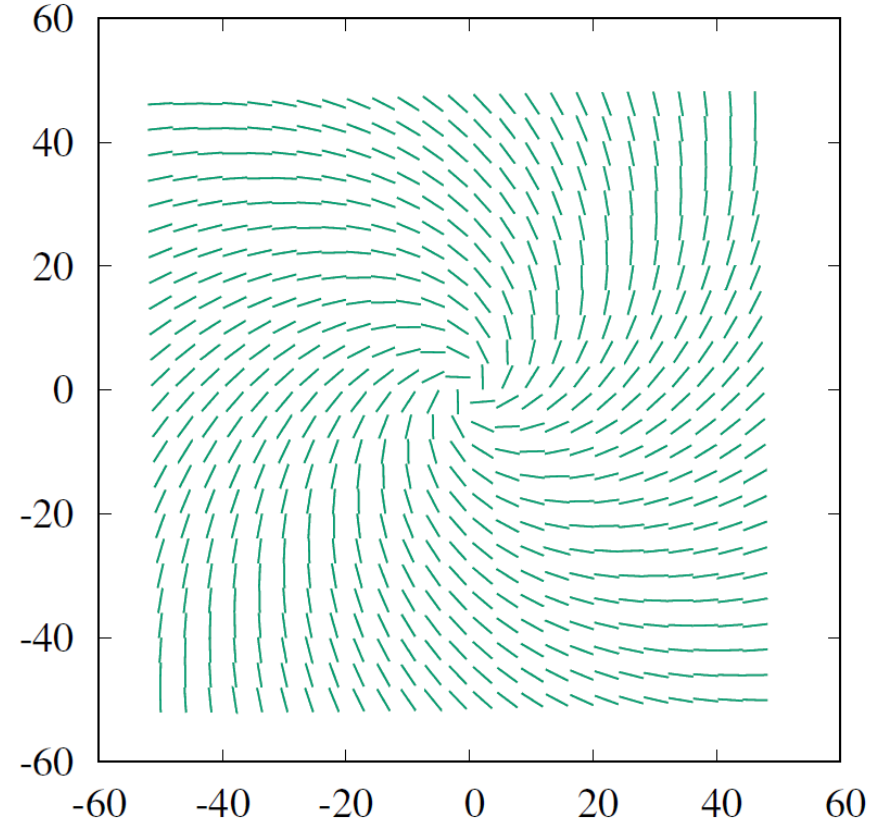
Temporal dependence of normalized power (energy) of two circular field components



Transverse distribution of intensities



Polarization is linear, Poincare index  $\eta = 1$

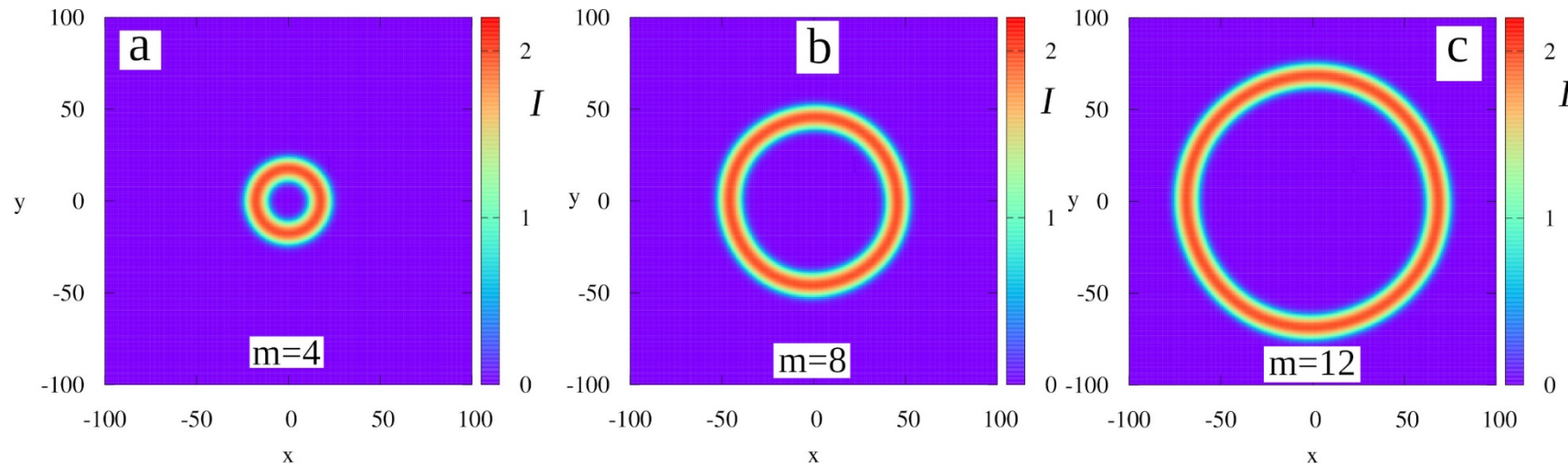




# Various $m_{\pm}$

Initial field:  $E_+(r, \varphi) = e^{im_+\varphi} A_{|m_+|}(r), \quad E_-(r, \varphi) = e^{im_-\varphi} A_{|m_-|}(r)$

Radii of the intensity rings differ for different  $|m_+| \neq |m_-|$ . However, due to interaction of the polarization components, they attract each other with formation of their joint ring, if the difference  $|\delta m| = |m_+ - m_-|$  is not too large.



Intensity distributions for scalar structures with different topological charges  $m$

# Stokes' parameters

$$S_0 = |E_+|^2 + |E_-|^2,$$

$$S_1 = 2\operatorname{Re}(E_-^* E_+),$$

$$S_2 = 2\operatorname{Im}(E_-^* E_+),$$

$$S_3 = |E_+|^2 - |E_-|^2,$$

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

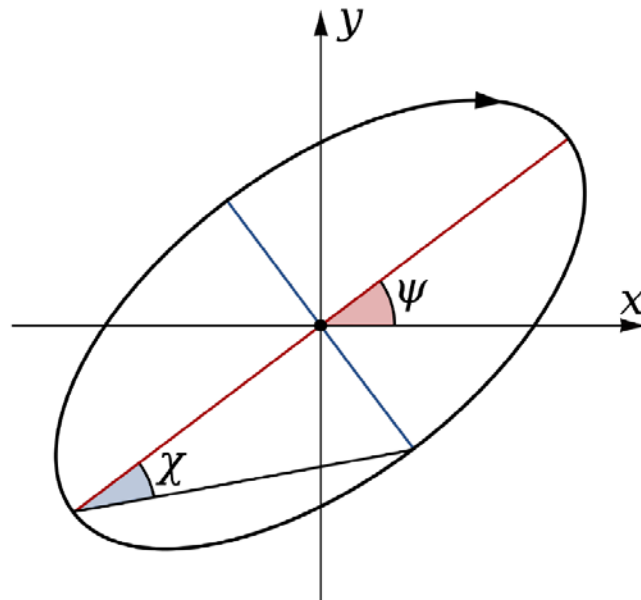
$$\operatorname{tg} 2\psi = S_2 / S_1.$$

$$E_+ = A(r)\exp(im_+\varphi), \quad E_- = A(r)\exp(im_-\varphi), \quad (1)$$

$$S_1 = 4|A(r)|^2 \cos(\delta m\varphi), \quad S_2 = 4|A(r)|^2 \sin(\delta m\varphi),$$

$$\delta m = m_+ - m_-, \quad \psi = (\delta m / 2)\varphi, \quad (2)$$

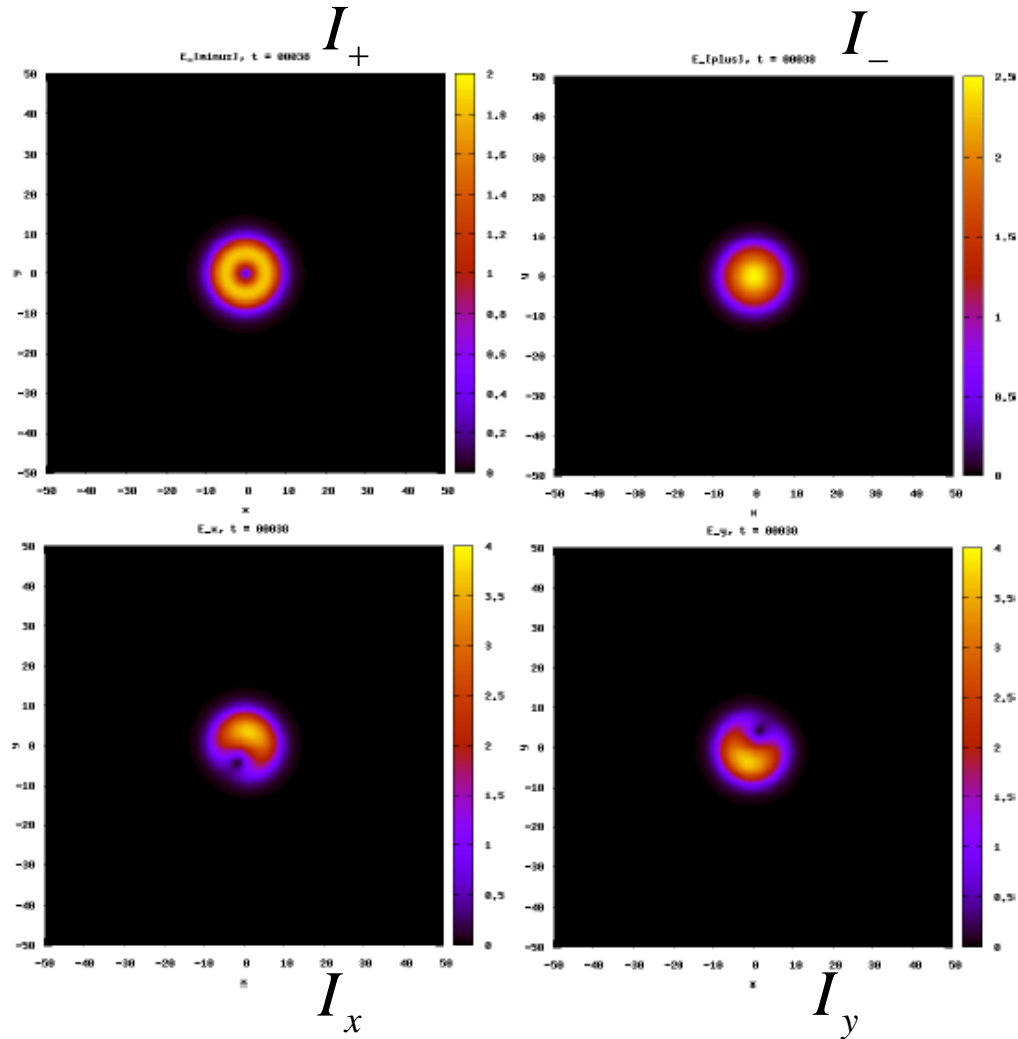
$$\eta = (m_+ - m_-) / 2. \quad (3)$$



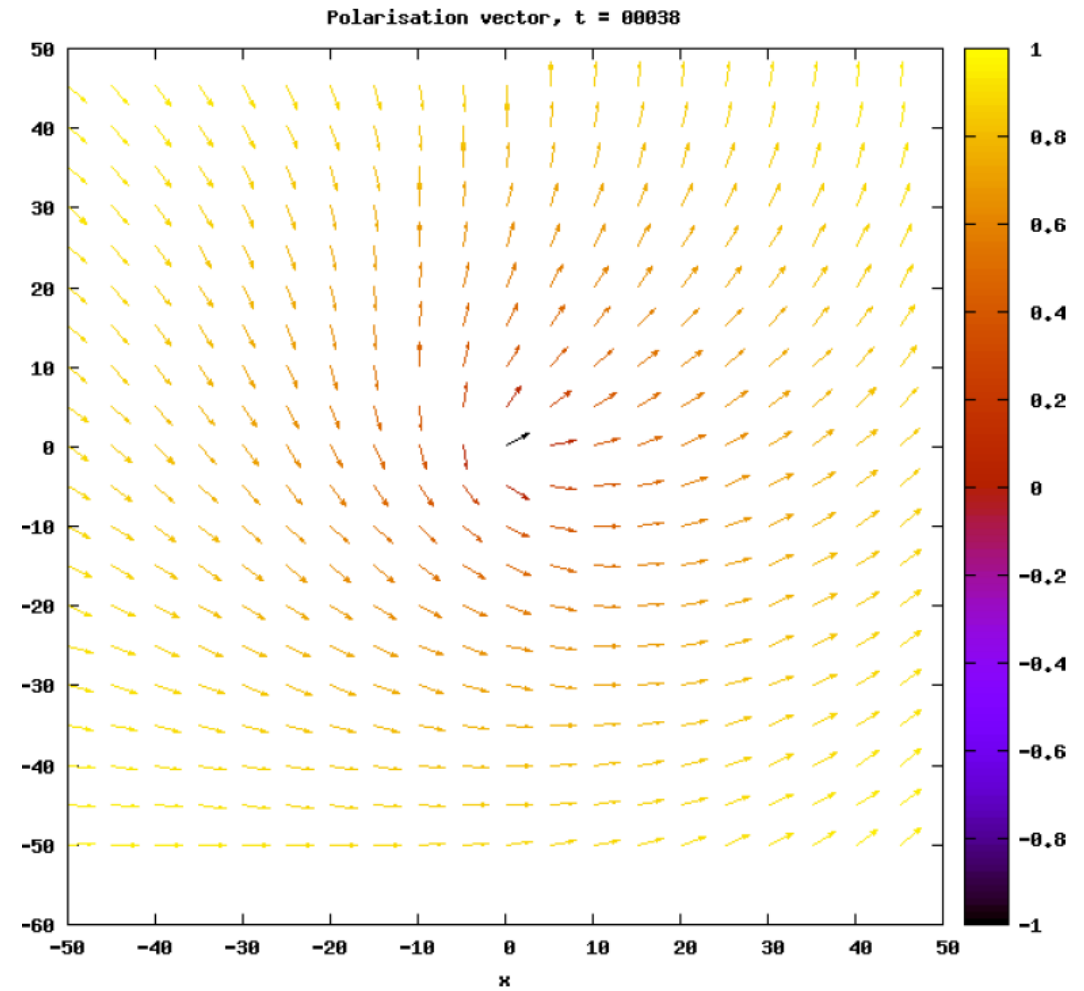
Possible is generalization  
for asymmetric structures

$$m_+ = 0, \quad m_- = 1, \quad \eta = -1/2$$

Transverse distribution of intensities

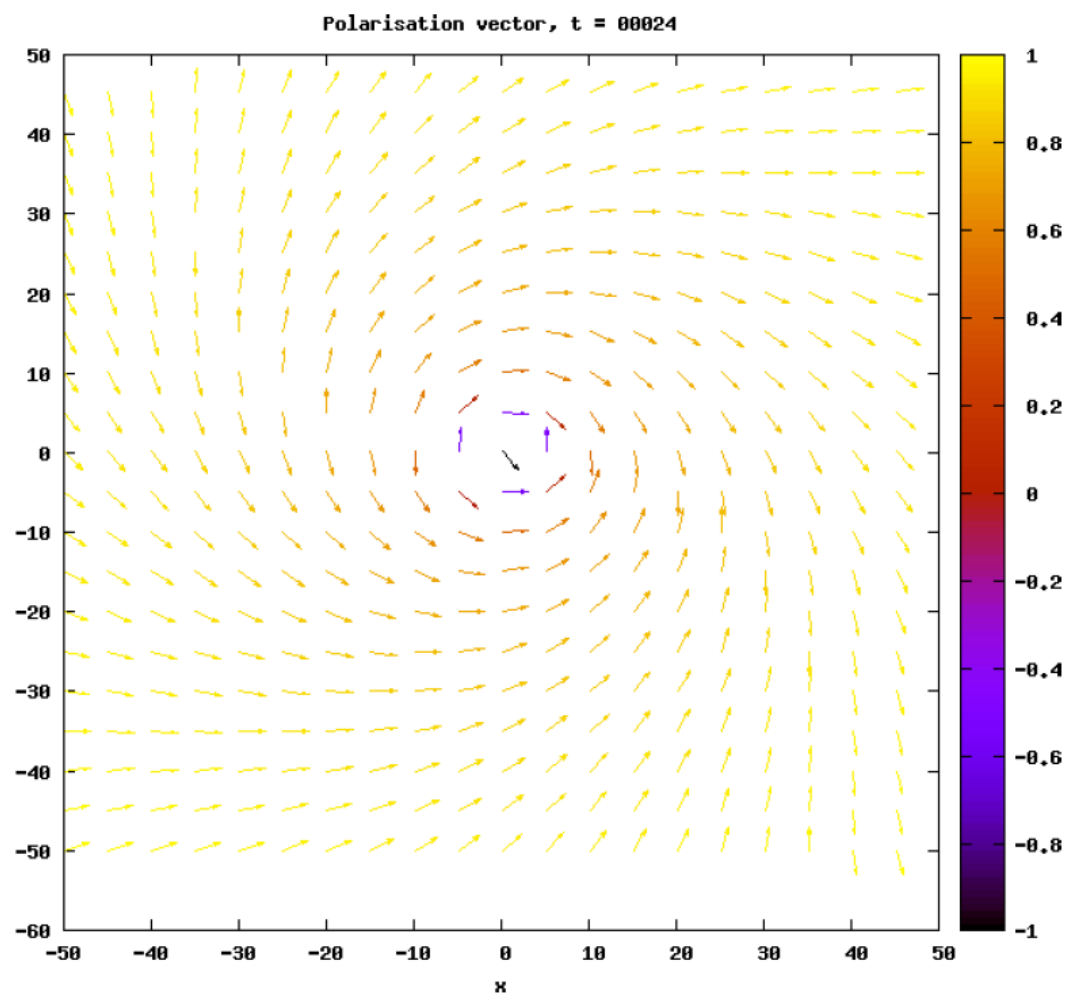
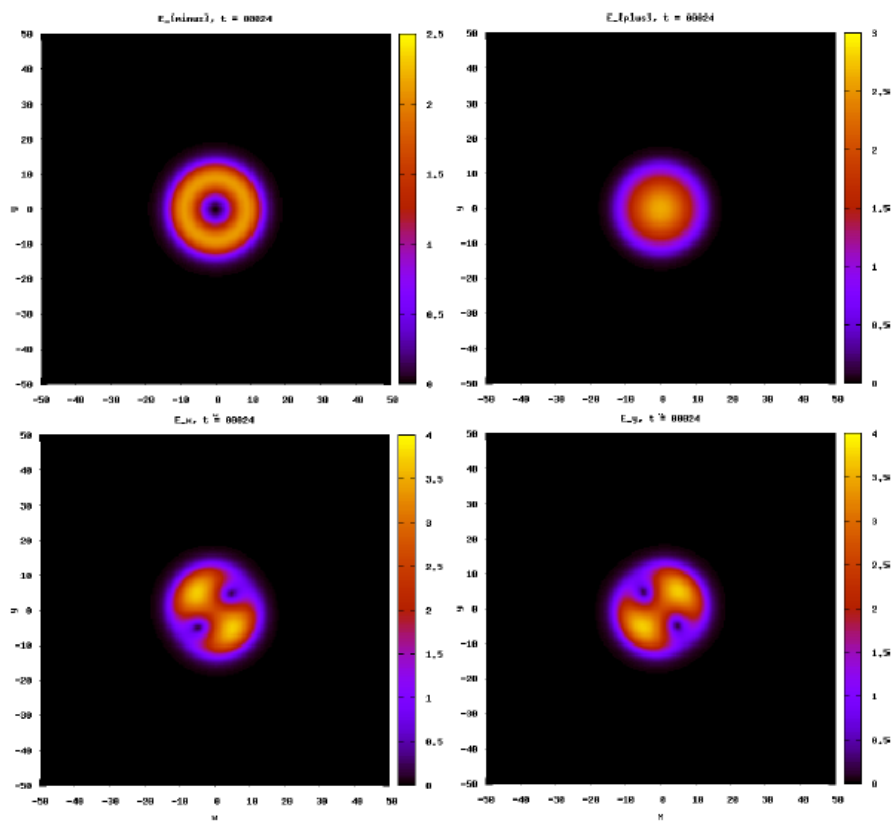


Polarization is linear



$$m_+ = 0, \quad m_- = 2, \quad \eta = -1$$

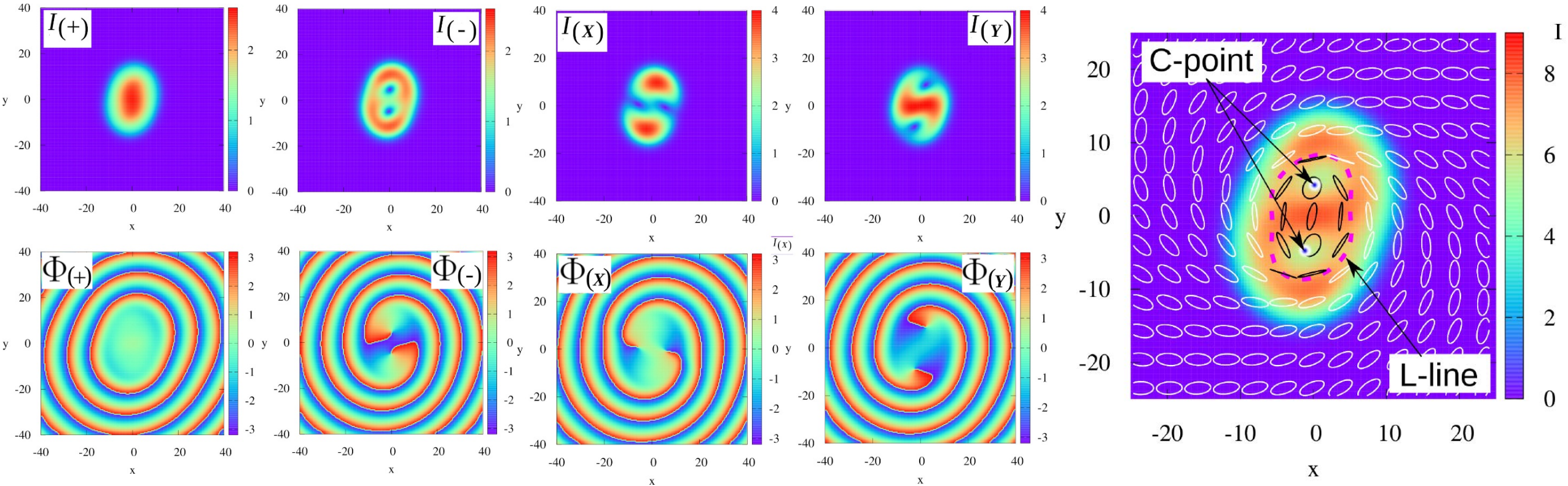
Polarization is linear

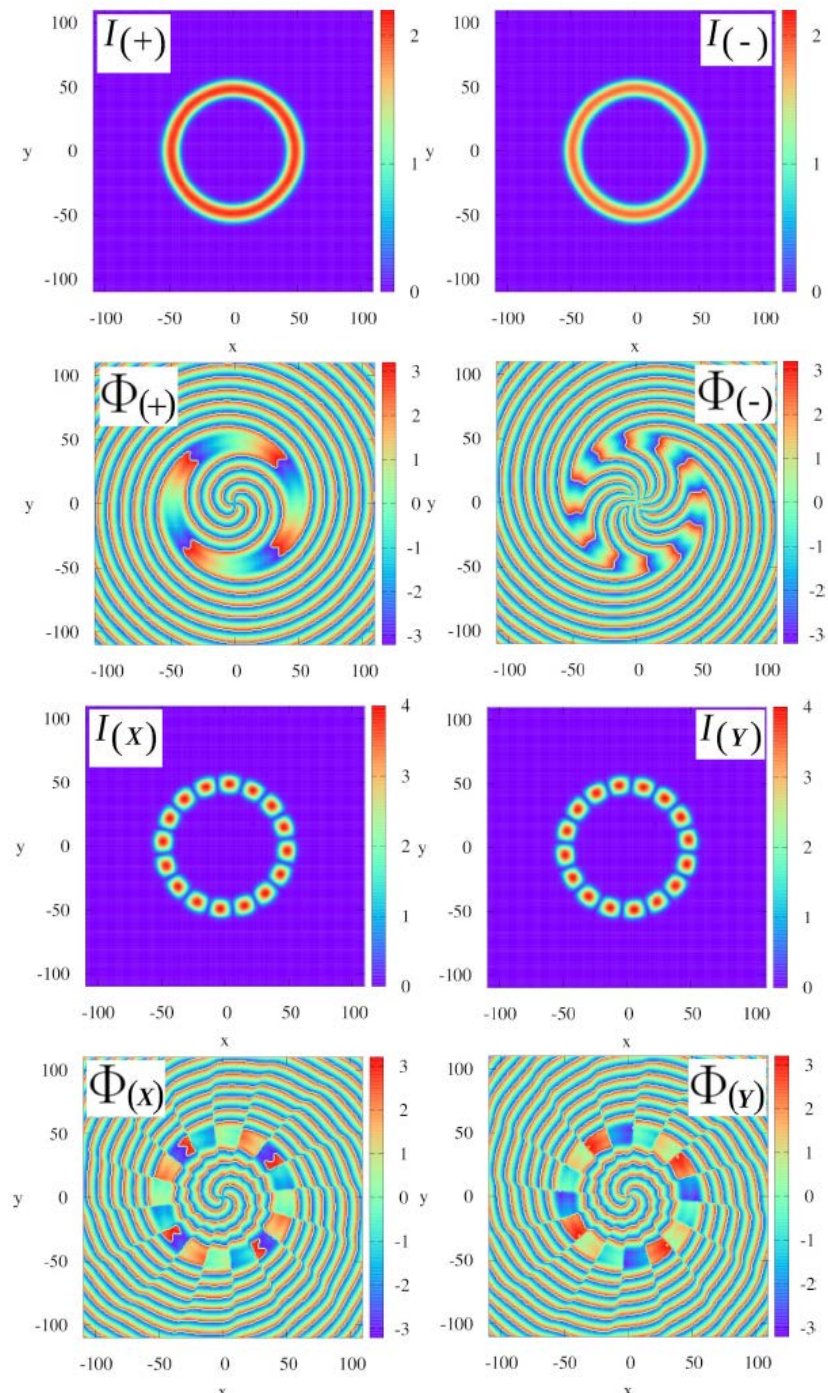


# Asymmetric rotating soliton

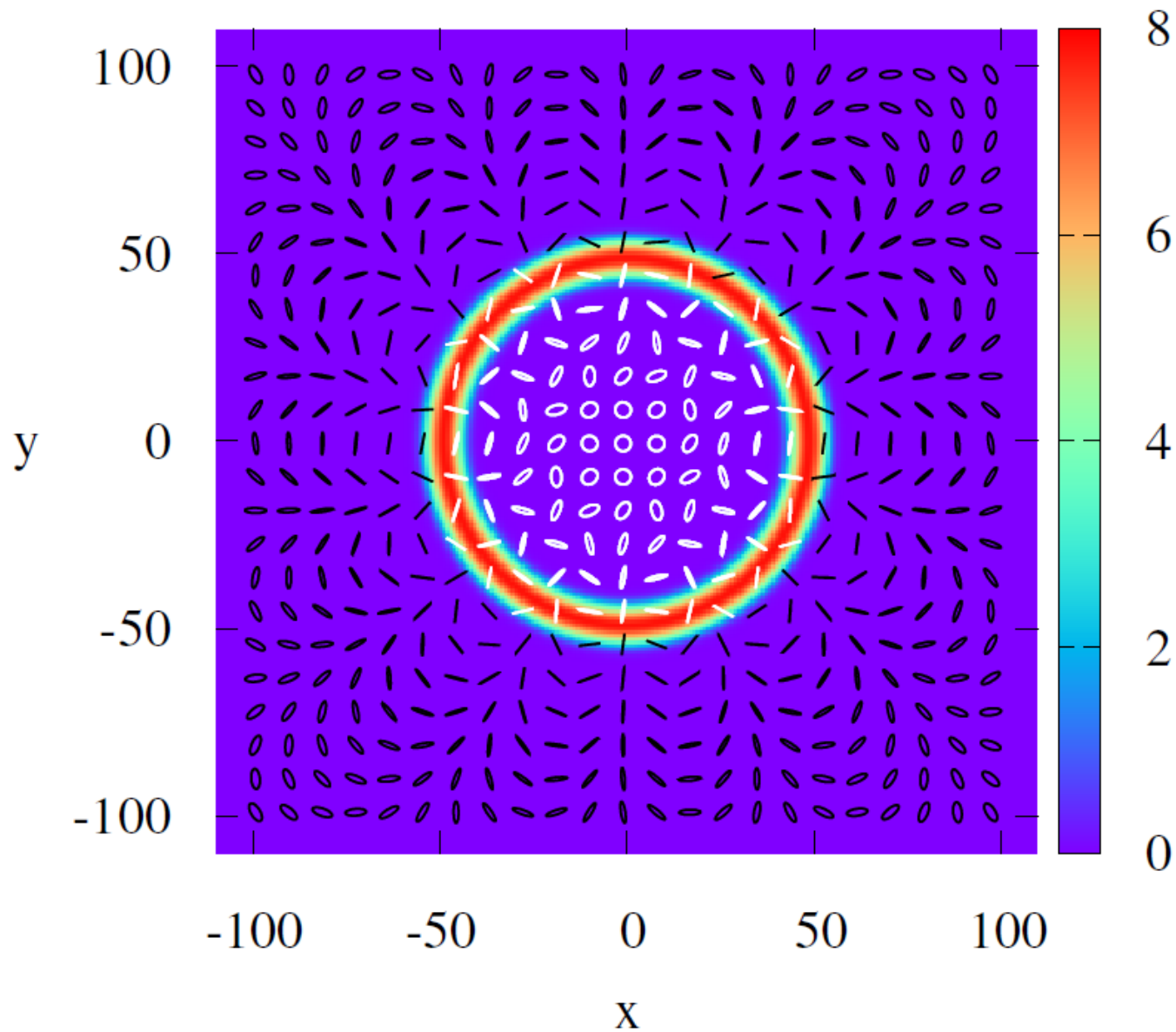
$$m_+ = 0, \quad m_- = -2, \quad \eta = 1$$

Polarization is generally elliptical, circular in two C-points, and linear at the L-line.  
The L-line separates the ellipses with opposite chirality.





$$m_+ = -4, \quad m_- = 12, \quad \eta = -8$$



# Выводы

1. Представлены трубчатые солитоны – новый тип скалярных диссипативных солитонов с размерностью, промежуточной между 2D и 3D, обладающих сингулярностями фазы в виде вихревых нитей с различными топологическими зарядами. В неограниченной среде они неустойчивы.

В резонаторе с докритической длиной устойчивы симметричные солитоны с прямолинейной вихревой линией. При увеличении длины симметрия теряется и вихревые линии искривляются, а при неединичных зарядах они расщепляются на линии с единичным зарядом.

2. Найдены векторные диссипативные 2D солитоны с поляризационными сингулярностями. Они строятся при начальном условии в виде скалярных солитонов с осесимметричным профилем интенсивности и различными топологическими зарядами  $m_+$  и  $m_-$  для двух круговых поляризаций векторного солитона. Устойчивыми оказываются структуры даже со столь большими зарядами, для которых устойчивость скалярных солитонов не имеет места. Поляризация изменяется по поперечному сечению. Индекс Пуанкаре устойчивых структур  $\eta = (m_+ - m_-) / 2$ . Модель описывает широкоапертурные полупроводниковые лазеры.

N. Veretenov, S. Fedorov, N. Rosanov. “Tubular laser solitons,” *Opt. Lett.* **46**, No 15 (2021).

N.N. Rosanov. *Dissipative Optical and Related Solitons*. 2021 (Moscow: Fizmatlit, in Russian).

N.A. Veretenov, N.N. Rosanov, S.V. Fedorov, “Laser solitons: Topological and quantum phenomena,” *Phys. Usp.*, 2022; DOI: [10.3367/UFNe.2020.11.038869](https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.11.038869)

N.N. Rosanov, I.A. Aleksandrov, M.V. Arkhipov, R.M. Arkhipov, I. Babushkin, N.A. Veretenov, A.V. Dadeko, D.A. Tumakov, S.V. Fedorov. “Dissipative aspects of extreme nonlinear optics,” *Quantum Electronics* **51**, 959 – 969 (2021).