Об интегрируемости неплоских уравнений ВДВВ.

О. И. Мохов

(МГУ им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет)
mokhov@mi-ras.ru

(грант РНФ № 20-11-20214)

XXX Научная сессия Совета РАН
по нелинейной динамике

21 декабря 2021 г.

Плоские и неплоские уравнения Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ)

Плоский случай

$F(u^1,\dots,u^n)$ — функция n переменных, η^{ij}, $1\le i,j\le n$, — постоянная невырожденная симметричная матрица:

$\eta^{ij} = \mathrm{const}$ $\forall\, i,j$; $\det \eta^{ij} \ne 0$;

$\eta^{ij} = \eta^{ji}$, и $\forall\, i,j,k,l$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^j \partial u^s}\eta^{sp}\frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^j \partial u^s}\eta^{sp}\frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^k \partial u^i}$$

интегрируемая переопределённая система уравнений на функцию F. (Witten, Dijkgraaf, Verlinde, Verlinde, Dubrovin)

Многообразия Дубровина–Фробениуса

M^n — n-мерное плоское псевдориманово многообразие с плоской псевдоримановой метрикой $g_{ij}(u)$ и структурой следующей фробениусовой алгебры на касательных пространствах многообразия M^n с умножением $\circ$, задаваемым некоторым трёхвалентным тензором

$C: TM^n \otimes TM^n \to TM^n$,

$X \circ Y = C(X, Y)$, причём

1) g — плоская метрика

2) $X \circ Y = Y \circ X$ (умножение коммутативно)

3) $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$

(умножение ассоциативно)

4) $g(X \circ Y, Z) = g(X, Y \circ Z)$

(фробениусовость)

т.е. g — <u>инвариантная</u> невырожденная билинейная симметричная форма в алгебре

(2), 3) и 4) — коммутативная ассоциативная фробениусова алгебра)

Из 2) и 4) $\Longrightarrow$ $F(X, Y, Z) = g(X \circ Y, Z)$

— симметричный трёхвалентный тензор

5) $A(X, Y, Z, W) = \nabla_W F(X, Y, Z)$

— симметричный четырёхвалентный тензор

В плоских координатах контравариантная метрика $g^{ij}(u)$, $g^{is}(u)\,g_{sj}(u)=\delta^i_j$, имеет вид постоянной невырожденной симметричной матрицы η^{ij}, $\eta^{is}\eta_{sj}=\delta^i_j$,

$F_{ijk}=\eta_{is}\,c^s_{jk}(u)$, из 5) $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial F_{ijk}}{\partial u^l}=\frac{\partial F_{ijl}}{\partial u^k} \quad \Longrightarrow$$

$\exists$ функция $F(u)$ такая, что

$$F_{ijk}=\frac{\partial^3 F}{\partial u^i\partial u^j\partial u^k},$$

$$c^k_{ij}=\eta^{ks}\frac{\partial^3 F}{\partial u^s\partial u^i\partial u^j}$$

Выполнены все условия, кроме условия ассоциативности, которое эквивалентно уравнениям ВДВВ.

В 1998 г. в работах

[1] О.И. Мохов. УМН, 53:2 (1998)

[2] О.И. Мохов. Труды МИАН, т. 225 (1999)

[3] O. Mokhov. Reports on Math. Physics, Vol. 43, No. 1/2 (1999)

были рассмотрены гессиан-фробениусовы многообразия:

если метрика $g_{ij}(u)$ имеет вид гессиана некоторой функции $F(u)$:

$$g_{ij}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial u^j}$$

Тогда

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}(u) \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial u^j \partial u^k},$$

причём

$$(*)\quad R_{ijkl}(u) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^k \partial u^s} g^{sp}(u) \frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^l \partial u^s} g^{sp}(u) \frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^j \partial u^k}\right)$$

Если эта метрика плоская, то получаем аналог уравнений ВДВВ:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^j \partial u^s} g^{sp}(u) \frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^j \partial u^s} g^{sp}(u) \frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^k \partial u^i}$$

Было доказано, что это уравнение также является интегрируемым и его решения порождают фробениусово многообразие с операцией умножения $\circ$, задаваемой структурными функциями

$$c^i_{jk}(u) = g^{is}(u) \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial u^j \partial u^k}$$

Все условия 1) – 5) выполнены, ассоциативность эквивалентна данной системе уравнений

Неплоские уравнения ВДВВ

[4] N. Kozyrev, S. Krivonos, O. Lechtenfeld, A. Nersessian, A. Sutulin, Phys. Rev. D, 96, 101702 (R). (2017)
[5] N. Kozyrev. J. Physics: Conf. Series 1194 (2019), 012061

естественно возникает в многомерной суперсимметричной механике как обобщение ВДВВ в искривлённом пространстве.

Кроме того, неплоские уравнения ВДВВ (curved WDVV equations) естественно возникают в теории подмногообразий с потенциалом нормалей, развитой автором в

[6] О.И. Мохов, УМН, 63:2 (2008)

Рассмотрим произвольную псевдориманову метрику $g_{ij}(u)$ и симметричный трёхвалентный тензор $F_{ijk}(u)$, такие, что

1) $\nabla_l F_{ijk} = \nabla_k F_{ijl}$

2) $R_{ijkl} = F_{ilp} g^{ps} F_{sjk} - F_{ikp} g^{ps} F_{sjl}$

1) и 2) — неплоское обобщение уравнений ВДВВ

Введём неплоские фробениусовы многообразия, которые локально описываются неплоскими уравнениями ВДВВ и обобщают плоские многообразия Дубровина – Фробениуса.

<u>Неплоское фробениусово многообразие</u>

— n-мерное псевдориманово многообразие M^n с псевдоримановой метрикой g и трёхвалентным тензором C: $C: TM^n \otimes TM^n \to TM^n$, определяющим умножение $\circ$ на касательных пространствах многообразия M^n: $X \circ Y = C(X, Y)$ так, что выполнены условия

1) g — псевдориманова метрика

2) $X \circ Y = Y \circ X$ (коммутативность)

3) $(X \circ Y) \circ Z - X \circ (Y \circ Z) = cR(X, Y)Z$,
$c = const$

(вообще говоря, алгебра неассоциативна, ассоциативность выполнена только для плоских многообразий)

4) $g(X \circ Y, Z) = g(X, Y \circ Z)$

(фробениусовость)

$F(X, Y, Z) = g(X \circ Y, Z)$ —

симметричный трёхвалентный тензор (это следует из 2) и 4))

5) $A(X,Y,Z,W) = \nabla_W F(X,Y,Z)$

симметричный четырёхвалентный тензор

Таким образом, на касательных пространствах неплоских фробениусовых многообразий заданы неассоциативные коммутативные фробениусовы алгебры.

Утв. Неплоское фробениусово многообразие является многообразием Дубровина–Фробениуса $\Leftrightarrow$ метрика g плоская

И плоские, и неплоские уравнения ВДВВ являются естественными редукциями фундаментальных уравнений теории подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах.

Плоский случай

Рассмотрим n-мерные плоские подмногообразия с плоской нормальной связностью в $2n$-мерных псевдоевклидовых пространствах.

В плоских координатах метрика подмногообразия $g_{ij} = \eta_{ij}$.

Матрица Грама в нормальном пространстве $h_{ij} = c\,\eta_{ij}$, $c = \text{const} \neq 0$.

n вторых квадратичных форм

$$b^k_{ij} = \eta^{ks} \frac{\partial^3 F}{\partial u^s \partial u^i \partial u^j}.$$

Формы кручения $d^k_{ij} = 0$.

Такое подмногообразие $\exists \Longleftrightarrow$ выполнены уравнения ВДВВ.

Деривационные уравнения подмногообразия задают представление нулевой кривизны для уравнений ВДВВ.

Фробениусова структура задаётся первой и вторыми квадратичными формами подмногообразия: g_{ij} и b^k_{ij}

Неплоский случай

Рассмотрим n-мерные подмногообразия с потенциалом нормалей в $2n$-мерных псевдоевклидовых пространствах (введённые автором в 2008 г. в [6]).

$\vec{r}(u)$ — радиус вектор подмногообразия.

$\vec{m}(u)$ — потенциал нормалей.

$\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \vec{m}}{\partial u^n}\right)$ — базис в нормальных пространствах с матрицей Грама

$h_{ij}(u) = c\, g_{ij}(u)$, $c = const \neq 0$.

$b^k_{ij}(u)$ — вторые квадратичные формы подмногообразия.

$F_{ijk}(u) = g_{is}(u)\, b^s_{jk}(u)$

Такое подмногообразие $\exists \Longleftrightarrow$ выполняются неплоские уравнения ВДВВ.

Деривационные уравнения задают представление нулевой кривизны для неплоских уравнений ВДВВ.

Как показано в [4], [5] (N. Kozyrev et al, 2017, 2019)

неплоские уравнения ВДВВ легко интегрируются:

Связность $\Gamma^k_{ij} + g^{km} F_{mij}$ плоская, откуда следует, что $\exists$ координаты, в которых $g_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial u^i \partial u^j}$, т. е. выполняется соотношение ($\ast$) и неплоские уравнения выполняются,

$$F_{ijk} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 G}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$$

Но построение явных решений, связанных с важными решениями уравнений ВДВВ, представляет большой интерес.