Юбилейная XXX научная сессия Совета по нелинейной динамике

Корабельные волны на поверхности океана со сплошным ледяным покрытием

Сергей Бадулин[1,2], Владимир Гневышев[1],
Юрий Степанянц[3]

[1] Институт океанологии им.П.П. Широва РАН
[2] Сколковский институт науки и технологий
[3] University of Southern Queensland, Toowoomba, Australia.

Skoltech
Skolkovo Institute of Science and Technology

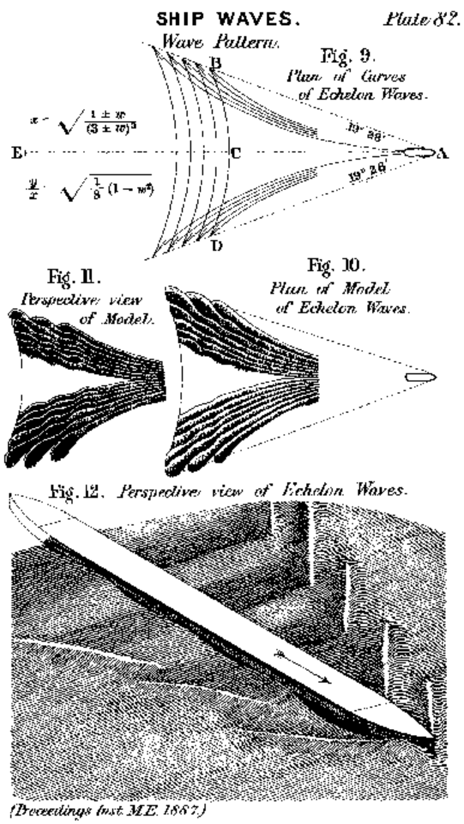
Подчеркнем

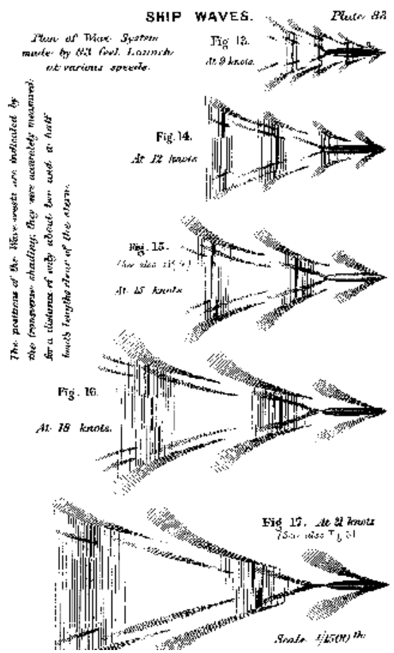
1. Растущий интерес к Арктике (и Антарктике), а, значит, к задачам, связанным со льдом
2. Изгибно-гравитационные волны, знакопеременная дисперсия – «практический» диапазон масштабов
3. Скоро Новый год

You are welcome to copy the presentation

badulin.si@ocean.ru

On ship waves
Sir William Thomson, Aug.1887



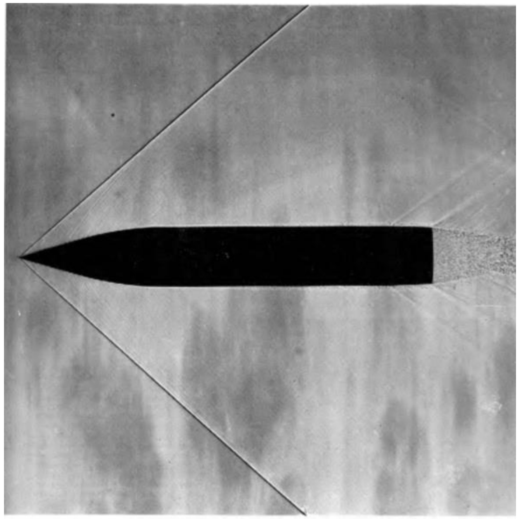


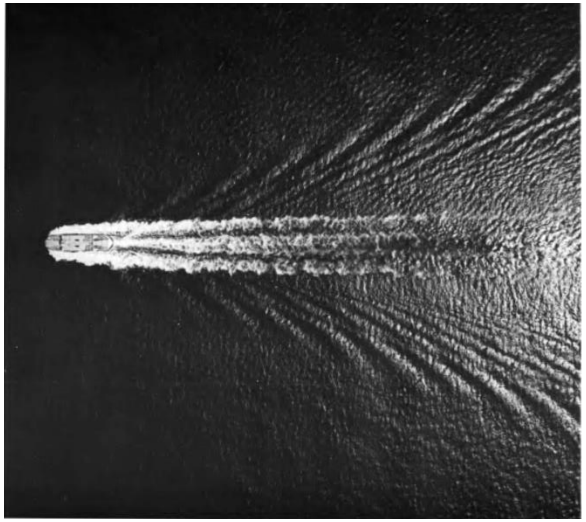
1. Системы расходящихся и поперечных волн;
2. Угол волнового конуса (угол Кельвина) не зависит от скорости
3. Картина формируется очень быстро (`about two and a half of wavelengths’ in words of Kelvin)

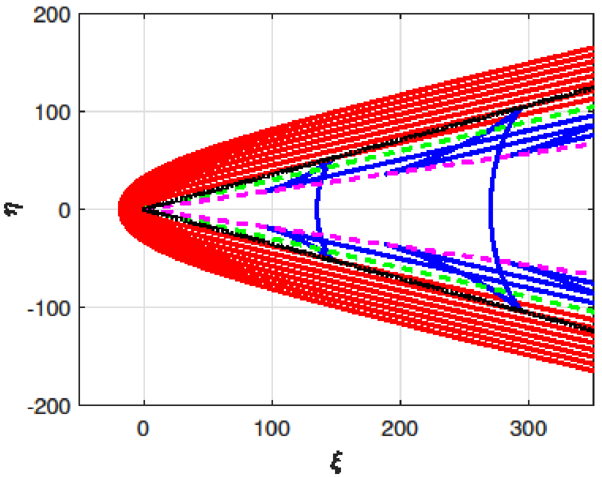
Остается проблема сглаживания сингулярностей ("to blur, to smooth it down" Kelvin, Havelock, Lighthill, Lamb, Sretensky et al) в существенно двумерной задаче. Метод стац.фазы следует применять с большой осторожностью

Wave wakes in dispersive media ab ovo

Van Dyke, 1982







Нет дисперсии $C_p = C_g$

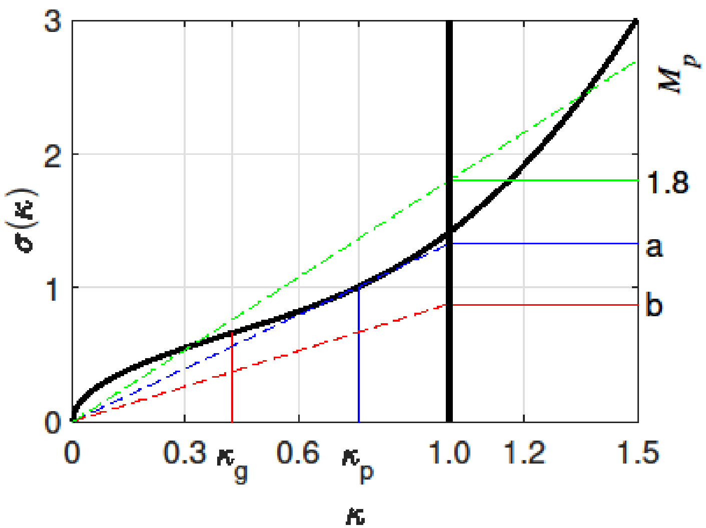
$$\int_{-\infty}^{\infty} {}^{1}\!/_{\sin kx}\, dk \to \delta(x)$$

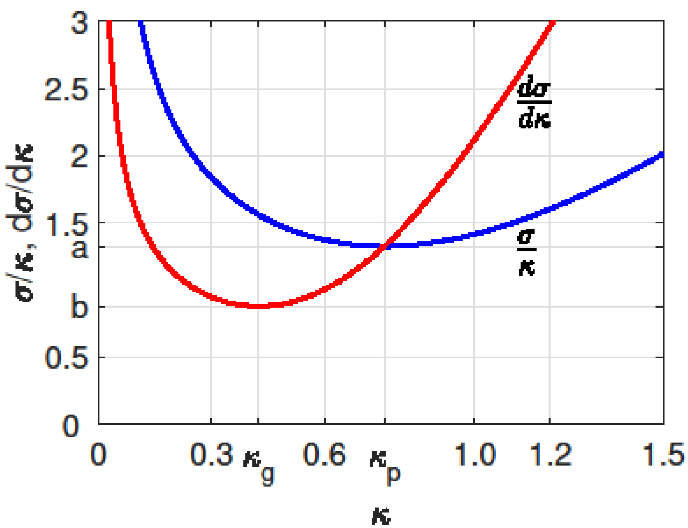
Отрицательная дисперсия, степенной закон

$$C_p/C_g = const > 1$$

Знакопеременная дисперсия. Многое можно получить аналитически

Дисперсия изгибно-гравитационных волн





В дисперсионном соотношении нет параметров, остается только внешний параметр - скорость

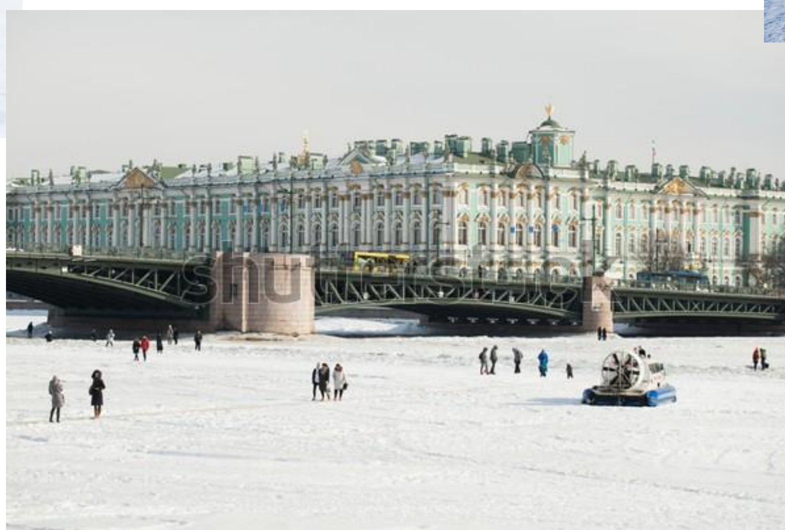
Q. Можно ли и как разделить изгибные и гравитационные волны?

A. Полезно помнить и о фазовом M_p, и о групповом M_g числах Маха

О масштабах

Небольшие Махи представляют практический интерес

Северная Двина
Лед около 10 cm,
Фазовая скорость около 2 m/s (7.2 km/h)



Нева у Дворцового моста, 08 марта 2018
h=40 cm, C_p=6.7m/s,
Аэросани до 50 km/h (13 m/s)

Арктический лед.
h=3 m, C_p=25 m/s,
посадочная скорость ~50 m/s

Метод эталонных решений
(see also Kelvin, 1906; Havelock, 1908; Gnevyshev & Badulin, 2017;)

Решение линейной проблемы в общем виде

$$F = \int H(\boldsymbol{k}) \exp\big(\mathrm{i}(\omega(\boldsymbol{k})t + \boldsymbol{k}\boldsymbol{x})\big) d\boldsymbol{k}$$

Начальный импульс специальной формы (e.g. Kelvin, Havelock)

Удобно взять гауссов импульс (Федорюк, 1987).

$$\int_{R^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle \mathbf{B}x, x\rangle - \mathrm{i}\langle x, \xi\rangle\right] dx = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{B})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle \mathbf{B}^{-1}\xi, \xi\rangle\right]$$

Фурье Гаусса $\Leftrightarrow$ Гауссов импульс

Аппроксимируем аргумент экспоненты параболической поверхностью (пакет узкий) и смотрим распространение несущей гармоники (как в стац.фазе, но для несущей гармоники)

Точечный пакет конечной ширины эллиптической формы

Кинематика
Лучевые уравнения (для несущей гармоники)

$\sigma = \kappa_x M_p + \sqrt{\kappa + \kappa^5} = 0 \quad (*)$ - условие стационарности

Ищем условный экстремум (eq.*) фазы $\varphi = \boldsymbol{kx}$, время τ – лагранжев множитель

Лучи $\xi = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa_x}\tau; \qquad \eta = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa_y}\tau$

На каждом луче волновое число постоянно. Для минимума фазовой скорости – угол Маха (фазовый)

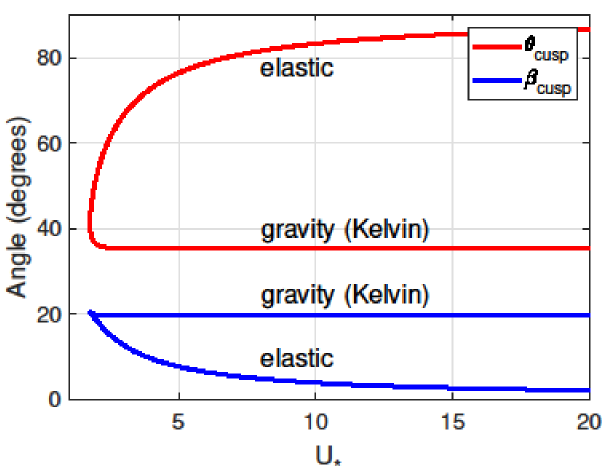
$$\left({}^{\xi}/_{\eta}\right)_{\kappa_p} = \pm\sqrt{{M_p}^2 - 1}$$

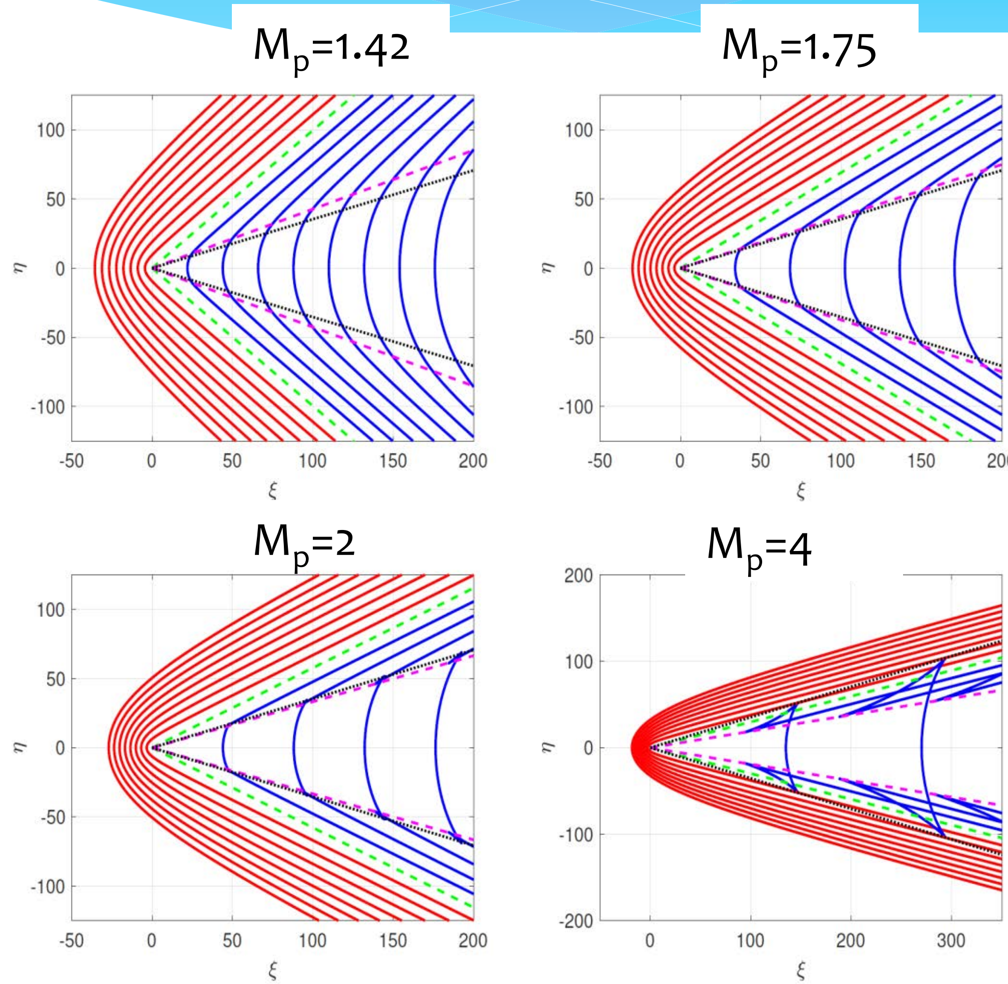
Что можно сказать о групповом M_g?

Изофазы в до- и надкритических режимах

Зеленый – фазовый Мах
Мажента – групповой Мах
и «внутренние каустики»
Черные точки – внешние
каустики – угол Кельвина

Каустики (β_c) и фронты (Θ_c)





Каустики

Два луча приходят в одну и ту же точку

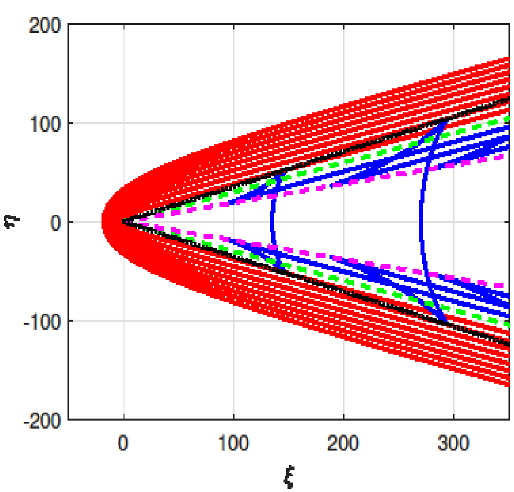
$$\xi_\kappa = \eta_\kappa = 0$$

Простая зависимость скорости от волнового числа на каустиках

$$M_p^2 = \frac{1}{2a^2}\frac{-15\kappa_c^{12} + 111\kappa_c^8 + 59\kappa_c^4 - 3}{15\kappa_c^9 + 30\kappa_c^5 - \kappa_c}$$

$M_p^{cusp} = 1.7527$ – critical point

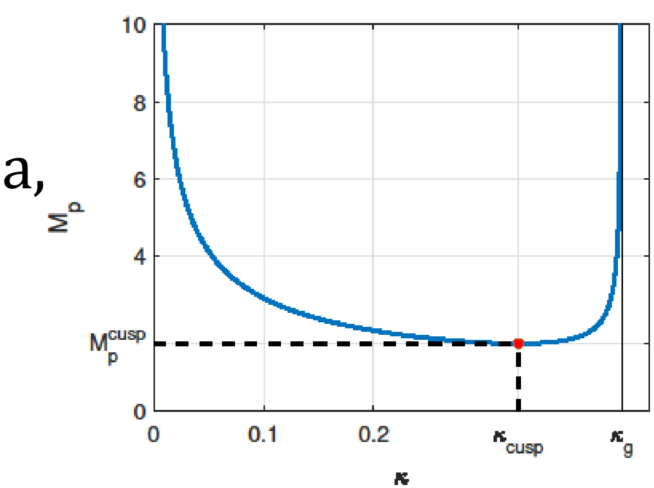
κ_{cusp}=0.33167



$\boldsymbol{M_p \to \infty}$

$\boldsymbol{\kappa_c \to 0}$, - грав. ветка.

$\boldsymbol{\kappa \to \kappa_g}$ - угол Кельвина, групповой Мах как предел



Динамика
Общие соотношения

$$F(\xi,\eta,\tau) = H(\xi,\eta,\tau)\cos\left(\varphi+\varphi_1\right)$$

Эталонное решение

$$H = \frac{1}{\sqrt{D}}\exp\left\{-\frac{\Lambda(\xi,\eta,\tau)}{2D^2}\right\}$$ - Гауссов импульс

$$D^2(\tau) = 1 + \tau^2\left(2\mu_{xy}^2 + \mu_x^2 + \mu_y^2\right) + \tau^4\left(\mu_{xy}^2 - \mu_x\mu_y\right)^2$$ - объем

$$\varphi_0 = kx + ly$$ - фаза

За дисперсию отвечают все вторые производные

$$\mu_x = (\Delta_x)^2\frac{d^2\sigma}{d\kappa_x^2}, \quad \mu_y = (\Delta_y)^2\frac{d^2\sigma}{d\kappa_y^2}, \quad \mu_{xy} = \Delta_x\Delta_y\frac{d^2\sigma}{d\kappa_x d\kappa_y}$$

Аргумент экспоненты – положительно определенная квадратичная форма

$$\Lambda(\xi,\eta,\tau) = \eta^2\left[1+\tau^2\left(\mu_{\eta\xi}^2+\mu_\eta^2\right)\right] + \xi^2\left[1+\tau^2\left(\mu_{\xi\eta}^2+\mu_\xi^2\right)\right] - 2\xi\eta\tau^2\mu_{\xi\eta}(\mu_\xi+\mu_\eta)$$

Динамика и углы Маха

$D^2 = (1 - A)^2 + B^2$ - объем волнового пакета

$A \sim \tau^2$ - общий случай, цилиндрическая расходимость + дисперсия $Amplitude \sim r^{-1}$

$B \sim \tau$ - затухание более медленное $Amplitude \sim r^{-1/2}$

$$A = \tau^2 E^2 (\kappa^4 - \kappa_g{}^4);$$

На групповом Махе κ_g, дисперсия исчезает

($E = \Delta_x \Delta_y$ - Спектральная ширина 2-мерного пакета)

На фазовом Махе фаза $\varphi_0 = kx + ly = const$

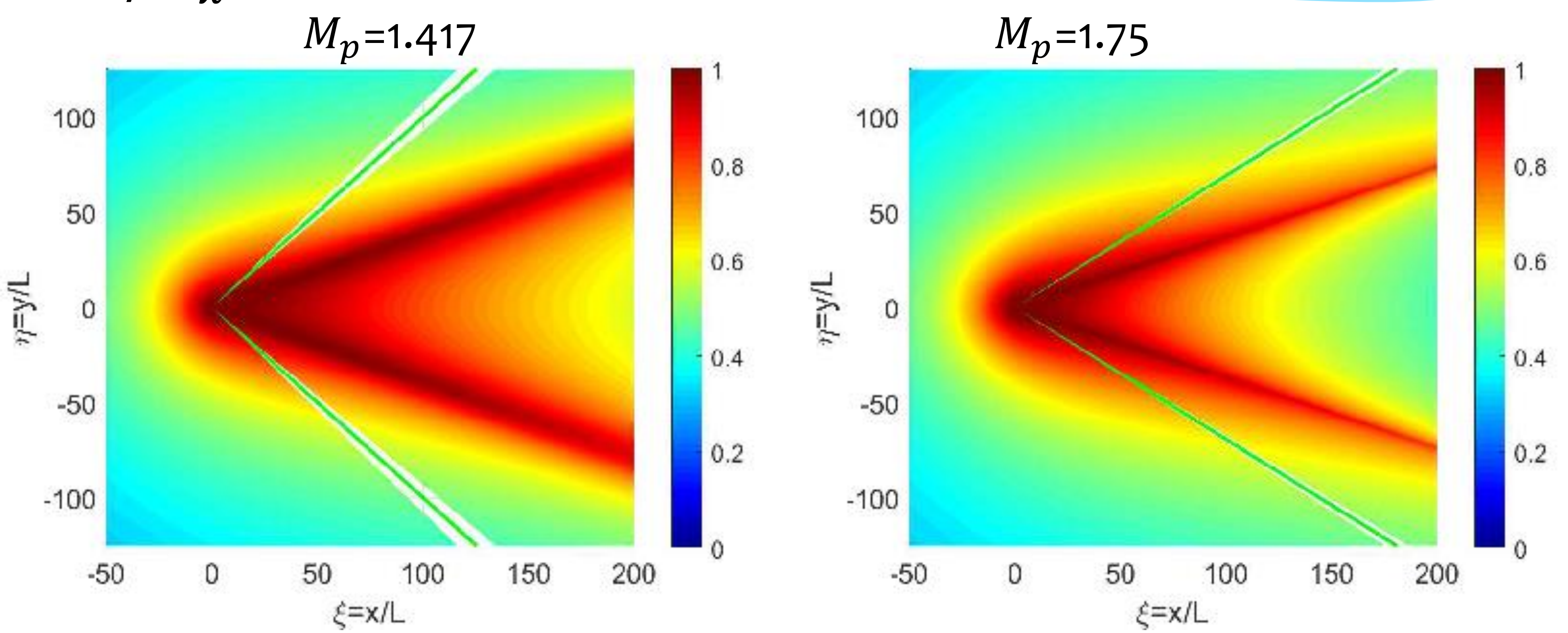
$F \sim \frac{1}{\sqrt{D}} cos(\varphi_0 + \varphi_1)$

Остается зависящая от координат «стац.фазовская» φ_1

Решение зависит от формы источника (эксцентриситет)

Амплитуда
α=1/3

$\alpha = {}^{\Delta_y}\!/_{\Delta_x}$ – length – to – beam ratio

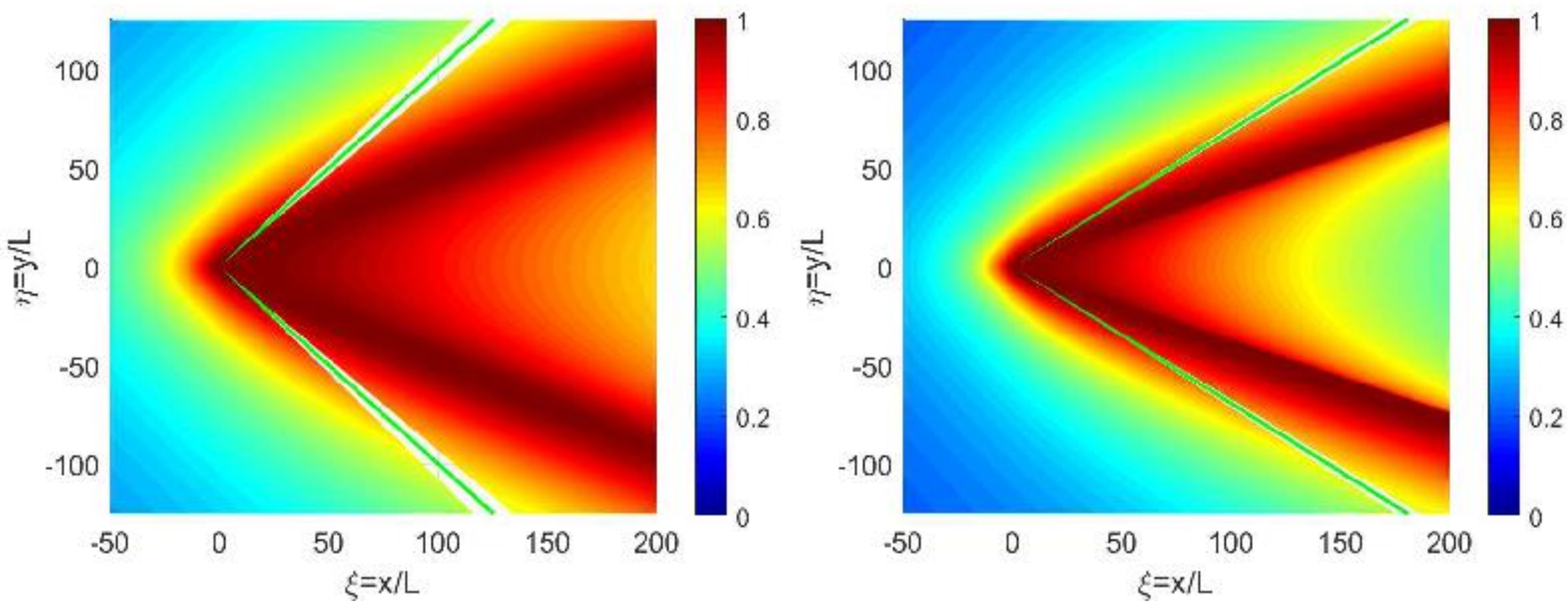


Bulldozing? Эталонные решения начинают работать раньше, чем стац.фаза?

Амплитуда
α=1

$\alpha = {}^{\Delta_y}/_{\Delta_x}$ – length – to – beam ratio

M_p=1.417 M_p=1.75

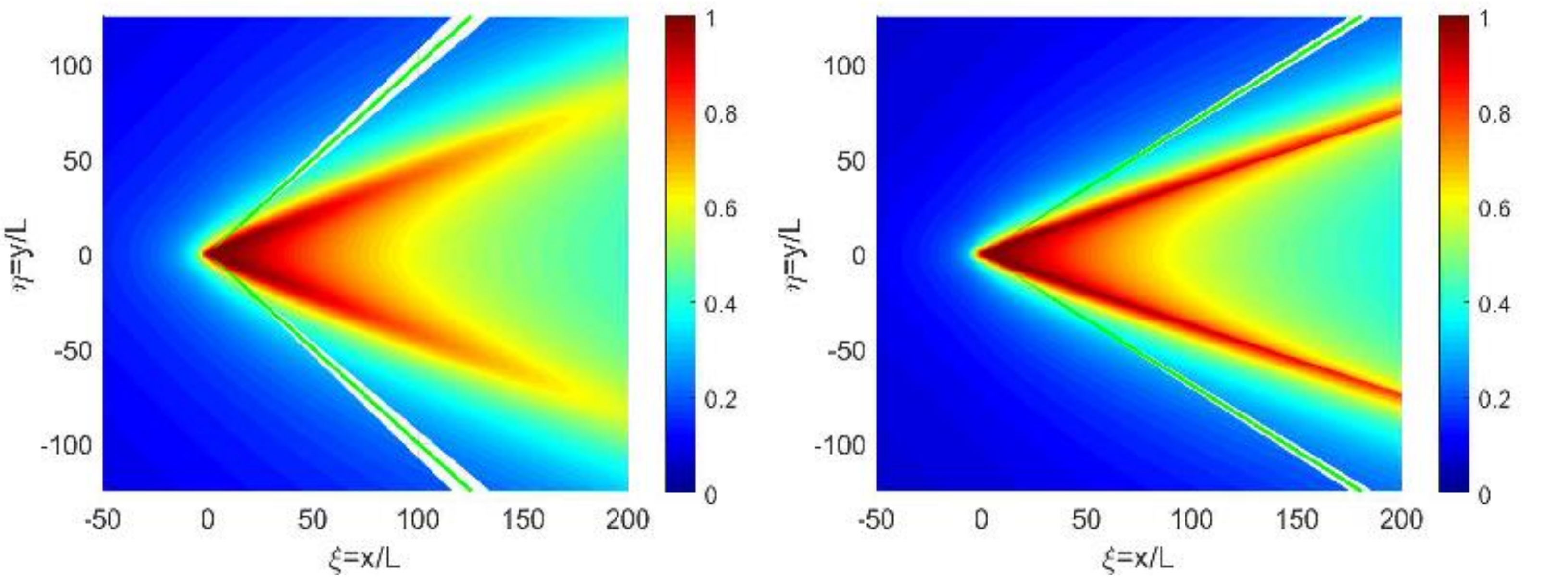


Circular source is still wide

Амплитуда
α=3

$\alpha = {\Delta_y}/{\Delta_x}$ − length − to − beam ratio

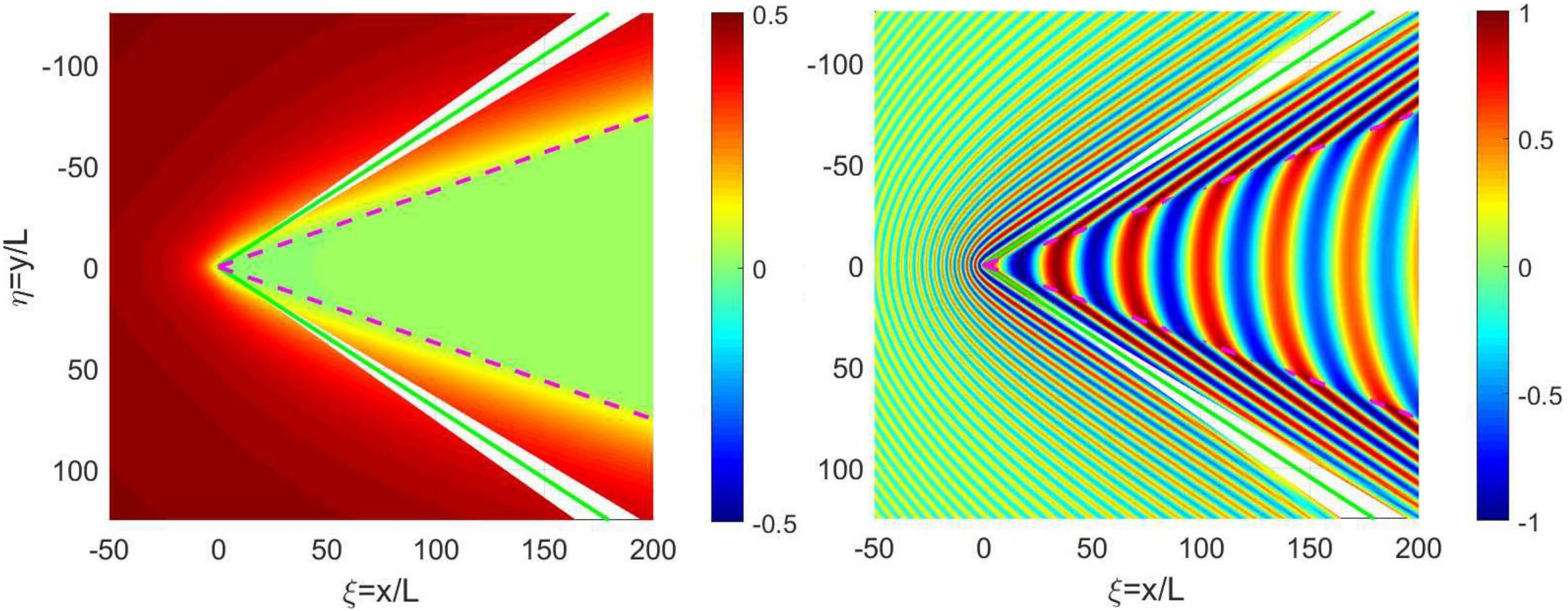
M_n=1.417 M_n=1.75



Elongated source. On the way to the group Mach cone

Фаза φ_1 (стац.фаза) и волновая поверхность

Фаза изменяется непрерывно на границе разных волновых систем (см. метод стац.фазы)



Круглый источник (α=1), M_p=1.75 - появление каустик

Summary

1. Исследована кинематика стационарного волнового следа;
2. С помощью метода эталонных решений получены выражения для амплитуд;
3. Рассмотрены эффекты аномально медленного убывания амплитуды (квази-дисперсии)
4. Продемонстрированы особенности волнового следа для источников разной формы
5. Показано соответствие (качественное) результатам, полученным с помощью метода стационарной фазы

Thank you

Bibliography

Bukatov, A. E. 2017 Waves in Sea with Floating Ice Cover. Sebastopol, Marine Hydrophys. Inst. (in Russian).

Clauss, G. F. & Bergmann, J. 1986 Gaussian wave packets: a new approach to seakeeping tests of ocean structures. Appl. Ocean Res. 8 (4), 190-206.

Davys, J. W., Hosking, R. J. & Sneyd, A. D. 1985 Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. J. Fluid Mech. 158, 269-287.

Gnevyshev, V. G. & Badulin, S. I. 2017 On the asymptotics of multidimensional linear wave packets: Reference solutions. Moscow University Physics Bulletin 72 (4), 415-423.

Gnevyshev, V. G. & Badulin, S. I. 2020b On reference solutions for ship waves. AIP Advances 10, 025014.

Gnevyshev, V. & Badulin, S. 2020a Wave patterns of gravity-capillary waves from moving localized sources. Fluids 5 (4).

Kashiwagi, M. 2004 Transient responses of a VLFS during landing and take-off an airplane. J. Mar. Sci. Technol. 9, 14-23.

Kelvin, Lord 1906 Deep sea ship waves. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 25 (2), 1060-1084.

Lamb, H. 1978 Hydrodynamics. 6th edn. Cambridge University Press.

Liang, H. & Chen, X. 2018 Asymptotic analysis of capillary-gravity waves generated by a moving disturbance. Eur. J. Mech. B/Fluids 72, 624-630.

Lighthill, M. J. 1965 Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems. J. Inst. Maths. Appl. (1), 269-306.

Lighthill, J. 1978 Waves in fluids. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 504 p.

Moissy, F. & Rabaud, M. 2014 Mach-like capillary-gravity wakes. Phys. Rev. E 90, 023009.

Noblesse, F. & He, J. & Zhu, Y. & Hong, L. Zhang, C. Zhu, R. Yang, C. 2014 Why can ship wakes appear narrower than Kelvin's angle? Eur. J. Mech. B/Fluids 90, 023009.

Nugroho, W.S. & Wang, K. & Hosking, R.J. & Milinazzo, F. 1999 Time-dependent response of a floating flexible plate to an impulsively started steadily moving load. J.Fluid Mech. 381 337-355.

Pogorelova, A. V. & Kozin, V. M., & Matyushina, A. A. 2015 Stress-strain state of ice cover during aircraft takeoff and landing. J. Appl. Mech. Techn. Phys. 56 (5) 920-926.

Rabaud, M. & Moisy, F. 2013 Ship wakes: Kelvin or Mach angle? PRL 110, 214503.

Rayleigh, Lord. 1883 The form of standing waves on the surface of running water. Proc.Lond. Math.Soc. XV, 69-78.

Rousseaux, G. & Kellay, H. 2020 Classical hydrodynamics for analogue spacetimes: Open channel flows and thin films. Phil. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 378, 20190233.

Squire, V. A., Hosking, R. J., Kerr, A. D. & Langhorne, P. J., 1996 Moving Loads on Ice Plates, Kluwer. Academ. Publ., Dordrecht.

Sretensky, L. N., 1977 The theory of wave motion of fluid, 2-nd eq., Nauka, Moscow (in Russian).

Stepanyants, Y. A. & Sturova, I. V. 2021 Hydrodynamic forces exerting on an oscillating cylinder under translational motion in water covered by compressed ice Water 13 (6), 822.

Stokes, G.G. 1905 Mathematical and Physical Papers, , vol. 5, Chap. Problem 11 of the Smith's Prize examination papers (Feb. 2, 1876), p. 362. Cambridge University Press, reprinted by Johnson Reprint Co., New York, 1966.

Sturova, I. V. 2013 Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications J. Fluid Mech. 730 392-418.

Sturova, I. V. 2021 Motion of a load over an ice sheet with non-uniform compression Fluid Dynamics 56 (6), 503.

Svirkunov, P. N. & Kalashnik, M. V. 2014 Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources. Physics-Uspekhi 57 (1).

Thomson, W. 1886 XLII. On stationary waves in flowing water. Part I. Philosoph. Magazine Series 5 22:137, 353-357

Thomson, W. 1887 On ship waves. Proc. Inst. Mech. Engrs 38, 409-434.

Voronovich, A. G. 1976 Propagation of internal and surface gravity waves in the approximation of geometrical optics. Izv. Acad. Sc. USSR. Atm. Ocean. Phys. 12, 850-857.

Weeks, W. F & Anderson, D. L. 1958 An Experimental Study of Strength of Young Sea Ice. Transactions, American Geophysical Union 39 (4), 641-647.

Whitham, G. B. 1974 Linear and Nonlinear Waves. Wiley, New York, 636 p.