ON INTEGRABILITY OF THE O(3)-MODEL in D(3,0) & D(3,1)

A.B. Borisov

Применение:

- трехмерные вихри в ферромагнетике , ЖК

$$E = \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{n}}{\partial x_i}\frac{\partial\vec{n}}{\partial x_i}, \quad \vec{n} = \ (\cos\Phi\sin\Theta\,, \sin\Phi\sin\Theta\,, \cos\Theta)$$

- модель $\vec{n}$ в теории поля
- популярное решение «ёж»:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = (\cos\varphi\sin\theta\,, \sin\varphi\sin\theta\,, \cos\theta)$$

«Ёж»

Интегрируемые системы с полем $\vec{n}$

1. $D = (2,0)$; $D = (1,1)$
2. *В.Е. Захаров, А.В. Михайлов.* Релятивистски инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 6. С. 1953-1973.
3. $D = (1,1)$ при $g \in SU(2)$

$$g = \sum_{i=0}^{3} n_i \sigma_i$$

Уравнения

$$\Delta\Theta = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 \sin 2\Theta$$

$$\nabla[\nabla\Phi \sin^2 \Theta] = 0$$

Упрощение уравнений модели

Подстановка:

$$\Theta(x_1, x_2, x_3) = \Theta[a(x_1, x_2, x_3)]$$

Уравнения:

$$\Theta''(a) = \frac{\sin 2\Theta(a)}{2}$$

$$\Delta a = \Delta\Phi = 0,\ \nabla a \nabla\Phi = 0,\ (\nabla a)^2 = (\nabla\Phi)^2$$

Решетка солитонов:

$$\cos\Theta(a) = \operatorname{sn}\left[\frac{a}{k}, k\right]$$

2π-солитон:

$$\Theta(a) = 2\arctan[\exp(-a)] \quad \text{при} \quad k \to 1$$

Уравнения для S:

Комплекснозначное поле

$$S = a + \mathrm{i}\,\Phi$$

и система уравнений для него:

$$(\nabla S)(\nabla S) = 0$$

$$\Delta S = 0$$

О подстановке

20 долгих лет, 2D-ферромагнетик, уравнение дуальности Белавина-Полякова

$$\partial_\mu n_i = \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ijk} n_j \partial_\nu n_k$$

Дифференциальные связи:

$$w_1 = \cot\frac{\Theta}{2}\cos\Phi, \quad w_2 = \cot\frac{\Theta}{2}\sin\Phi$$

$$w = w_1 + \mathrm{i}\, w_2$$

$$\partial_x w_1 = \partial_y w_2, \; \partial_x w_2 = -\partial_y w_1$$

$$w = F[x + \mathrm{i}\, y]$$

От уравнений дуальности к дифф. связям в 2D

$$\partial_x \Theta = -\sin\Theta \partial_y \Phi, \quad \partial_y \Theta = \sin\Theta \partial_x \Phi$$

$$\partial_x a = \partial_y \Phi, \quad \partial_y a = -\partial_x \Phi$$

$$\Delta a = \Delta\Phi = 0,\ \nabla a \nabla \Phi = 0,\ (\nabla a)^2 = (\nabla \Phi)^2$$

$$\Psi = \exp S$$

Свойства:

- Дифференциальные связи для O(3)-модели в R^2 обобщаются на любое R^N
- Уравнение дуальности не обобщается
- В D2 получены новые типы структур:

  одиночный инстантон: $S = \ln z$;

  инстантоны: $S = (Q + \mathrm{i}\, N) \ln[z] + sn$;

  источники ;

  вихревые спирали ;

Точные решения модели

$$\partial_{x_3} S = \sqrt{-\partial_{x_1} S^2 - \partial_{x_2} S^2}$$

$$\partial_{x_1} S^2 \partial_{x_2}^2 S - 2\partial_{x_1 x_2} S \partial_{x_1} S \partial_{x_2} S + \partial_{x_2} S^2 \partial_{x_1}^2 S = 0$$

Новые переменные:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial_{x_1} S}{\sqrt{\partial_{x_1} S^2 + \partial_{x_2} S^2}}, \quad \beta(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial_{x_2} S}{\sqrt{\partial_{x_1} S^2 + \partial_{x_2} S^2}}$$

$$\partial_{x_1}\alpha + \partial_{x_2}\beta = 0$$

Параметризация:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \sin[B(x_1, x_2, x_3)], \ \beta(x_1, x_2, x_3) = \cos[B(x_1, x_2, x_3)]$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Результат:

Система квазилинейных уравнений

$$\partial_{x_1} S = \partial_{x_2} S \tan[B], \quad \partial_{x_3} S = -\mathrm{i}\, \partial_{x_2} S \sec[B]$$

$$\partial_{x_3} B + i\left(\cos[B]\partial_{x_2} B + \sin[B]\partial_{x_1} B\right) = 0$$

Решение системы:

Первые интегралы:

$$H_1 = -\mathrm{i}\, x_3 \sin B(x_1, x_2, x_3) + x_1$$

$$H_2 = -\mathrm{i}\, x_3 \cos B(x_1, x_2, x_3) + x_2$$

$$H_3 = B(x_1, x_2, x_3)$$

Общее решение:

$$G[H_1 \sin H_3 + H_2 \cos H_3\,, H_3\,] = 0$$

Инвариантность $S \to F(S)$

Из уравнений

$$\partial_{x_1} B\, \partial_{x_2} S - \partial_{x_2} B\, \partial_{x_1} S = 0$$

$$\partial_{x_3} B\, \partial_{x_2} S - \partial_{x_2} B\, \partial_{x_3} S = 0$$

следует

$$S(x_1, x_2, x_3) = F\big(B(x_1, x_2, x_3)\big)$$

Замена $S \to S(B)$ в уравнениях для S:

$$(\nabla B)(\nabla B) = 0, \quad \Delta B = 0$$

Простейший пример:

Уравнение $G[\cdot,\cdot] = 0$:

$$H_1 \sin H_3 + H_2 \cos H_3 = 0$$

Функция $B(x_1, x_2, x_3)$:

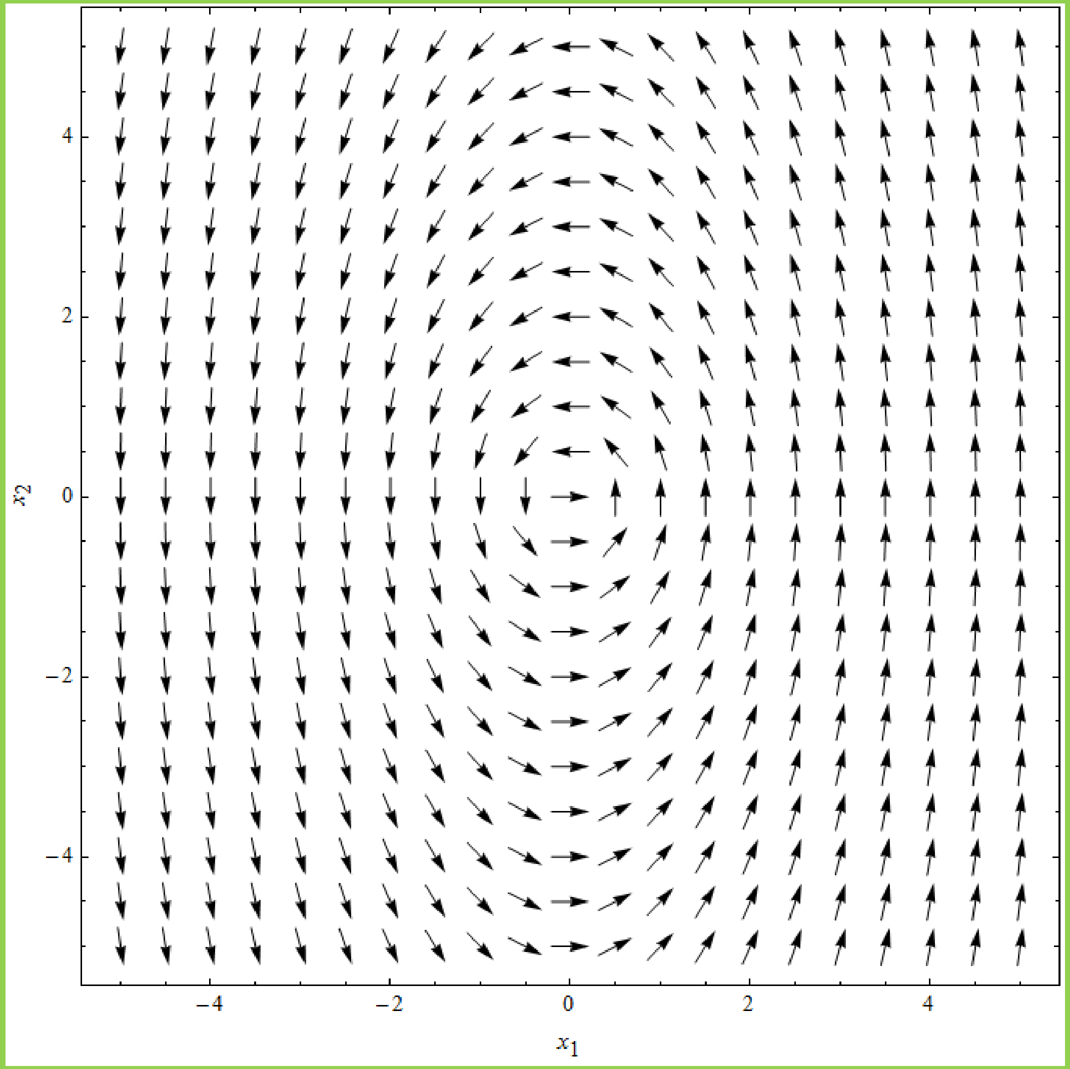
$$B(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) = \frac{-x_2 x_3 + \mathrm{i}\, x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{x_1^2 + x_2^2}$$

Решение для $B(x_1, x_2, x_3)$:

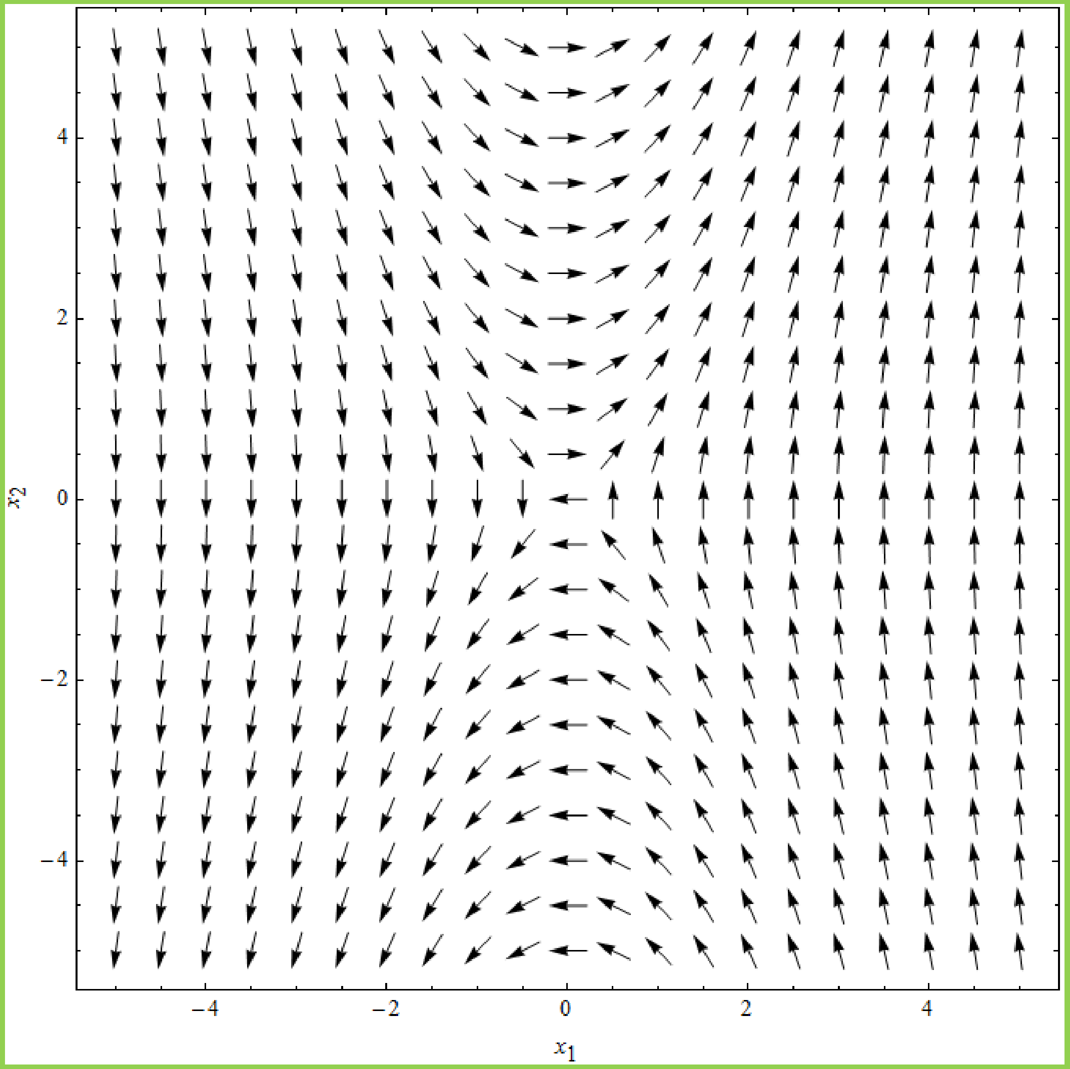
$$\mathrm{S}(x_1, x_2, x_3) = a(x_1, x_2, x_3) + \mathrm{i}\,\Phi(x_1, x_2, x_3) = Q \ln B(x_1, x_2, x_3)$$

$$a(x_1, x_2, x_3) = Q \ln \frac{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = Q \arg\left(-x_2 x_3 + i\, x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$$



$x_3 = 1$



$x_3 = -1$

Свойства:

- В цилиндрической системе координат (r, z, φ) смена знака вихря:

$$\Phi(r, z, \varphi) \to \operatorname{sign}(z) Q\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

- В сферической системе координат (R, φ, θ):

$$S = F\left(\mathrm{i}\,\varphi + \ln\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

при $F \to 1$ приводит к структуре «ежа»

Динамика трехмерных магнитных структур

O(3)-модель в 3D+1 псевдоевклидовом пространстве-времени

- Координаты $(x_0 = t, x_1, x_2, x_3)$
- Плотность лагранжиана:

$$L = g_{\mu\nu}\partial_\mu n_j \partial_\nu n_j$$

- Определение и свойства метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$$

$$g_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\Theta = \frac{1}{2}\sin 2\Theta\, g_{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi, \quad g_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\Phi = 0,$$

$$\sin\Theta\, g_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\Phi + 2\cos\Theta g_{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Theta = 0$$

Подстановка. Дифференциальные связи.

$$g_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\Phi = 0, \quad g_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}a = 0,$$

$$g_{\mu\nu}\partial_{\mu}\Phi\partial_{\nu}a = 0,$$

$$g_{\mu\nu}\partial_{\mu}\Phi\partial_{\nu}\Phi = g_{\mu\nu}\partial_{\mu}a\partial_{\nu}a$$

$$\Theta''(a) = \frac{\sin 2\Theta(a)}{2}$$

Уравнения для дифференциальных связей

$$S(x_1, x_2, x_3, t) = a(x_1, x_2, x_3, t) + \mathrm{i}\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$(\partial_t S)^2 - (\nabla S)(\nabla S) = 0$$

$$\partial_t^2 S - \Delta S = 0$$

Решение:

Из первого уравнения выразим $\partial_t S$

$$\partial_t S = \sqrt{B}, \text{ где } B = \nabla S \cdot \nabla S$$

и подставим его во второе. Получим уравнение:

$$2\,\Delta S\,B - \nabla B \cdot \nabla S = 0$$

Стандартные методы решения не подходят

Для решения этого уравнения Монжа-Ампера не подходят стандартные методы, изложенные во многих монографиях

Оригинальная замена

Вектор

$$\vec{A} = \vec{A}(x_1, x_2, x_3, t)$$

со свойствами:

$$\vec{A} = \frac{\nabla S}{\sqrt{B}}, \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = 1$$

Тогда уравнение

$$2\,\Delta S\,B - \nabla B \cdot \nabla S = 0$$

эквивалентно

$$\nabla \vec{A} = 0$$

Связь $\vec{A}$ с частными производными S

$$\partial_{x_m} S = \mathrm{i}\,\frac{A_m}{A_3}\,\partial_{x_3} S, \quad (m = 1,2)$$

$$\partial_t S = i\,\frac{\partial_{x_3} S}{A_3}$$

Система квазилинейных дифф. уравнений

как следствие условий совместности производных:

$$\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}=0$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)_m-\left(\vec{A}\times\partial_t\vec{A}\right)_m=0,\quad (m=1{,}2)$$

Параметризация

$$\vec{A}=(\cos\Psi\sin\vartheta\,,\sin\Psi\sin\vartheta\,,\cos\vartheta)$$

сводит её к системе из четырех квазилинейных д.у.

Случай D(2,1)

$$S = S(x_1, x_2, t), \quad \vartheta = \vartheta(x_1, x_2, t), \quad \Psi = \Psi(x_1, x_2, t)$$

$$\nabla \vec{A}(x_1, x_2, t) = 0$$

$$\vec{A}(x_1, x_2, t) = \frac{\nabla S(x_1, x_2, t)}{\sqrt{\nabla S(x_1, x_2, t) \cdot \nabla S(x_1, x_2, t)}}$$

Параметризация и упрощенная система

Параметризация

$$\vec{A}(x_1, x_2, t) = \left(\cos\Psi(x_1, x_2, t), \sin\Psi\,(x_1, x_2, t)\right)$$

Уравнения

$$\partial_t \Psi - \sin\Psi\, \partial_{x_2}\Psi - \cos\Psi\, \partial_{x_1}\Psi = 0$$

$$-\sin\Psi\, \partial_{x_1}\Psi + \cos\Psi\, \partial_{x_2}\Psi = 0$$

Решение уравнений

Неявное уравнение с произвольной функцией $H[\cdot,\cdot]$:

$$H[U,\Psi] = 0$$

$$U = t + x_2 \sin\Psi + x_1 \cos\Psi$$

Общее решение:

$$S(x_1, x_2, t) = a(x_1, x_2, t) + \mathrm{i}\,\Phi(x_1, x_2, t) = G(\Psi(x_1, x_2, t))$$

Пример

Выбор:

$$G(\Psi) = \mathrm{i}\Psi, \quad H[U,\Psi] = U$$

Решение

$$U = t + x_1 \cos\Psi + x_2 \sin\Psi = 0$$

в полярных координатах (r, φ) имеет вид:

$$\Psi(r,\varphi) = \varphi + s \arccos\frac{t}{r}, \quad s = \pm 1$$

и описывает эволюцию двумерного плоского вихря:

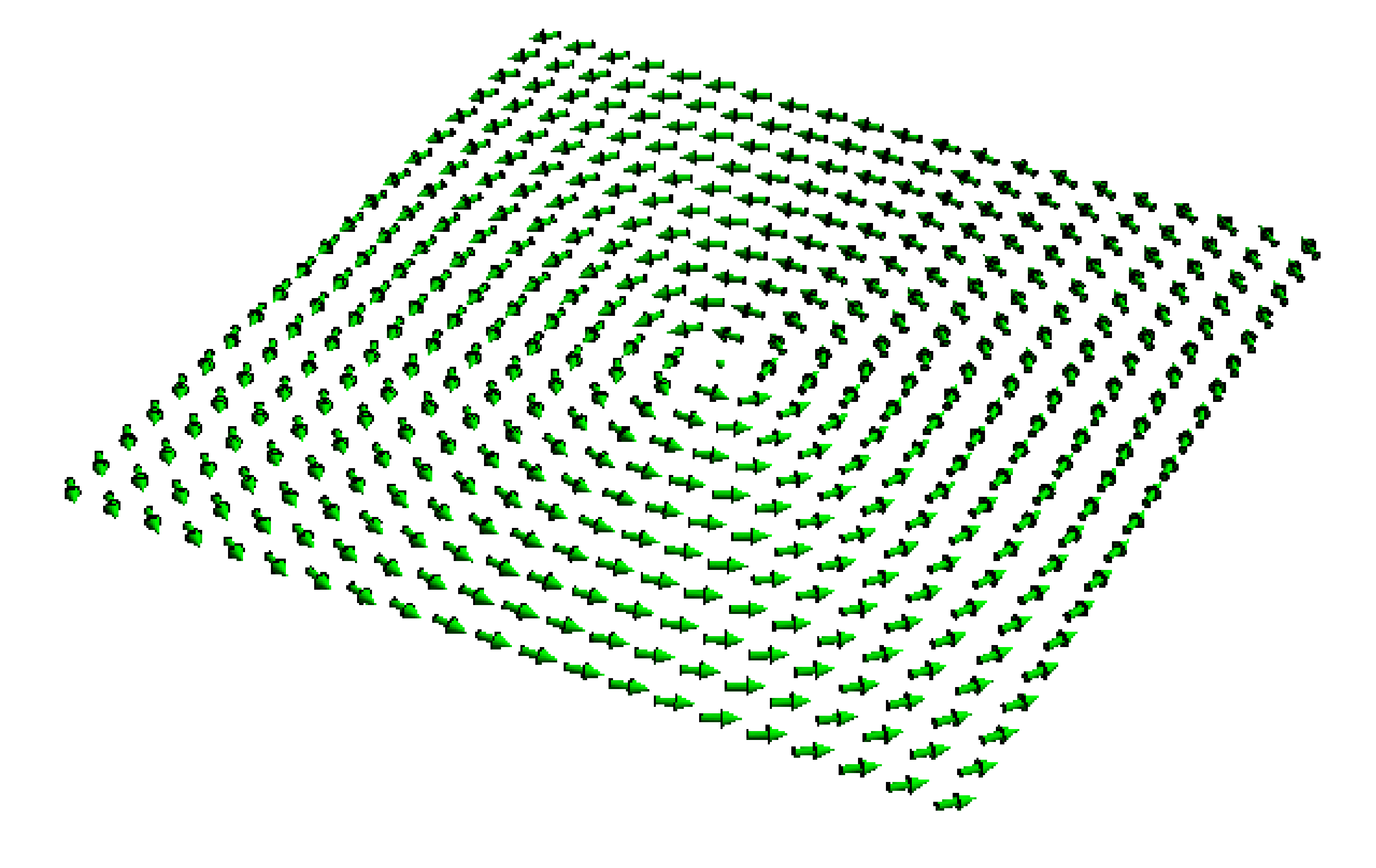
$$a(r,\varphi,t) = \begin{cases} 0, & t \le r \\ s\ln\left(\frac{t}{r} + \sqrt{\frac{t^2}{r^2} - 1}\right), & t > r \end{cases};$$

$$\Phi(r,\varphi,t) = \begin{cases} \varphi + s\arccos\left(-\frac{t}{r}\right), & t \le r \\ \varphi + s\,\pi, & t > r \end{cases},$$

В топологии это называется «вытеканием вихря в третье измерение». Именно разрушение плоского вихря в D=2 и описывает эта формула.

При этом, подобно решению для точечного взрыва в газах, поля $a(r, \varphi, t)$, $\Phi(r, \varphi, t)$ распространяются в виде цилиндрической волны с радиусом $r = t$ с единичной скоростью, и после прохождения этой волны опять возникает невозмущенное состояние для поля $a(r, \varphi, t)$ или добавка $s \arccos(-t/r)$ для поля $\Phi(r, \varphi, t)$.

«Вытекание» вихря в третье измерение



Интегрируемость модели в 3D+1 псевдоевклидовом пространстве-времени

- Неявные функции, определяющие решения:

$$T_1(X, \Psi) = 0, \quad T_2(X, \vartheta) = 0, \quad X = t + x_i A_i$$

- Связь полей ϑ и Ψ через произвольную функцию U:

$$\vartheta = U(\Psi)$$

- Уравнение для Ψ (функция V -- произвольная):

$$V(H \sec \Psi, \Psi) = 0$$

и общее решение:

$$H = t + \sin U[\Psi] \, (x_1 \cos \Psi + x_2 \sin \Psi) + x_3 \cos U[\Psi]$$

$$S = T(\Psi)$$

Зарождение топологической структуры

Решение:

$$S = T(\Psi) = \mathrm{i}\,\Psi, \quad H = 0, \quad U(\Psi) = U \ \ (U \in R)$$

В цилиндрических координатах (r, φ, x_3):

$$\Psi(r, \varphi, x_3, t) = \varphi + \operatorname{arccos} \frac{t + x_3 \cos U}{r \sin U}$$

«Плоская» фаза поля $\vec{n}$:

При

$$\frac{t + x_3 \cos U}{r \sin U} \leq 1$$

значения функции Ψ вещественны, тогда:

$$a(r, \varphi, x_3, t) \equiv 0$$

$$\Phi(r, \varphi, x_3, t) = \varphi + \arccos \frac{t + x_3 \cos U}{r \sin U}$$

и поле Φ имеет вихревую структуру

«Другая» фаза поля $\vec{n}$:

При

$$\frac{t + x_3 \cos U}{r \sin U} > 1$$

значения функции Ψ комплексны, тогда:

$$a(r, \varphi, x_3, t) = \ln\left[\frac{t + x_3 \cos U}{r \sin U} + \sqrt{\left(\frac{t + x_3 \cos U}{r \sin U}\right)^2 - 1}\right]$$

$$\Phi(r, \varphi, x_3, t) = \varphi$$

-- область существования «другой» фазы

Топологический заряд

- Формула:

$$q = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \sin\Theta \, \mathrm{d}\Phi \, \mathrm{d}\Theta$$

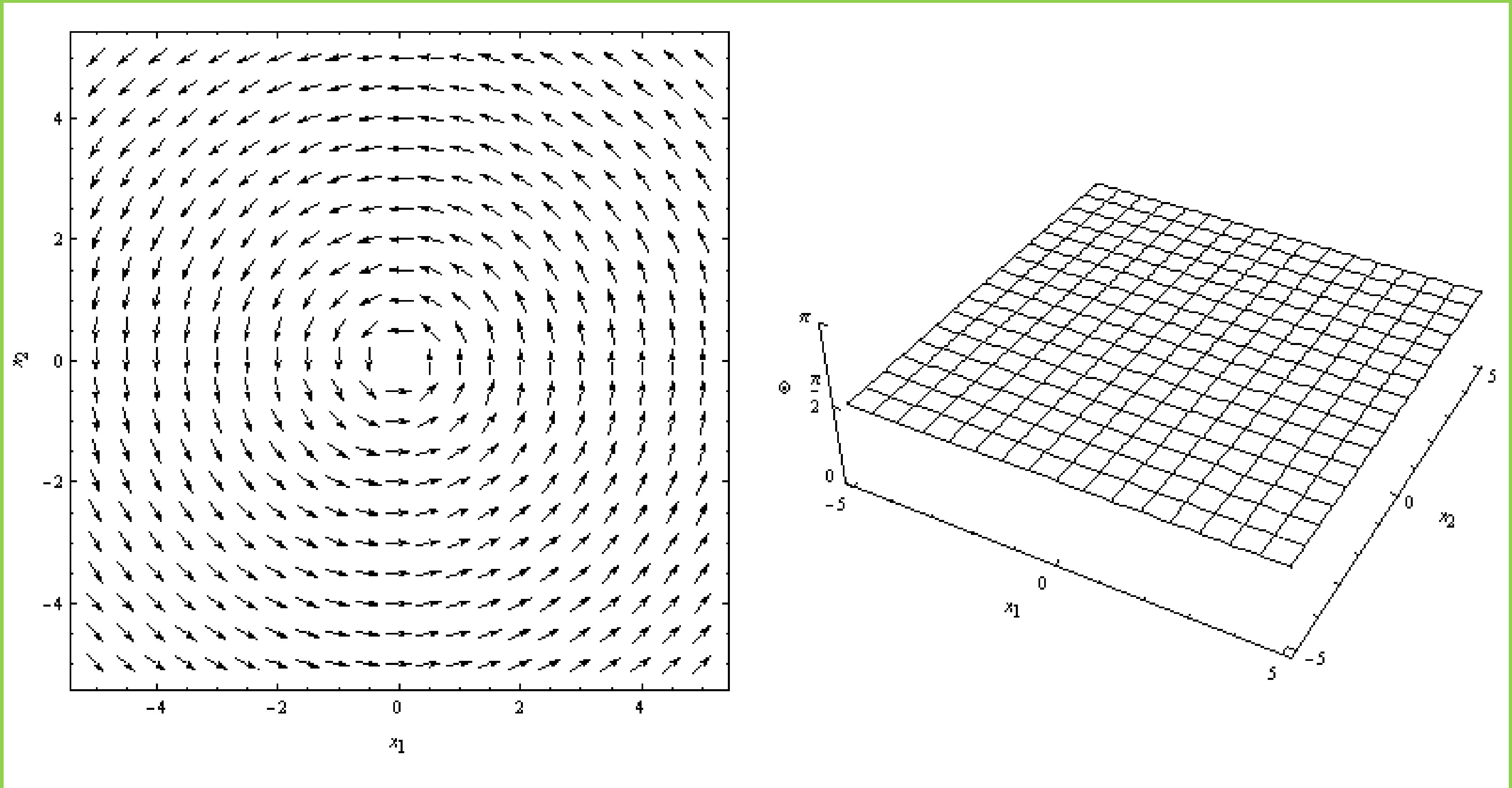
- Область интегрирования σ:

$$\sigma = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \frac{t}{\sin U}\right\}$$

- Значение:

$$q = -\frac{1}{2}$$

Зарождение топологического солитона в плоскости $x_3 = 0$



Вихревые нити

- Решение:

$$H = 0, \quad S = \ln \sin \Psi$$

- В явном виде:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = -\arctan \frac{x_2 y_3 \operatorname{sh}^{-1} U}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \operatorname{sh}^{-2} U y_3^2}}$$

$$a(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1^2 + y_3^2 \operatorname{sh}^{-2} U}{x_1^2 + x_2^2}, \; y_3 = t + \frac{x_3}{\operatorname{sh} U}$$

-- две пересекающиеся вихревые нити (вдоль Ox_3 и Ox_2)

Разрушение структуры типа «ежа»

Решение:

$$S = T(\Psi) = \mathrm{i}\,\Psi, \quad H = 0, \quad U(\Psi) = \mathrm{i}\,C \;\; (C \in R)$$

В цилиндрических координатах (r, φ, x_3):

$$\Psi(r, \varphi, x_3, t) = \arccos\left[\mathrm{i}\,\frac{t + x_3 \operatorname{ch} C}{r \operatorname{sh} C}\right]$$

- Явные формулы:

$$\Phi(r,\varphi,x_3,t)=\varphi-\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\Theta(r,\varphi,x_3,t)=-\frac{x_3+t/\mathrm{ch}\,C}{\sqrt{r^2\mathrm{sh}^2C+(x_3+t/\mathrm{ch}\,C)^2}}$$

- При $\mathrm{t}=0$ это «ёж» в масштабированных переменных
- В пределе $t\to\infty$:

$$\Theta(r,\varphi,x_3,t)\to\pi$$

-- «ежовая» структура исчезает

Выводы

- Динамика магнитных систем допускает существование нелинейных волн (типа ударных) с образованием(или разрушением) различных структур

- Спасибо за внимание и
- терпение