К неустойчивости трехмерных состояний динамического равновесия плазмы Власова — Максвелла

Юрий Геннадьевич Губарев[1,2]

Яков Андреевич Журенков[1]

[1]Новосибирский государственный университет
[2]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

3 декабря 2021 г.

Адрес электронной почты: y.zhurenkov@g.nsu.ru

Постановка точной задачи

$$f^s = f^s\left(t, \vec{x}, \vec{v}\right); \quad \vec{E} = \vec{E}\left(t, \vec{x}\right); \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t, \vec{x}\right)$$

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^s}{\partial x_i} + \frac{q^s}{m^s}\left(E_i + \frac{\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_i}{c}\right)\frac{\partial f^s}{\partial v_i} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{B} - \sum_s \frac{q^s}{c}\int\limits_{\Re^3} \vec{v} f^s d\vec{v}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} f^s d\vec{v}; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

Начальные и краевые условия

$$f^s\left(0,\vec{x},\vec{v}\right)=f_0^s\left(\vec{x},\vec{v}\right)$$

$$\vec{E}\left(0,\vec{x}\right)=\vec{E}_0\left(\vec{x}\right);\quad \vec{B}\left(0,\vec{x}\right)=\vec{B}_0\left(\vec{x}\right)$$

$$f^s\left(t,\vec{x},\vec{v}\right)\to 0 \text{ при } \left|\vec{v}\right|\to\infty$$

Функции $f^s,\vec{E},\vec{B}$ либо периодичны, либо стремятся к нулю при $\left|\vec{x}\right|\to\infty$

Законы сохранения

Интеграл полной энергии

$$H = \frac{1}{2} \sum_s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} m^s v_i^2 f^s d\vec{x} d\vec{v} + \frac{1}{2} \int\limits_{\Re^3} \left[E_i^2 + B_i^2 \right] d\vec{x} \equiv const$$

Интегралы движения

$$C^s = \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \Phi^s \left(f^s \right) d\vec{x} d\vec{v} \equiv const$$

Стационарные решения

$$f^{s0} = f^{s0}\left(\vec{x}, \vec{v}\right); \quad \vec{E}^0 = \vec{E}^0\left(\vec{x}\right); \quad \vec{B}^0 = \vec{B}^0\left(\vec{x}\right) = 0$$

$$\vec{E}^0 = -\nabla \phi^0$$

$$\sum_s \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \vec{v} f^{s0} d\vec{v} = 0$$

$$\Delta \phi^0 = -\sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} f^{s0} d\vec{v}$$

$$v_i \frac{\partial f^{s0}}{\partial x_i} - \frac{q^s}{m^s} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_i} \frac{\partial f^{s0}}{\partial v_i} = 0$$

Краевые условия

$$f^{s0}\left(\vec{x},\vec{v}\right) \to 0 \text{ при } |\vec{v}| \to \infty$$

Функции $f^{s0}, \nabla\phi^0$ либо периодичны, либо стремятся к нулю при $|\vec{x}| \to \infty$

Определение отклонения

Пусть поведение плазмы описывается системой функций

$$\vec{\Psi}(\vec{x}, \vec{v}, t) = (\Psi_1(\vec{x}, \vec{v}, t), \Psi_2(\vec{x}, \vec{v}, t), ..., \Psi_n(\vec{x}, \vec{v}, t))$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость, t — время, а вектор-функцию $\vec{\Psi}$ назовем *процессом* в плазме. Рассмотрим невозмущенный $\vec{\Psi}_0$ и возмущенный $\vec{\Psi}$ процессы. Отклонение второго процесса от первого характеризуется вектор-функцией

$$\varphi(\vec{x}, \vec{v}, t) \equiv \vec{\Psi}(\vec{x}, \vec{v}, t) - \vec{\Psi}_0(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

в терминах которой невозмущенному процессу $\vec{\Psi}_0$ соответствует $\varphi \equiv 0$

Определение меры отклонения

Мерой отклонения возмущенного процесса от невозмущенного называется вещественный функционал $M[\varphi]$, удовлетворяющий следующим свойствам: a) $M[\varphi] \geq 0$; b) $M[0] = 0$; c) для любого $\varphi(\vec{x}, \vec{v}, t)$ вещественная функция $m(\vec{x}, \vec{v}, t) \equiv M[\varphi(\vec{x}, \vec{v}, t)]$ является непрерывной по t

Определение устойчивости/неустойчивости

Определение устойчивости

Невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ называется *устойчивым по мере* $m\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0$, такое что, когда для всех начальных распределений $\varphi\left(\vec{x}, \vec{v}, 0\right)$ выполнено $m\left(\vec{x}, \vec{v}, 0\right) < \delta$, то для любых возможных отклонений $\varphi\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right)$ имеет место $m\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right) < \varepsilon$

Определение неустойчивости

Невозмущенный процесс $\varphi \equiv 0$ называется *неустойчивым по мере* $m\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right)$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ при всех $\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0$ найдутся начальное распределение $\varphi\left(\vec{x}, \vec{v}, 0\right)$ и его отклонение $\varphi\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right)$, такие что $m\left(\vec{x}, \vec{v}, 0\right) < \delta$ и $m\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right) > \varepsilon$

Формулировка линеаризованной задачи

$$\frac{\partial f^{s'}}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^{s'}}{\partial x_i} + \frac{q^s}{m^s}\left[E'_i \frac{\partial f^{s0}}{\partial v_i} + \frac{\left(\vec{v} \times \vec{B}'\right)_i}{c} \frac{\partial f^{s0}}{\partial v_i} - \frac{\partial \phi^0}{\partial x_i} \frac{\partial f^{s'}}{\partial v_i}\right] = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}'$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{B}' - \sum_s \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \vec{v} f^{s'} d\vec{v}$$

$$\operatorname{div} \vec{E}' = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} f^{s'} d\vec{v}; \quad \operatorname{div} \vec{B}' = 0$$

Начальные и краевые условия

$$f^{s'}(0,\vec{x},\vec{v}) = (f^{s'})^0(\vec{x},\vec{v})$$

$$\vec{E}'(0,\vec{x}) = (\vec{E}')^0(\vec{x})\,; \quad \vec{B}'(0,\vec{x}) = (\vec{B}')^0(\vec{x})$$

$$f^{s'}(t,\vec{x},\vec{v}) \to 0 \text{ при } |\vec{v}| \to \infty$$

Функции $f^{s'}, \vec{E}', \vec{B}'$ либо периодичны, либо стремятся к нулю при $|\vec{x}| \to \infty$

Сохраняющийся функционал

$$I = H + C, \quad C = \sum_s C^s$$

$$\delta I = \sum_s \int_{\Re^3} \int_{\Re^3} \left[\frac{m^s v_i^2}{2} + q^s \phi^0 + \frac{d\Phi^s}{df^s} \left(f^{s0} \right) \right] \delta f^s d\vec{v} d\vec{x}$$

Условие зануления первой вариации

$$\frac{m^s v_i^2}{2} + q^s \phi^0 + \frac{d\Phi^s}{df^s} \left(f^{s0} \right) = 0$$

Вторая вариация

$$2\delta^2 I = \sum_s \int_{\Re^3} \int_{\Re^3} \frac{d^2\Phi^s}{d{f^s}^2} \left(f^{s0} \right) \left(\delta f^s \right)^2 d\vec{x} d\vec{v} + \int_{\Re^3} \left[\left(\delta E_i \right)^2 + \left(\delta B_i \right)^2 \right] d\vec{x}$$

Линейный аналог функционала полной энергии

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_s \int\limits_{\Re^3}\int\limits_{\Re^3} \frac{d^2\Phi^s}{df^{s2}}\left(f^{s0}\right)\left(f^{s'}\right)^2 d\vec{x}d\vec{v} + \frac{1}{2}\int\limits_{\Re^3}\left[E_i'^2 + B_i'^2\right] d\vec{x} \equiv const$$

Достаточные условия линейной устойчивости

Теорема Ньюкомба-Гарднера-Розенблюта

$$\frac{d^2\Phi^s}{df^{s2}}\left(f^{s0}\right) \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{df^{s0}}{d\left(\frac{m^s v_i^2}{2} + q^s\phi^0\right)} \leq 0$$

Гидродинамическая подстановка

Замена переменных

$$\vec{v}_0 : \vec{v}^s = \vec{V}^s\left(\vec{x}, \vec{v}_0, t\right); \quad \frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0$$

$$f^s\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right) = \rho^s\left(\vec{x}, \vec{v}_0, t\right)\left(J^s\right)^{-1}; \quad J^s \equiv \frac{D\left(V_1^s, V_2^s, V_3^s\right)}{D\left(v_{01}, v_{02}, v_{03}\right)} \neq 0$$

Постановка задачи в новых переменных

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{B} - \sum_s \frac{q^s}{c}\int\limits_{\Re^3} \vec{V}^s \rho^s d\vec{v}_0$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} \rho^s d\vec{v}_0$$

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(V_i^s \rho^s\right) = 0$$

$$\frac{\partial V_i^s}{\partial t} + V_k^s \frac{\partial V_i^s}{\partial x_k} = \frac{q^s}{m^s}\left(E_i + \frac{\left(\vec{V}^s \times \vec{B}\right)_i}{c}\right)$$

Начальные и краевые условия

$$\rho^s\left(0,\vec{x},\vec{v}_0\right)=\rho_0^s\left(\vec{x},\vec{v}_0\right); \quad \vec{V}^s\left(0,\vec{x},\vec{v}_0\right)=\vec{V}_0^s\left(\vec{x},\vec{v}_0\right)$$

$$\vec{E}\left(0,\vec{x}\right)=\vec{E}_0\left(\vec{x}\right); \quad \vec{B}\left(0,\vec{x}\right)=\vec{B}_0\left(\vec{x}\right)$$

Функции ρ^s, $\vec{V}^s$ стремятся к нулю при $|\vec{v}_0|\to\infty$

Функции ρ^s, $\vec{V}^s$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ либо периодичны, либо стремятся к нулю при $|\vec{x}|\to\infty$

Вспомогательные соотношения

$$\frac{\partial J^s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(V_i^s J^s\right) = 0$$

$$\varkappa^s \equiv \rho^s \left(J^s\right)^{-1}: \quad \frac{\partial \varkappa^s}{\partial t} + V_i \frac{\partial \varkappa^s}{\partial x_i} = 0$$

Законы сохранения

Интеграл полной энергии

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_s \int\limits_{\Re^3}\int\limits_{\Re^3} m^s \left(V_i^s\right)^2 \rho^s d\vec{x}d\vec{v}_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Re^3}\left[E_i^2 + B_i^2\right] d\vec{x} \equiv const$$

Интегралы движения

$$C_1^s = \int\limits_{\Re^3}\int\limits_{\Re^3} \Phi_1^s\left(\varkappa^s\right) J^s d\vec{x}d\vec{v}_0 \equiv const$$

Стационарные решения

$$\vec{V}^{s0} = \vec{V^{s0}}\left(\vec{x}, \vec{v}_0\right); \quad \rho^{s0} = \rho^{s0}\left(\vec{x}, \vec{v}_0\right)$$

$$\vec{B}^0 = \vec{B}^0\left(\vec{x}\right) = 0; \quad \vec{E}^0 = \vec{E}^0\left(\vec{x}\right); \quad \vec{E}^0 = -\nabla\phi^0$$

$$\sum_s \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \vec{V}^{s0} \rho^{s0} d\vec{v}_0 = 0$$

$$\Delta\phi^0 = -\sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} d\vec{v}_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(V_i^{s0}\rho^{s0}\right) = 0; \quad V_k^{s0}\frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_k} = -\frac{q^s}{m^s}\frac{\partial \phi^0}{\partial x_i}$$

Краевые условия

Функции ρ^{s0}, $\vec{V}^{s0}$ стремятся к нулю при $|\vec{v}_0|\to\infty$

Функции ρ^{s0}, $\vec{V}^{s0}$, $\nabla\phi^0$ либо периодичны, либо стремятся к нулю при $|\vec{x}|\to\infty$

Вспомогательные соотношения

$$\varkappa^{s0} = \varkappa^{s0}\left(\vec{x}, \vec{v}_0\right): \quad V_i^{s0}\frac{\partial \varkappa^{s0}}{\partial x_i} = 0$$

$$J^{s0} = J^{s0}\left(\vec{x}, \vec{v}_0\right): \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(J^{s0} V_i^{s0}\right) = 0$$

Формулировка линеаризованной задачи

$$\frac{\partial V_i^{s'}}{\partial t} + V_k^{s0}\frac{\partial V_i^{s'}}{\partial x_k} + V_k^{s'}\frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_k} = \frac{q^s}{m^s}\left(E_i' + \frac{\left(\vec{V}^{s0}\times\vec{B}'\right)_i}{c}\right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{B}' - \sum_s \frac{q^s}{c}\int\limits_{\Re^3}\vec{V}^{s0}\rho^{s'}d\vec{v}_0 - \sum_s \frac{q^s}{c}\int\limits_{\Re^3}\vec{V}^{s'}\rho^{s0}d\vec{v}_0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}'; \quad \operatorname{div}\vec{B}' = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{E}' = \sum_s q^s\int\limits_{\Re^3}\rho^{s'}d\vec{v}_0$$

$$\frac{\partial \rho^{s'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{s0}V_i^{s'} + \rho^{s'}V_i^{s0}\right) = 0$$

Начальные и краевые условия

$$\rho^{s'}(0,\vec{x},\vec{v}_0) = (\rho^{s'})^0(\vec{x},\vec{v}_0)\,; \quad \vec{V}^{s'}(0,\vec{x},\vec{v}_0) = (\vec{V}^{s'})^0(\vec{x},\vec{v}_0)$$

$$\vec{E}'(0,\vec{x}) = (\vec{E}')^0(\vec{x})\,; \quad \vec{B}'(0,\vec{x}) = (\vec{B}')^0(\vec{x}) = 0$$

Функции $\rho^{s'}$, $\vec{V}^{s'}$ стремятся к нулю при $|\vec{v}_0| \to \infty$

Функции $\rho^{s'}$, $\vec{V}^{s'}$, $\vec{E}'$, $\vec{B}'$ либо периодичны, либо стремятся к нулю при $|\vec{x}| \to \infty$

Вспомогательные соотношения

$$\frac{\partial \varkappa^{s'}}{\partial t} + V_i^{s0} \frac{\partial \varkappa^{s'}}{\partial x_i} + V_i^{s'} \frac{\partial \varkappa^{s0}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial J^{s'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(J^{s0} V_i^{s'} + J^{s'} V_i^{s0} \right) = 0$$

Сохраняющийся функционал

$$I_1 = H_2 + C_1, \quad C_1 = \sum_s C_1^s$$

Первая вариация

$$\delta I_1 = \sum_s \frac{m^s}{2} \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \left[\left(V_i^{s0} \right)^2 \delta\rho^s + 2\rho^{s0} V_i^{s0} \delta V_i^s \right] d\vec{v}_0 d\vec{x} -$$

$$- \int\limits_{\Re^3} \frac{\partial \phi^0}{\partial x_i} \delta E_i d\vec{x} + \sum_s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \left[\frac{d\Phi_1^s}{d\varkappa^s} \left(\varkappa^{s0} \right) J^{s0} \delta\varkappa^s + \right.$$

$$\left. + \Phi_1^s \left(\varkappa^{s0} \right) \delta J^s \right] d\vec{v}_0 d\vec{x}$$

Первая вариация

Условие зануления первой вариации

$$\frac{m^s \left(V_i^{s0}\right)^2}{2} + q^s \phi^0 + \frac{d\Phi_1^s}{d\varkappa^s}\left(\varkappa^{s0}\right) = 0$$

$$\delta I_1 = 0$$

Вторая вариация

$$2\delta^2 I_1 = \sum_s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \left[m^s \rho^{s0} \left(\delta V_i^s\right)^2 + 2m^s V_i^{s0} \delta V_i^s \delta\rho^s \right] d\vec{v}_0 d\vec{x} +$$

$$+ \sum_s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \left[\frac{d^2 \Phi_1^s}{d\varkappa^{s2}} \left(\varkappa^{s0}\right) J^{s0} (\delta\varkappa^s)^2 \right] d\vec{v}_0 d\vec{x} +$$

$$+ \int\limits_{\Re^3} \left[(\delta E_i)^2 + (\delta B_i)^2 \right] d\vec{x} +$$

$$+ 2 \sum_s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \left\{ \left[\Phi_1^s \left(\varkappa^{s0}\right) + \left(\frac{m^s \left(V_i^{s0}\right)^2}{2} + q^s \phi^0 \right) \varkappa^{s0} \right] J_\delta^s \right\} d\vec{v}_0 d\vec{x}$$

Вторая вариация

$$J_\delta^s \equiv \left(\frac{\partial \delta V_1^s}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial \delta V_2^s}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_3^{s0}}{\partial \vec{v}_0}\right) + \left(\frac{\partial \delta V_2^s}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial \delta V_3^s}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_1^{s0}}{\partial \vec{v}_0}\right) + \\ + \left(\frac{\partial \delta V_3^s}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial \delta V_1^s}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_2^{s0}}{\partial \vec{v}_0}\right)$$

Линейный аналог функционала полной энергии

$$
\begin{aligned}
H_3 = {} & \frac{1}{2} \sum_s \int\limits_{\mathfrak{R}^3} \int\limits_{\mathfrak{R}^3} \left[m^s \rho^{s0} \left(V_i^{s'} \right)^2 + 2 m^s V_i^{s0} V_i^{s'} \rho^{s'} \right] d\vec{v}_0 d\vec{x} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_s \int\limits_{\mathfrak{R}^3} \int\limits_{\mathfrak{R}^3} \left[\frac{d^2 \Phi_1^s}{d \varkappa^{s2}} \left(\varkappa^{s0} \right) J^{s0} (\varkappa^{s'})^2 \right] d\vec{v}_0 d\vec{x} + \\
& + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathfrak{R}^3} \left[E_i'^2 + B_i'^2 \right] d\vec{x} + \\
& + \sum_s \int\limits_{\mathfrak{R}^3} \int\limits_{\mathfrak{R}^3} \left\{ \left[\Phi_1^s \left(\varkappa^{s0} \right) + \left(\frac{m^s \left(V_i^{s0} \right)^2}{2} + q^s \phi^0 \right) \varkappa^{s0} \right] J_1^s \right\} d\vec{v}_0 d\vec{x}
\end{aligned}
$$

Линейный аналог функционала полной энергии

$$J_1^s \equiv \left(\frac{\partial V_1^{s'}}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_2^{s'}}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_3^{s0}}{\partial \vec{v}_0}\right) + \left(\frac{\partial V_2^{s'}}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_3^{s'}}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_1^{s0}}{\partial \vec{v}_0}\right) + \\ + \left(\frac{\partial V_3^{s'}}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_1^{s'}}{\partial \vec{v}_0}, \frac{\partial V_2^{s0}}{\partial \vec{v}_0}\right)$$

Закон сохранения для H_3

$$H_3 \equiv const$$

Поле лагранжевых смещений

$$\vec{\xi}^s = \vec{\xi}^s\left(\vec{x}, \vec{v}_0, t\right)$$

$$\frac{\partial \xi_i^s}{\partial t} = V_i^{s'} + \xi_k^s \frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_k} - V_k^{s0} \frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_k}$$

Преобразованная линеаризованная задача

$$\rho^{s'} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{s0}\xi_i^s\right)$$

$$\vec{E}' = -\sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0}\xi^s d\vec{v}_0$$

$$\vec{B}' = -\sum \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0}\left(\vec{V}^{s0} \times \vec{\xi}^s\right) d\vec{v}_0$$

Поле лагранжевых смещений

Преобразованная линеаризованная задача

$$\operatorname{div} \vec{B}' = 0; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}'$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i^s}{\partial t^2} + 2V_k^{s0}\frac{\partial^2 \xi_i^s}{\partial x_k \partial t} - \xi_k^s \frac{\partial}{\partial x_k}\left(V_m^{s0}\frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_m}\right) +$$
$$+ V_k^{s0}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(V_m^{s0}\frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_m}\right) = \frac{q^s}{m^s}\left(E_i' + \frac{\left(\vec{V}^{s0} \times \vec{B}'\right)_i}{c}\right)$$

Начальные и краевые условия

$$\vec{\xi}^s(0, \vec{x}, \vec{v}_0) = \vec{\xi}^{s0}(\vec{x}, \vec{v}_0)$$

$$\vec{\xi}^s_t(0, \vec{x}, \vec{v}_0) = \vec{\xi}^{s0}_t(\vec{x}, \vec{v}_0)$$

$$\vec{\xi}^s \to 0 \text{ при } |\vec{v}_0| \to \infty$$

Функции $\vec{\xi}^s$ либо периодичны, либо стремятся к нулю при $|\vec{x}| \to \infty$

Вспомогательные соотношения

$$J^{s'} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(J^{s0}\xi_i^s\right); \quad \varkappa^{s'} = -\xi_i^s \frac{\partial \varkappa^{s0}}{\partial x_i}$$

Функционал Ляпунова

$$M = \sum_s m^s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} \xi_i^{s\,2} d\vec{v}_0 d\vec{x}$$

$$\frac{dM}{dt} = 2 \sum_s m^s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} \xi_i^s \frac{\partial \xi_i^s}{\partial t} d\vec{v}_0 d\vec{x}$$

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 2 \sum_s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \left[m^s \rho^{s0} \left(\frac{\partial \xi_i^s}{\partial t} + V_k^{s0} \frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_k} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - q^s \rho^{s0} \xi_i^s \xi_k^s \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x_i \partial x_k} \right] d\vec{v}_0 d\vec{x} +$$

$$+ 2 \int\limits_{\Re^3} \left[B_i'^2 - E_i'^2 \right] d\vec{x}$$

Основное дифференциальное неравенство

$$\ddot{M} - 2\lambda\dot{M} + 2\left(\lambda^2 + \gamma\right) M \geq 0$$

$$\gamma = \alpha + \beta$$

$$\alpha : \quad \forall s \quad -\alpha\left(\xi_k^s\right)^2 \leq \frac{q^s}{m^s}\xi_i^s\xi_k^s\frac{\partial^2\phi^0}{\partial x_i \partial x_k} \leq \alpha\left(\xi_k^s\right)^2$$

$$\beta : \quad \int\limits_{\Re^3} E_i'^2 d\vec{x} \leq \beta M$$

$$\lambda > 0$$

Дополнительные условия

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) > 0;\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$\dot{M}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) \geq 2\left(\lambda+\frac{\gamma}{\lambda}\right) M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right)$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) \equiv M\left(0\right)\exp\left(\frac{\lambda\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right)$$

$$\dot{M}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) \equiv \dot{M}\left(0\right)\exp\left(\frac{\lambda\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right)$$

Априорная оценка снизу

$$M\left(t\right) \geq C_0 \exp\left(\lambda t\right)$$

$$C_0 \equiv const > 0$$

Начальные данные для растущих возмущений

$$M\left(0\right) > 0$$

$$\dot{M}\left(0\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\gamma}{\lambda}\right) M\left(0\right)$$

Выводы

- Рассмотрена задача линейной устойчивости пространственных состояний динамического равновесия плазмы Власова — Максвелла в трехмерной декартовой системе координат.
- Осуществлен переход от системы кинетических уравнений к бесконечной системе гидродинамических уравнений, похожих на уравнения пространственных изэнтропических течений идеальной сжимаемой среды в приближениях «вихревой мелкой воды» и Буссинеска.
- Найдены достаточные условия линейной практической неустойчивости. В случае, когда эти условия выполнены, построена априорная экспоненциальная оценка снизу роста изучаемых малых возмущений.
- Обращено достаточное условие линейной устойчивости Ньюкомба — Гарднера — Розенблюта, выявлен его формальный характер.
- Действие классической для электростатики теоремы Ирншоу обобщено на случай элетромагнитных полей, а также с теоретической механики на статистическую.

Спасибо за внимание!