XXX Научная сессия
Совета РАН по нелинейной динамике

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
20-21 декабря 2021 г., Москва, Россия

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ В ТЕОРИИ СЧЁТНОМЕРНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассадин А. Э.

Высшая школа экономики, Нижний Новгород, Россия

Пространство Λ двусторонних последовательностей

Пусть $u = (\ldots, u_{-n}, \ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ — комплекснозначная двусторонняя последовательность, т.е. $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. И пусть Λ — пространство всех двусторонних комплекснозначных последовательностей.

Если $u \in \Lambda$ и $v \in \Lambda$, то можно определить их произведение $u \star v$ как двустороннюю последовательность с членами:

$$(u \star v)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k \, v_{n-k} \, . \tag{1}$$

Λ — коммутативная алгебра с единицей $e = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$:

$$u \star e = e \star u = u \qquad \forall u \in \Lambda \, . \tag{2}$$

Пусть элементы алгебры Λ являются функциями непрерывного времени t: $u(t)$, $v(t), \ldots \in \Lambda$, тогда на Λ можно задавать фазовые потоки с помощью счётномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых строятся с помощью операций сложения и умножения в алгебре Λ.

Аналог нормальной формы бифуркации Андронова-Хопфа

$$\begin{aligned} \dot u &= \mu\, u - v - u \star (u \star u + v \star v) \\ \dot v &= u + \mu\, v - v \star (u \star u + v \star v) \end{aligned}\,, \quad \mu > 0\,. \tag{3}$$

Покомпонентная запись системы уравнений (3) ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\dot u_n = \mu\, u_n - v_n - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u_l\, u_k\, u_{n-l-k} + u_l\, v_k\, v_{n-l-k})\,,$$

$$\dot v_n = u_n + \mu\, v_n - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (v_l\, u_k\, u_{n-l-k} + v_l\, v_k\, v_{n-l-k})\,.$$

$$A(t) = \frac{\sqrt{\mu}\, A_{in}}{\sqrt{A_{in}^2 + (\mu - A_{in}^2)\, \exp(-2\,\mu\, t)}}\,, \qquad A_{in} > 0\,.$$

$$\mathsf{K}(\kappa) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - \kappa^2 z^2)}}\,, \qquad \mathsf{K'}(\kappa) = \mathsf{K}(\sqrt{1 - \kappa^2})\,.$$

Точное решение системы (3)

$$u_{2m+1}(t) = u^*_{-2m-1}(t) = A(t)\,\frac{c_m\,\cos(\omega\,t) - i\,s_m\,\sin(\omega\,t)}{2}\,,$$

$$v_{2m+1}(t) = v^*_{-2m-1}(t) = A(t)\,\frac{c_m\,\sin(\omega\,t) + i\,s_m\,\cos(\omega\,t)}{2}\,,$$

$$c_m = \frac{\pi}{\kappa\,\mathbf{K}(\kappa)}\,\frac{1}{\cosh\left[(2\,m+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathbf{K}'(\kappa)}{\mathbf{K}(\kappa)}\right]}\,,$$

$$s_m = \frac{\pi}{\kappa\,\mathbf{K}(\kappa)}\,\frac{1}{\sinh\left[(2\,m+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathbf{K}'(\kappa)}{\mathbf{K}(\kappa)}\right]}\,, \qquad \kappa \in (0,\,1)\,.$$

$$u_{2m}(t) = u_{-2m}(t) = v_{2m}(t) = v_{-2m}(t) = 0\,, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Решение системы (3) методом производящих функций

Предположим, что $u_{-n}(t) = u_n^*(t)$, $v_{-n}(t) = v_n^*(t)$, и рассмотрим следующие функции ($c \in \mathbb{R}$):

$$U(\phi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t) \exp[-i\,n\,(\phi - c\,t)]\,, \tag{4'}$$

$$V(\phi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n(t) \exp[-i\,n\,(\phi - c\,t)]\,. \tag{4''}$$

Функции (4') и (4") удовлетворяют системе уравнений в частных производных, которая эквивалентна системе (3):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c\,\frac{\partial U}{\partial \phi} = \mu\,U - V - U\,(U^2 + V^2)\,, \tag{5'}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + c\,\frac{\partial V}{\partial \phi} = U + \mu\,V - V\,(U^2 + V^2)\,. \tag{5''}$$

Снабдим систему (5) начальными условиями:

$$U(\phi,0) = A_{in}\, cn\left[\frac{2\,\mathsf{K}(\kappa)\,\phi}{\pi},\kappa\right],\ V(\phi,0) = A_{in}\, sn\left[\frac{2\,\mathsf{K}(\kappa)\,\phi}{\pi},\kappa\right].$$

Такая задача Коши для системы (5) имеет точное решение:

$$U(\phi,t) = a(t)\, cn\left[\frac{2\,\mathsf{K}(\kappa)\,(\phi - c\,t)}{\pi},\kappa\right] - b(t)\, sn\left[\frac{2\,\mathsf{K}(\kappa)\,(\phi - c\,t)}{\pi},\kappa\right],$$

$$V(\phi,t) = a(t)\, sn\left[\frac{2\,\mathsf{K}(\kappa)\,(\phi - c\,t)}{\pi},\kappa\right] + b(t)\, cn\left[\frac{2\,\mathsf{K}(\kappa)\,(\phi - c\,t)}{\pi},\kappa\right],$$

где

$$a(t) = A(t)\,\cos t\,, \qquad b(t) = A(t)\,\sin t\,.$$

Аналог системы Хенона-Хейлеса и метод псевдосредних

$$\ddot{u} + u + 2\,u \star v = 0 \qquad \ddot{v} + v - v \star v + u \star u = 0\,. \tag{6}$$

Покомпонентная запись системы уравнений (6) ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\ddot{u}_n + u_n + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k\, v_{n-k} = 0\,,$$

$$\ddot{v}_n + v_n - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k\, v_{n-k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k\, u_{n-k} = 0\,.$$

Назовём псевдосредним элемента $w \in \Lambda$ следующую величину:

$$< w >= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n\,.$$

Пусть $x =< u >$, $y =< v >$, тогда $< u \star v >= x\,y$ и.т.д., значит, система (6) сведётся к системе Хенона-Хейлеса:

$$\ddot{x} + x + 2\,x\,y = 0\,, \qquad \ddot{y} + y - y^2 + x^2 = 0\,. \tag{7}$$

Устойчивость вблизи псевдосредних

$$u = x\,e + \xi\,, \qquad v = y\,e + \eta\,.$$

$$u = (\ldots, \xi_{-n}, \ldots, \xi_{-1}, x + \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)\,,$$

$$v = (\ldots, \eta_{-n}, \ldots, \eta_{-1}, y + \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)\,.$$

Система уравнений в вариациях ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\ddot{\xi}_n + [1 + 2\,y(t)]\,\xi_n + 2\,x(t)\,\eta_n = 0\,, \tag{8'}$$

$$\ddot{\eta}_n + 2\,x(t)\,\xi_n + [1 - 2\,y(t)]\,\eta_n = 0\,. \tag{8''}$$

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ система (8) совпадает с системой в вариациях для системы Хенона-Хейлеса (7).

Энергетические соотношения

Система (6) имеет счётное число интегралов движения:

$$h = \frac{\dot{u} \star \dot{u} + \dot{v} \star \dot{v} + u \star u + v \star v}{2} + u \star u \star v - \frac{v \star v \star v}{3}\,, \quad h \in \Lambda\,.$$

$< h >$ — это энергия системы Хенона-Хейлеса (7).
Введём для системы (3) следующие величины:

$$E = \frac{u \star u + v \star v}{2}\,, \qquad E \in \Lambda\,,$$

тогда

$$\dot{E} = 2\,\mu\,E - 4\,E \star E$$

и

$$\frac{d < E >}{dt} = 2\,\mu\, < E > -4\, < E >^2\ .$$

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!