Резонасное взаимодействие солитонов в системе Манакова

Расковалов А.А., Гелаш А.А.

Сколтех, 2021 г.

Система Манакова

Фокусирующая система Манакова на фоне конденсата представляет собой двухкомпонентное векторное нелинейное уравнение Шредингера вида:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t\psi_1 + \frac{\partial_x^2\psi_1}{2} + \left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - A^2\right)\psi_1 = 0\,, \\ &\mathrm{i}\partial_t\psi_2 + \frac{\partial_x^2\psi_2}{2} + \left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - A^2\right)\psi_2 = 0\,, \end{aligned}} \qquad (1)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2\,.$$

с г. у.:

$$\left|\psi_{1,2}\right|^2 \to \left|A_{1,2}\right|^2 \text{ при } x \to \pm\infty\,.$$

На однородном фоне $\left|\psi_{1,2}\right|^2 \to 0$ при $x \to \pm\infty$ система была изучена С.В. Манаковым в 1974 г. в работе

“On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves”, S.V. Manakov, JETP, v. 38, №2, 1974 г., pp. 248-253.

В нелинейной оптике компоненты $\psi_{1,2}$ описывают различные поляризации света.

U-V-пара

Система Манакова может быть проинтегрирована методом обратной задачи. Соответствующая U-V-пара имеет вид:

$$\boxed{\begin{gathered}\partial_x \Phi = U\Phi\,,\\ \partial_t \Phi = V\Phi = (\lambda U + \mathrm{i}\, W)\Phi\end{gathered}} \qquad (2)$$

где:

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\,\lambda & \psi_1 & \psi_2 \\ -\psi_1^* & \mathrm{i}\,\lambda & 0 \\ -\psi_2^* & 0 & \mathrm{i}\,\lambda \end{pmatrix}, \qquad W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - A^2 & \partial_x\psi_1 & \partial_x\psi_2 \\ \partial_x\psi_1^* & A^2 - |\psi_1|^2 & -\psi_1^*\psi_2 \\ \partial_x\psi_2^* & -\psi_2^*\psi_1 & A^2 - |\psi_2|^2 \end{pmatrix}.}$$

Система Манакова служит ее условием совместности $(\partial^2_{xt}\Phi = \partial^2_{tx}\Phi)$.

При $\psi_{1,2} = A_{1,2}$ система (2) имеет точное решение – “затравочное” решение процедуры одевания:

$$\Phi_0(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\mathrm{i}\,r \\ -\dfrac{A_2}{A} & -\dfrac{A_1\mathrm{i}\,r}{A} & \dfrac{A_1}{A} \\ \dfrac{A_1}{A} & -\dfrac{A_2\,\mathrm{i}\,r}{A} & \dfrac{A_2}{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\varphi_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varphi} \end{pmatrix} \equiv E(\lambda)\,\mathrm{diag}(e^{-\varphi_0}, e^{\varphi}, e^{-\varphi})$$

$$\boxed{\det E(\lambda) = \gamma(z) = 1 + \frac{A^2}{z^2}}\,, \qquad z = \lambda + \zeta\,, \qquad r = \frac{A}{\lambda+\zeta}\,, \qquad \zeta = \sqrt{\lambda^2 + A^2} = \lambda + A\,r\,;$$

$$\varphi_0 = -\mathrm{i}\,\lambda x - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\lambda^2 + \zeta^2)\,t + \varphi_{00}\,, \qquad \varphi = -\mathrm{i}\,\zeta x - \mathrm{i}\,\lambda\zeta\,t + \tilde{\varphi}_{00}\,,$$

Детальное исследование системы (2) в рамках МОЗР проведено в 2015 г. в работе:

“The focusing Manakov system with nonzero boundary conditions”,
D. Kraus, G. Biondini, G. Kovacic, Nonlinearity, v. 28 (2015), pp. 3101-3151.

В этой работе для модели (1) решена задача Римана на двулистной римановой поверхности, связанной с конденсатом. Солитонные решения параметризуются нулями задачи Римана.

Показано, что ля фокусирующей системы Манакова существует три типа нулей. Им отвечают три типа солитонов, названные Краусом и Биондини солитонами типов I, II и III.

Мы применяем гораздо более простую схему без учета свойств аналитичности - метод “одевания” – по аналогии со случаем скалярного фокусирующего НУШ, исследованным в работах:

“Superregular solitonic solutions: a novel scenario for the nonlinear stage of modulation instability”, A. A. Gelash, V. E. Zakharov // Nonlinearity– 2014. V. 27, № 4. P. R1-R39.

“Formation of rogue waves from a locally perturbed condensate”, A.A. Gelash, Phys. Rev. E. V. 97 (2018), pp. 022208 (1-8) .

Метод “одевания”

Решение $\Phi(x,t,\lambda)$ для исходной линейной системы получается домножением ее “затравочного” решения $\Phi_0(x,t,\lambda)$ на “одевающую” функцию $\chi(x,t,\lambda)$:

$$\boxed{\Phi(x,t,\lambda) = \chi(x,t,\lambda)\,\Phi_0(x,t,\lambda)\,.}$$

Функция $\chi(x,t,\lambda)$ нормируется условием:

$$\boxed{\chi(\lambda) \to I + \frac{N}{\lambda} + O(\lambda^{-2})\,,} \qquad \lambda \to \infty$$

с редукцией: $\chi^{\dagger}(\lambda^*) = \chi^{-1}(\lambda)$ и мероморфна – имеет только простые полюсы. Однополюсное решение ищется в виде:

$$\chi(\lambda) = I + \frac{N}{\lambda-\lambda_1}\,,$$

где $N_{\alpha\beta} = p_\alpha\, q_\beta$ – вырожденная матрица. Компоненты $\psi_{1,2}$ находятся подстановкой $\chi(\lambda)$ в U-V-пару:

$$\boxed{\psi_1 = A_1 + 2\,\mathrm{i}\,N_{12}\,, \quad \psi_2 = A_2 + 2\,\mathrm{i}\,N_{13}}$$

Устранение лишних полюсов в U-V-паре и соотношении $\chi(\lambda)\chi^{-1}(\lambda) = I$ дает вектора p и q в виде: $\boxed{\mathbf{q}(x,t) = \Phi_0^*(x,t,\lambda_1^*)\mathbf{c}\,,\ \ \mathbf{p}(x,t) = \frac{\mathbf{q}^*(x,t)}{|\mathbf{q}|^2}\,(\lambda_1 - \lambda_1^*).}$

Однополюсное решение и солитоны типов I, II и III

В параметризации:

$$\boxed{\lambda_1 = A\,\mathrm{sh}(\xi + \mathrm{i}\,\alpha)}$$

однополюсное решение (*N=1*) принимает вид:

$$\boxed{\psi_1 = A_1 - \frac{4A\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\; q_{11}^* q_{12}}{|\mathbf{q}_1|^2}}\,, \quad \boxed{\psi_2 = A_2 - \frac{4A\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\; q_{11}^* q_{13}}{|\mathbf{q}_1|^2}}\,, \qquad (3)$$

где:

$$q_{11} = e^{-\varphi_1} C_{11} - \mathrm{i}\, r_1 e^{\varphi_1} C_{12}\,,$$

$$q_{12} = \frac{1}{A}\left[-A_2\, e^{\varphi_0} C_{10} + A_1\,(\mathrm{i}\, r_1 e^{-\varphi_1} C_{11} + e^{\varphi_1} C_{12})\right],$$

$$q_{13} = \frac{1}{A}\left[A_1\, e^{\varphi_0} C_{10} + A_2\,(\mathrm{i}\, r_1 e^{-\varphi_1} C_{11} + e^{\varphi_1} C_{12})\right],$$

$$\boxed{|\mathbf{q}_1|^2 = e^{-\xi}\left[e^{2y_0+\xi}|C_{10}|^2 + 2\,\mathrm{ch}\,\xi\,(e^{2y_1}|C_{12}|^2 + e^{-2y_1}|C_{11}|^2) + 4\sin\alpha\,\mathrm{Re}\left(e^{2\,\mathrm{i}\,\gamma_1} C_{11}^* C_{12}\right)\right]},$$

$$2y_0 = 2A\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\,\left(x - \tilde{V}t\right),\quad 2y_1 = 2A\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\xi\,(x - Vt),\quad \gamma_1 = \mathrm{Im}\,\varphi_1\,,$$

$$\tilde{V} = 2A\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\xi\,,\quad V = A\cos\alpha\,\frac{\mathrm{ch}\,(2\xi)}{\mathrm{sh}\,\xi}\,.$$

Решение (3) имеет асимптотики:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi_{1,2} \to A_{1,2} e^{-2\,\mathrm{i}\,\alpha}\,; & x \to -\infty \\ \psi_{1,2} \to A_{1,2}\,; & x \to +\infty\,. \end{array}}$$

При $C_{10} = 0$ из (3) получаем солитон типа I (по классификации Крауса) – решение скалярного фокусирующего НУШ, домноженный на вектор $(A_1, A_2)/A$:

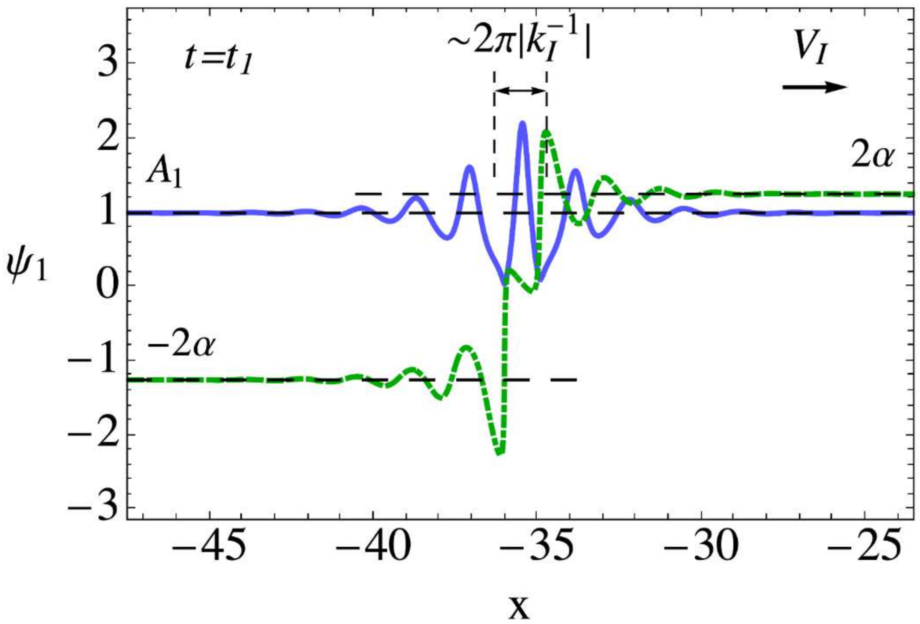
$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{Re}\psi^{\mathrm{I}}_{1,2} &= A_{1,2} - \frac{2A_{1,2}\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\,[\cos(2\mathrm{v})\,\mathrm{ch}\,\xi + \mathrm{ch}(2u)\sin\alpha]}{\mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{ch}(2u) + \sin\alpha\cos(2\mathrm{v})},\\ \operatorname{Im}\psi^{\mathrm{I}}_{1,2} &= A_{1,2} - \frac{2A_{1,2}\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\,[\sin(2\mathrm{v})\,\mathrm{sh}\,\xi + \mathrm{sh}(2u)\cos\alpha]}{\mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{ch}(2u) + \sin\alpha\cos(2\mathrm{v})},\end{aligned}}$$

$$2u = l^{-1}(x - Vt - \delta)\,, \qquad 2\mathrm{v} = px - \omega t + \theta\,,$$

$$l^{-1} = 2\operatorname{Im}\zeta = 2A\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\xi \quad ,p = 2\operatorname{Re}\zeta = 2A\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\,,$$

$$\omega = 2\mathrm{Re}[\lambda\zeta] = A^2\cos(2\alpha)\,\mathrm{sh}(2\xi),\;\; V = \frac{\mathrm{Im}[\lambda\zeta]}{\mathrm{Im}\,\zeta} = \frac{A\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,(2\xi)}{\mathrm{sh}\,\xi}\,.$$

$$\boxed{\psi^{\mathrm{I}}_{1,2} \to A_{1,2}e^{\pm 2\,\mathrm{i}\,\alpha}\,,\;\; x \to \pm\infty\,.}$$



При $C_{10}=0$ из (3) получаем (dark-light) <u>солитон типа II</u> :

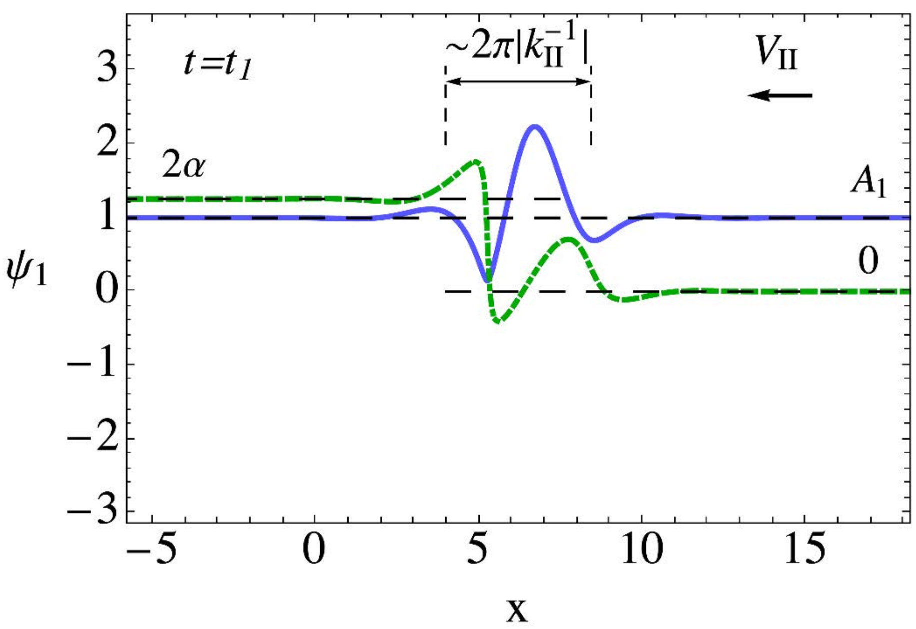
$$\boxed{\begin{aligned}\psi_1^{\mathrm{II}} &= A_1 + \frac{4\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,\alpha}\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\,[A_1 - A_2 e^{\varphi_0-\varphi_1}]}{e^{2y_0-2y_1+\xi}+2\mathrm{ch}\,\xi}\,,\\ \psi_2^{\mathrm{II}} &= A_2 + \frac{4\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,\alpha}\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi\,[A_2 + A_1 e^{\varphi_0-\varphi_1}]}{e^{2y_0-2y_1+\xi}+2\mathrm{ch}\,\xi}\,,\end{aligned}}$$

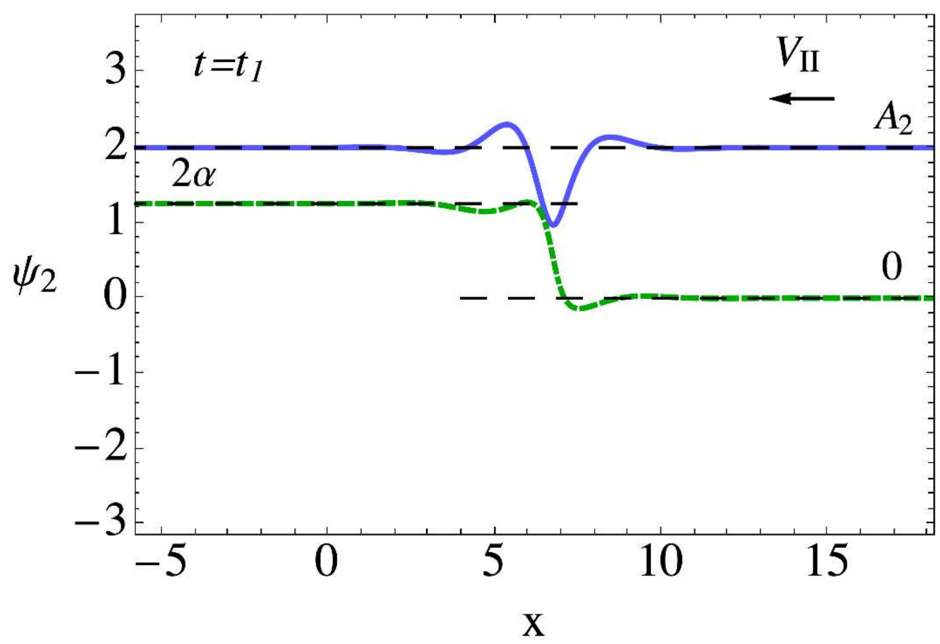
$$\varphi_0-\varphi_1 = y_0-y_1+\mathrm{i}\,(\gamma_0-\gamma_1)\,;$$

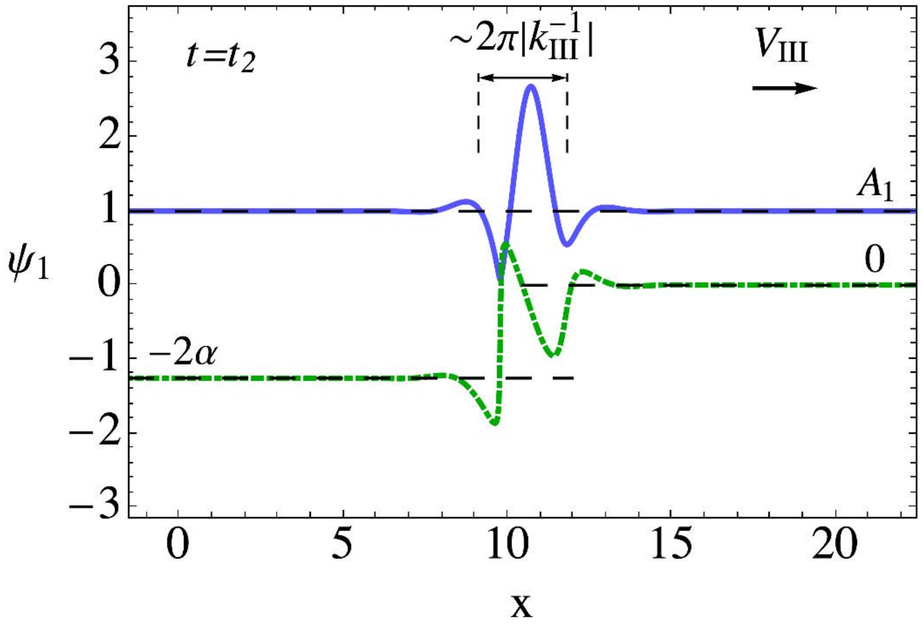
$$y_0-y_1 = l_0^{-1}(x-V_0t-\delta_0)\,,\qquad \gamma_0-\gamma_1 = p_0x-\omega_0t+\theta\,,$$

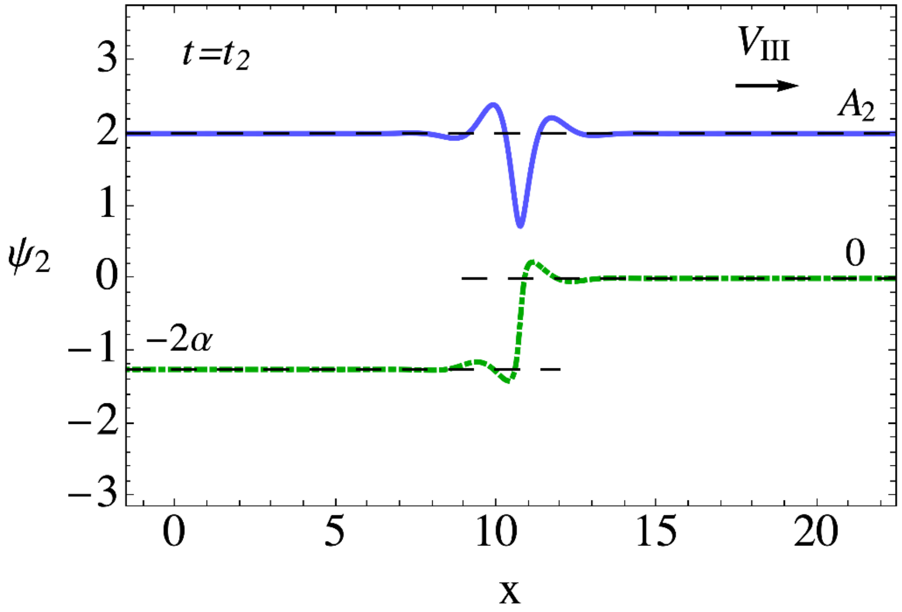
$$l_0^{-1} = A\sin\alpha\, e^{-\xi}\,,\quad p_0 = A\cos\alpha\, e^{-\xi}\,,\ \omega_0 = A^2\cos(2\,\alpha)\,e^{-2\xi}/2,\ \ V_0 = -A\cos\alpha\, e^{-\xi}\ .$$

$$\boxed{\psi_{1,2}^{\mathrm{II}} \to A_{1,2}e^{2\,\mathrm{i}\,\alpha}\,,\quad x\to+\infty\,;\ \ \psi_{1,2}^{\mathrm{II}} \to A_{1,2}\,,\quad x\to-\infty\,.}$$







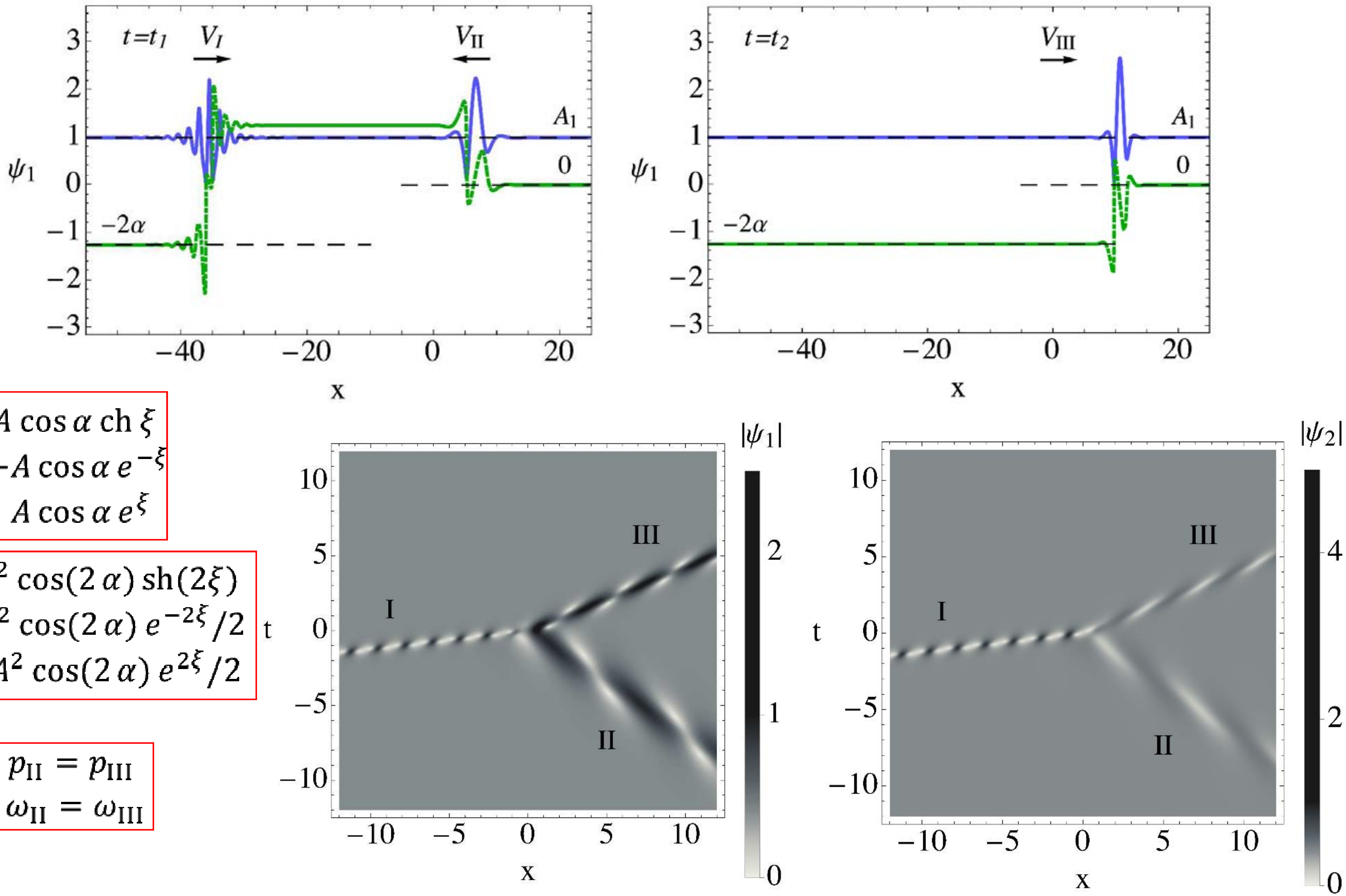


Наконец, при $C_{20} = 0$ из (3) получаем (dark-light) солитон типа III . Он получается из II заменами $\xi \to -\xi$, $\alpha \to \pi - \alpha$ и описывается той же формулой, отличаясь областью определения спектрального параметра λ . Солитон III имеет асимптотики:

$$\boxed{\begin{gathered} \psi_{1,2}^{\mathrm{III}} \to A_{1,2} e^{-2\,\mathrm{i}\,\alpha}\,, \quad x \to +\infty\,; \\ \psi_{1,2}^{\mathrm{III}} \to A_{1,2}\,, \quad x \to -\infty\,. \end{gathered}}$$

Резонасное взаимодействие солитонов I, II и III:

Неожиданный результат: при произвольном выборе констант однополюсное решение описывает слияние солитонов I+II=III



$$p_{\mathrm{I}} = 2A\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\xi$$
$$p_{\mathrm{II}} = -A\cos\alpha\, e^{-\xi}$$
$$p_{\mathrm{III}} = A\cos\alpha\, e^{\xi}$$

$$\omega_{\mathrm{I}} = A^2\cos(2\alpha)\,\mathrm{sh}(2\xi)$$
$$\omega_{\mathrm{II}} = A^2\cos(2\alpha)\, e^{-2\xi}/2$$
$$\omega_{\mathrm{III}} = A^2\cos(2\alpha)\, e^{2\xi}/2$$

$$p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}} = p_{\mathrm{III}}$$
$$\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{II}} = \omega_{\mathrm{III}}$$

Возможность слияния двух солитонов в единое возбуждение – “солитон накачки”, либо распада солитона накачки на вторичные солитоны при совпадении соответствующих им спектральных параметрах установлена В.Е. Захаровым и С.В. Манаковым в работе

1. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, Теория резонасного взаимодействия волновых пакетов в нелинейной среде, ЖЭТФ, 1975 г., т. 69, стр. 1654-1673.

для системы трех волн: $\partial_t \psi_i + c_i\, \partial_x \psi_i = \gamma_i \psi_j^* \psi_k^* \quad (i, j, k = 1,2,3)$

Причинам такого явления посвящена работа

2. D.J. Kaup, The Three-wave Interaction – A Nondispersive Phenomenon, Studies in Appl. Math, v. 55, 1, 1976, pp. 9-44.

Физически возможность слияния солитонов обусловлена отсутствием в системе трех волн дисперсии, вследствие чего локализованные волны и нелокализованное поле излучения не имеют строгого разграничения по свойствам: «the solitons and radiation (continuous spectrum) are on the equal footing» [2]. Математическая причина состоит в том, что в формулировку модели было изначально заложено условие резонанса: $\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{II}} + \omega_{\mathrm{III}} = 0$, $p_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}} + p_{\mathrm{III}} = 0$. Система Манакова (1) при внешнем (математическом) сходстве имеет существенное отличие от модели трехволнового взаимодействия: она учитывает дисперсию.

Заключение

Для фокусирующей системы Манакова (двухкомпонентного НУШ) разработана аналитическая схема интегрирования Захарова-Шабата (модификация метода обратной задачи рассеяния).

Построены явные решения модели, описывающие векторные солитоны (бризеры) НУШ и их взаимодействие в рамках солитонной модели конденсата.

Детально исследовано резонасное (трехбризерное) взаимодействие солитонов разных типов: а именно, слияние двух первых бризеров в третий, либо распад исходного возбуждения на солитонные составляющие. Полученные результаты проверены аналитически и численно.

Показано, что волновые числа и частоты участвующих во взаимодействии бризеров подчиняются стандартным условиям резонанса.

Неупругое слияние солитонов служит аналогом резонансного взаимодействия волновых пакетов в системе трех волн, но с существенным отличием: в данном случае такой эффект обнаружен в системе с дисперсией.

Спасибо за внимание