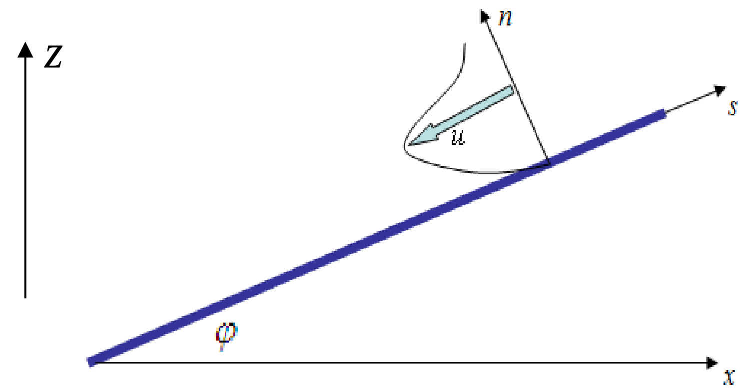
ПАРАДОКСЫ СКЛОНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Л.Х. Ингель

НПО «Тайфун», г. Обнинск. ***E-mail: lev.ingel@gmail.com***

$$u = \theta_0 \sqrt{\frac{\kappa}{\nu}\frac{\alpha g}{\gamma}} \exp(-\xi)\sin\xi, \qquad \theta = \theta_0 \exp(-\xi)\cos\xi,$$

$$\xi = \frac{z}{h}, \qquad h = \left(\frac{4\kappa\nu}{\alpha g \gamma \sin^2\varphi}\right)^{1/4} = \left(\frac{2\sqrt{\kappa\nu}}{N\sin\varphi}\right)^{1/2},$$



$$u_{\max} \approx 0.3\,|\theta_0| \sqrt{\frac{\kappa}{\nu}\frac{\alpha g}{\gamma}} = 0.3|\theta_0|\sqrt{\frac{\kappa}{\nu}\frac{\alpha g}{N}}.$$

$$T = \Theta_* + \gamma z + \theta$$

Устойчивая фоновая стратификация, $\gamma > 0.$

$N = \sqrt{\alpha g \gamma}$ - частота плавучести

$$M \sim u_{\max} h \sim |\theta_0| \kappa \sqrt[4]{\frac{4\alpha g}{\gamma^3 \sin^2\varphi}}$$

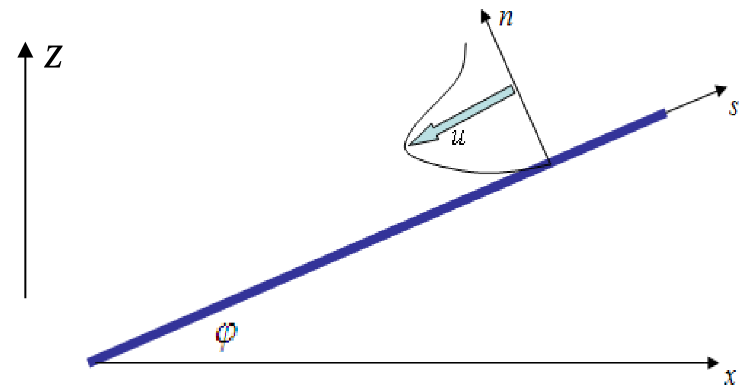
Модель Прандтля:

$$0 = \nu \frac{d^2 u}{dz^2} + \alpha g \theta \sin\varphi, \qquad \gamma u \sin\varphi = \kappa \frac{d^2\theta}{dz^2}.$$

«Проблема малых углов» в модели Прандтля

$$u = \theta_0 \sqrt{\frac{\kappa}{\nu}\frac{\alpha g}{\gamma}} \exp(-\xi)\sin\xi, \qquad \theta = \theta_0 \exp(-\xi)\cos\xi,$$

$$\xi = \frac{z}{h}, \qquad h = \left(\frac{4\kappa\nu}{\alpha g\gamma\sin^2\varphi}\right)^{1/4} = \left(\frac{2\sqrt{\kappa\nu}}{N\sin\varphi}\right)^{1/2},$$



$$u_{\max} \approx 0.3\,|\theta_0| \sqrt{\frac{\kappa}{\nu}\frac{\alpha g}{\gamma}} = 0.3|\theta_0|\sqrt{\frac{\kappa}{\nu}\frac{\alpha g}{N}}.$$

$$T = \Theta_* + \gamma z + \theta$$

Устойчивая фоновая стратификация, $\gamma > 0$.

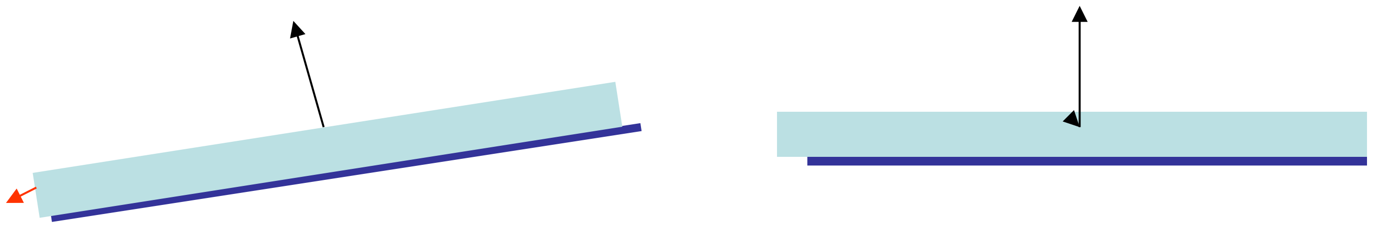
$N = \sqrt{\alpha g \gamma}$ - частота плавучести

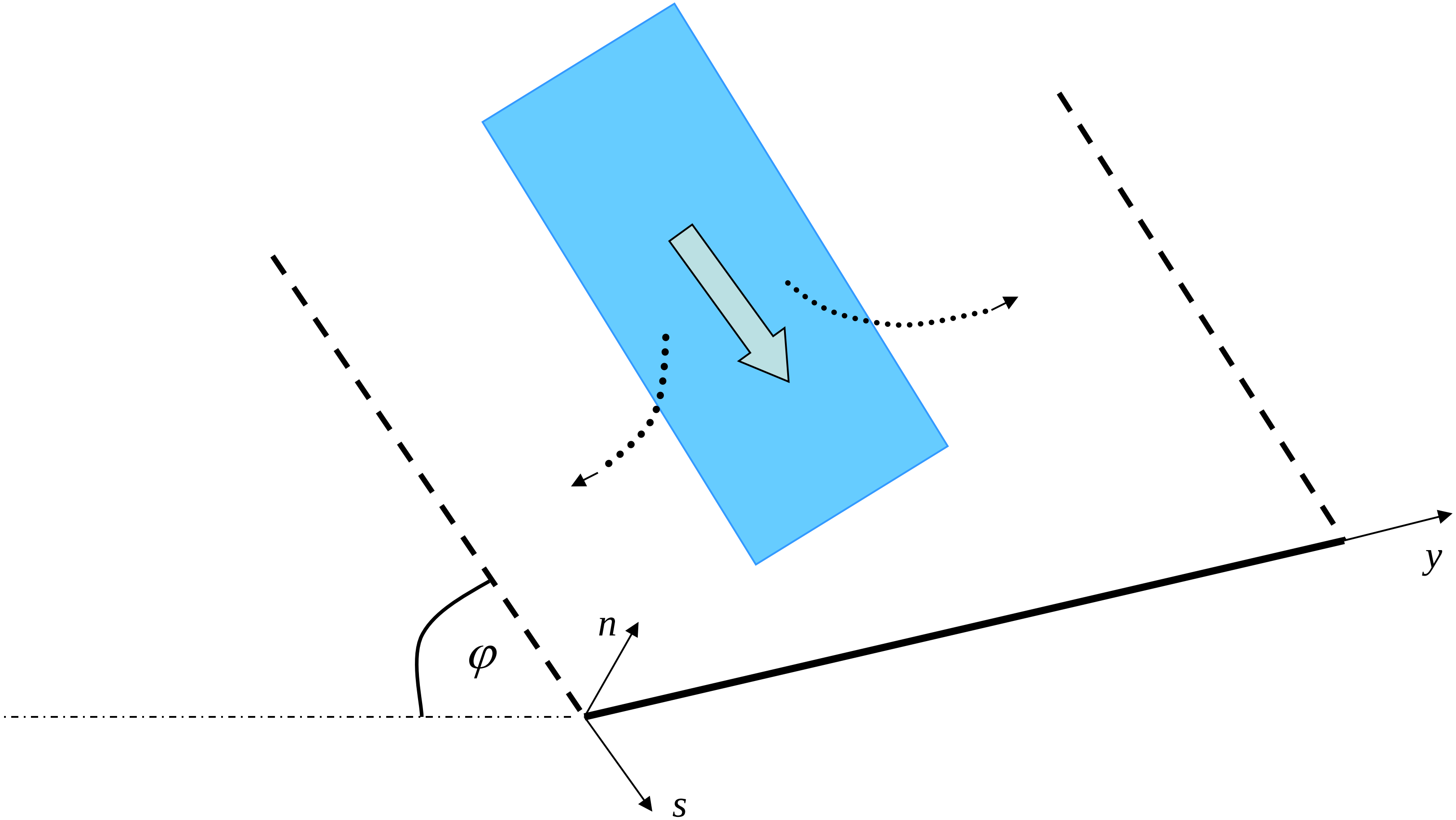
$$M \sim u_{\max} h \sim |\theta_0| \kappa \sqrt[4]{\frac{4\alpha g}{\gamma^3 \sin^2\varphi}}$$

Модель Прандтля:

$$0 = \nu \frac{d^2 u}{dz^2} + \alpha g \theta \sin\varphi, \qquad \gamma u \sin\varphi = \kappa \frac{d^2\theta}{dz^2}.$$

Отсутствие предельного перехода $\varphi \to 0$



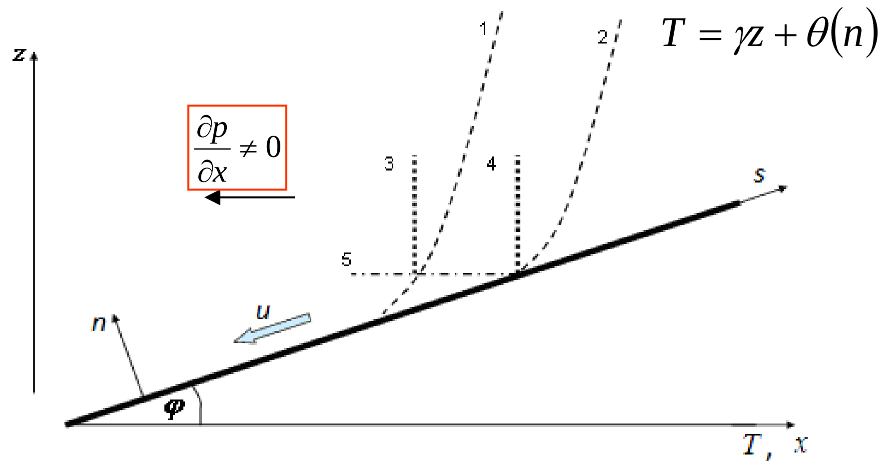


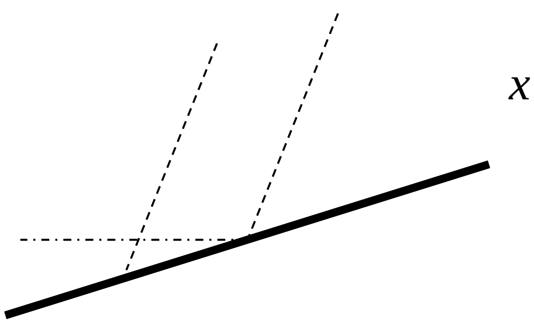
1. **Рассмотрение решений на ограниченных временн*ых* или пространственных масштабах снимает все «парадоксы».**

2. **Решение с охлаждаемой бесконечной горизонтальной нижней границей неустойчиво по отношению к сколь угодно малому отклонению этой границы от горизонтали.**

Распространенное обобщение модели Прандтля на случай пространственно-неоднородных коэффициентов обмена

$$0 = \frac{d}{dn}\left(\nu \frac{du}{dn}\right) + \alpha g \theta \sin\varphi, \qquad \gamma u \sin\varphi = \frac{d}{dn}\left(\kappa \frac{d\theta}{dn}\right).$$





Модель склоновых течений Прандтля:

$$0 = \nu \frac{d^2 u}{dn^2} + \alpha g \theta \sin\varphi, \qquad \gamma u \sin\varphi = \kappa \frac{d^2\theta}{dn^2}.$$

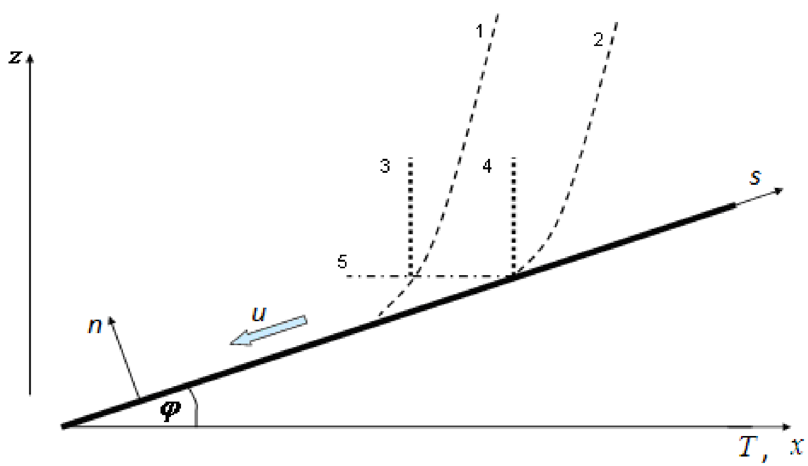
В чем ошибка?

$$\boxed{0=\frac{d}{dn}\left(\nu\frac{du}{dn}\right)+\alpha g\theta\sin\varphi, \qquad \gamma u\sin\varphi=\frac{d}{dn}\left(\kappa\frac{d\theta}{dn}\right).}$$

$$\theta(n)\to\gamma z+\theta(n)$$

После исправления в уравнении появляется эффективный источник тепла:

$$-\gamma u\sin\varphi+\kappa(n)\frac{d^2\theta}{dn^2}+\frac{d\kappa(n)}{dn}\frac{d\theta}{dn}=-\gamma\frac{d\kappa(n)}{dn}\cos\varphi$$



Полное тепловыделение в слое $n_1<n<n_2$:

$$\boxed{c_p\bar{\rho}\gamma\left[\kappa(n_2)-\kappa(n_1)\right]\cos\varphi} \qquad (3)$$

где c_p, $\bar{\rho}$ – теплоемкость и средняя плотность среды соответственно. Примем характерные для приземного слоя атмосферы значения $c_p=10^3$ Дж/(кгК), $\bar{\rho}=1$ кг/м^3, $\gamma=3\cdot10^{-3}$ К/м, $K(n_2)-K(n_1)=5$ м^2/с, $\cos\varphi\approx1$. В этом случае выражение (3) дает заметный эффективный источник тепла 15 Вт/м^2.

Пример численного решения

Приведем конкретный пример численного решения для профиля коэффициента турбулентного обмена, рассмотренного в [3] (стр. 268, 269) («соотношения Дородницына»):

$$K(n) = K_0 + (K_1 - K_0)\left(1 - e^{-n/h}\right).$$

Примем значения параметров, близкие к численному примеру, рассмотренному в [3]: $\varphi = 3 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 10^{-2}$ К/м, $K_1 = 5$ м^2/с, $K_0 = 10^{-2}$ м^2/с, $\alpha = 3.4 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, $h = 50$ м. На наклонной поверхности заданы однородные краевые условия $\theta = 0$, $u = 0$. На рис. 2

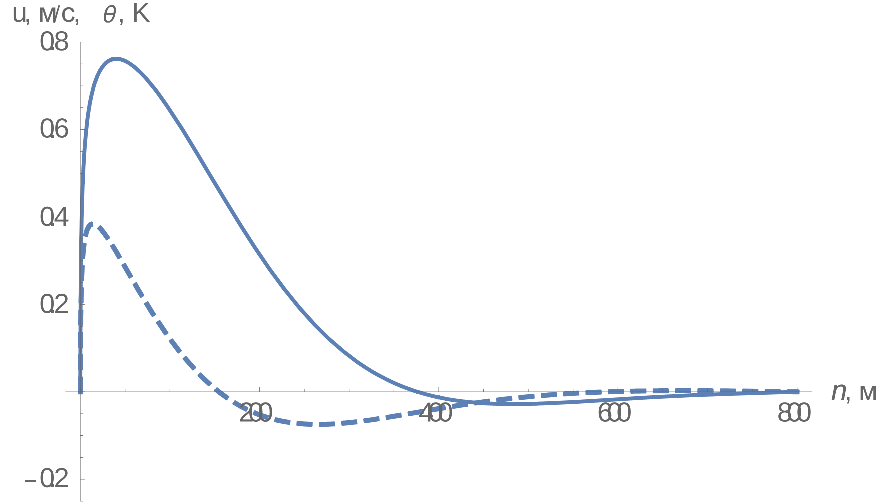


Рис. 2. *Профили отклонений потенциальной температуры (штриховая линия) и скорости вдоль склона (сплошная линия) для рассмотренного численного примера*

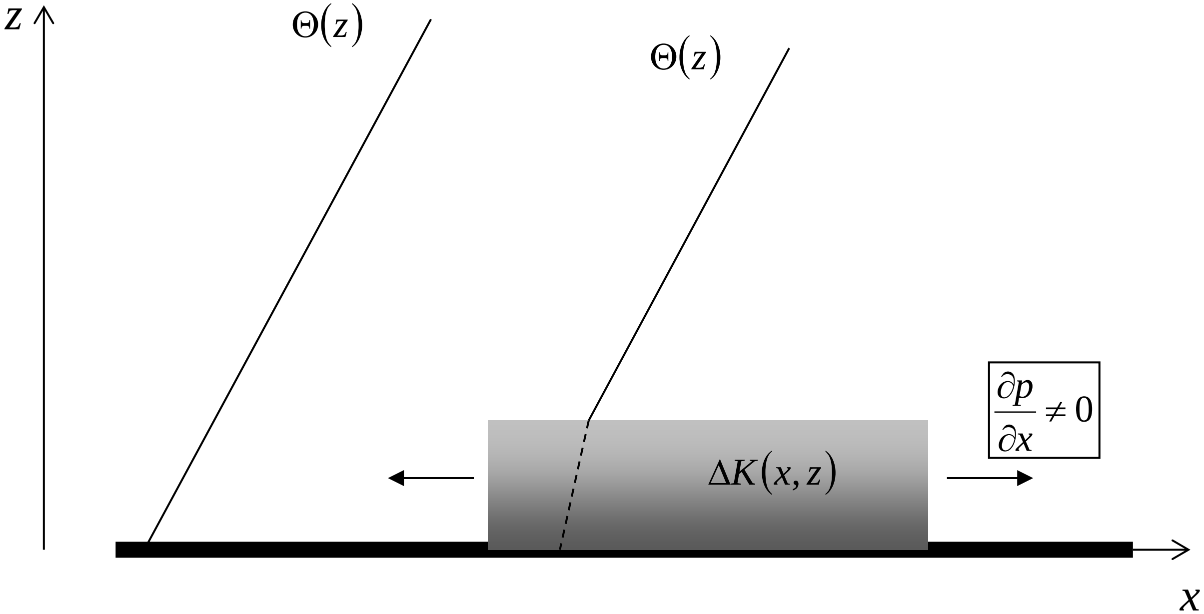
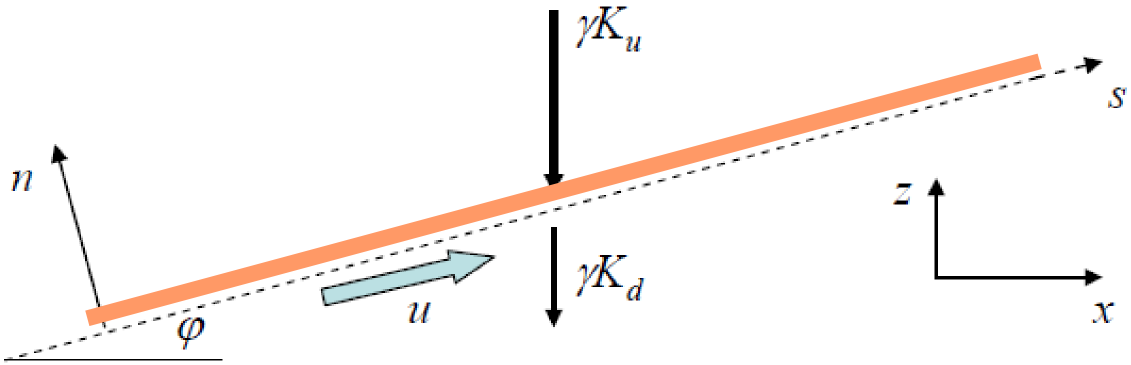


Схема возникновения течений при горизонтальной неоднородности коэффициента теплопроводности. Горизонтальные стрелки – возможные направления сил градиента давления, возникающих вследствие появления термических неоднородностей.

$$\nu = \kappa = K(n)$$



$$U = \left(\frac{N}{2\sin\varphi}\right)^{1/2}\left(K_u^{1/2} - K_d^{1/2}\right)\cos\varphi$$

$$u = U\left(\pm\sin\frac{n}{h_{u,d}} + \cos\frac{n}{h_{u,d}}\right)\exp\left(\mp\frac{n}{h_{u,d}}\right),$$

$$\theta = \frac{NU}{\alpha g}\left(\mp\sin\frac{n}{h_{u,d}} + \cos\frac{n}{h_{u,d}}\right)\exp\left(\mp\frac{n}{h_{u,d}}\right),$$

$$h_{u,d} = \left(\frac{2K_{u,d}}{N\sin\varphi}\right)^{1/2}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Горизонтальная неоднородность коэффициентов переноса приводит к отсутствию статических состояний в стратифицированной среде – течения возникают при любых краевых условиях. Приведен пример точного решения.
2. В турбулентной стратифицированной среде у наклонной поверхности должно возникать упорядоченное течение при любых краевых условиях.
3. В литературе по склоновым течениям содержится распространенная качественная ошибка при попытках обобщения модели Прандтля.