Столкновение двух вихрей в невязкой жидкости в канале

Е.А.Кузнецов[1,2,3], Е.А.Михайлов[1,2,4]

[1]Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН, Москва

[2]Сколковский институт науки и технологий, Москва

[3]Институт теоретической физики имени Л.Д.Ландау, Черноголовка

[4]Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва

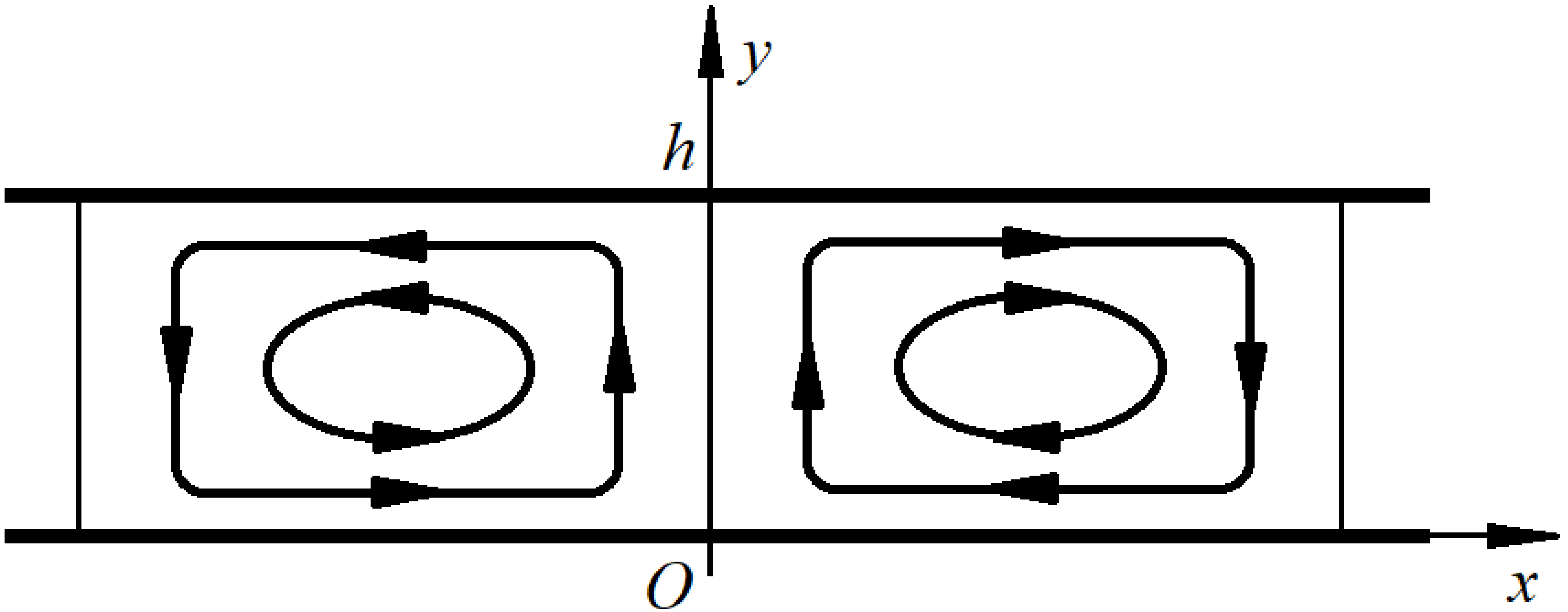
Введение

- Коллапс представляет собой одно из наиболее интересных явлений, которые дают возможность понять суть турбулентности.
- Классический закон Колмогорова – Обухова (Колмогоров и Обухов 1941) при малой вязкости предсказывает флуктуации завихренности, растущие по закону $l^{-2/3}$.
- Это означает бесконечное нарастание возмущений на малых масштабах.

Коллапс в идеальной гидродинамике

- В случае двумерной идеальной гидродинамики с периодическими граничными условиями, описываемой уравнениями Эйлера, коллапс запрещен.
- Тем не менее, оказывается вполне возможным рост по экспоненциальному закону при периодических граничных условиях, и при неограниченном времени можно достичь сколь угодно больших значений (Агафонцев, Кузнецов и Майлыбаев 2016).

Задача о столкновении вихрей



Качественные характеристики процесса

- Обозначим компоненты скорости течения как $v=(u,w)$.
- Из оценок, основанных на анализе двумерных уравнений Прандтля, следует что на границе между ячейками u будет менять знак, а ее производная – неограниченно расти.
- Из теоретических оценок следует, что

$$\max|u_x| \sim l^{-2/3}$$

Уравнение для завихренности

- Завихренность подчиняется следующему условию:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial\omega}{\partial x}=0.$$

- Для скорости на границе необходимо потребовать следующее:

$$\upsilon(x,0)=\upsilon(x,h)=0$$

Скалярная функция тока

- Удобно использовать скалярную функцию тока, связанную с завихренностью по закону:

$$\omega = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

- Она обращается в нуль на границе.
- Для нее мы рассматривали начальные условия:

$$\psi(x, y, 0) = -By(y - h)^2 \sin x;\ \ h = 2;\ \ B = 0.1.$$

Решение уравнения для завихренности

- Одним из способов решения эллиптического уравнения является так называемый счет на установление (Белов и Калиткин 2013).
- Уравнение удобно заменить на следующее:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega.$$

- С учетом принципа максимума, его решение достаточно быстро выходит на решение исходной задачи.

Счет на установление

- Счет на установление прекращается в том случае, когда квадрат нормы невязки становится меньше определенного значения:

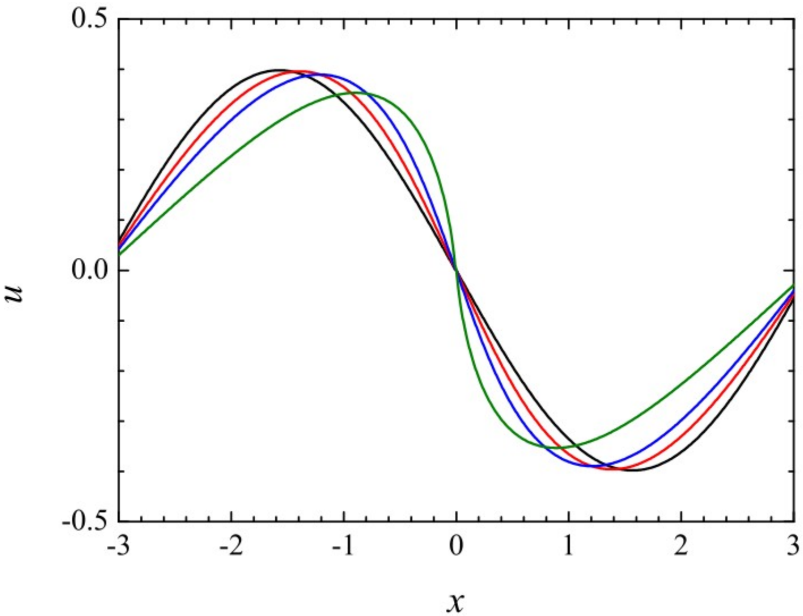
$$\left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega \right\|^2 < \varepsilon$$

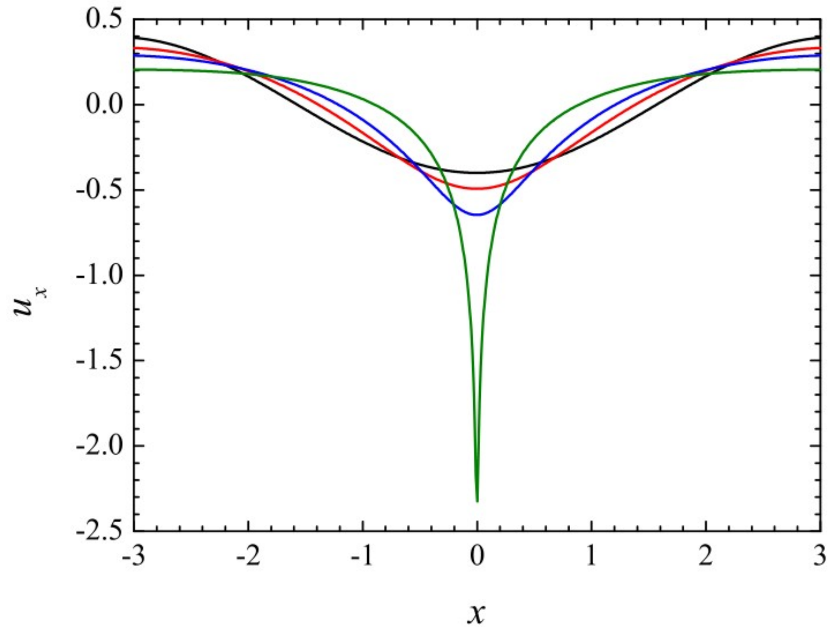
- Решение данной задачи осуществлялось с помощью частично неявной схемы Писмена – Рэкфорда.

Общая схема решения

- Решение задачи для уравнения Эйлера с помощью конечно-разностной схемы.
- Решение на каждом шаге задачи на установление.
- Аккуратность решения контролировалась с помощью проверки интеграла кинетической энергии: $E = \int\int \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) dxdy$

Эволюция горизонтальной скорости и ее градиента при y=0

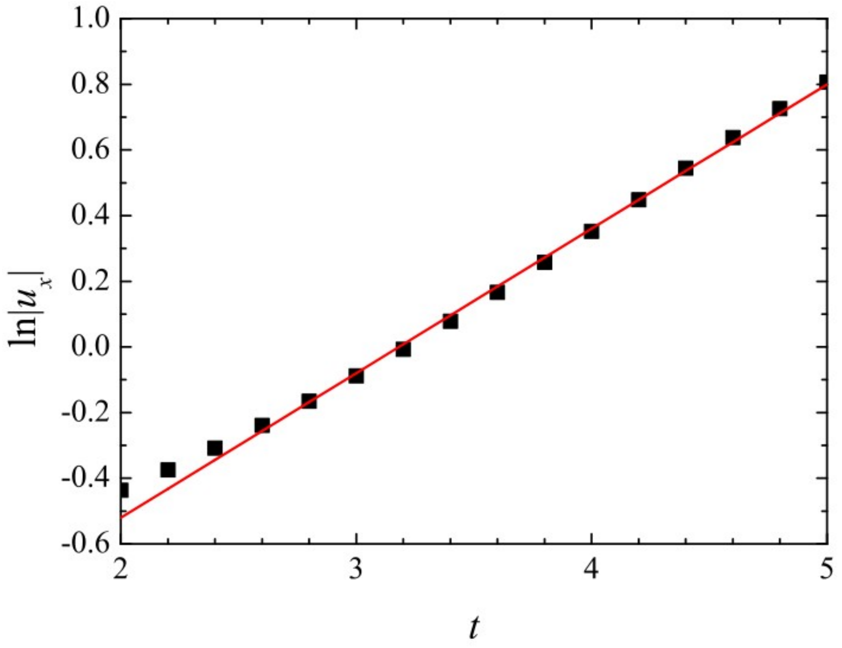


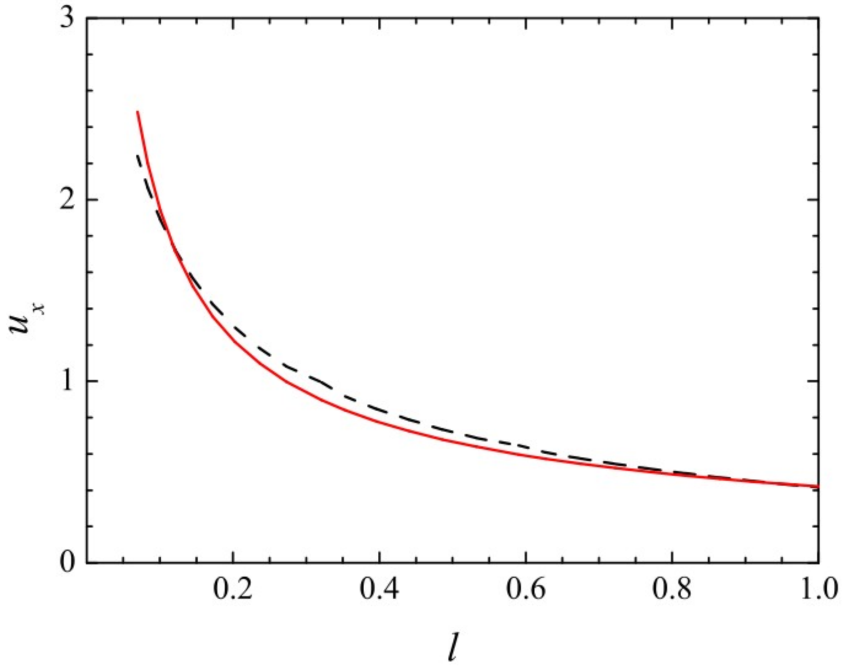


***t*=0**, ***t*=1**, ***t*=2**, ***t*=5**

Kuznetsov & Mikhailov 2022

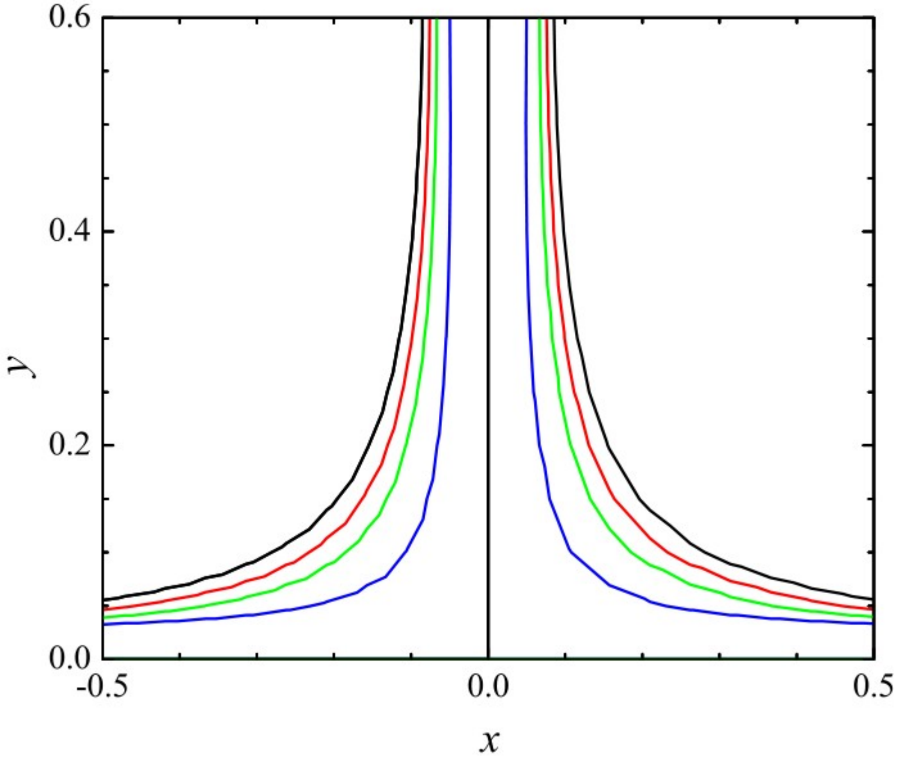
Градиент скорости и ширина максимума

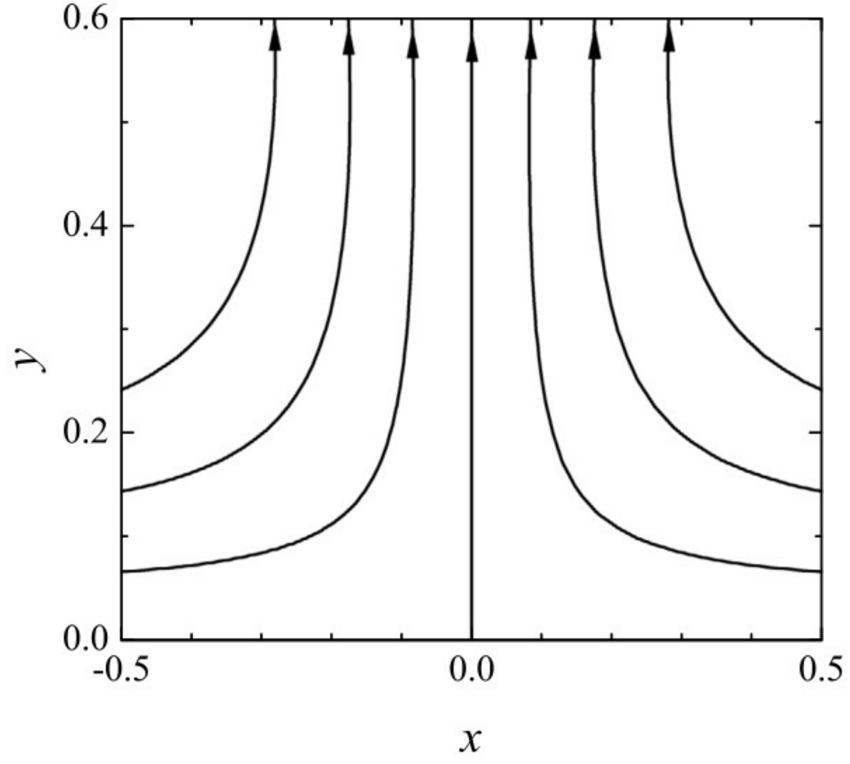




Kuznetsov & Mikhailov 2022

Сужение «джета»



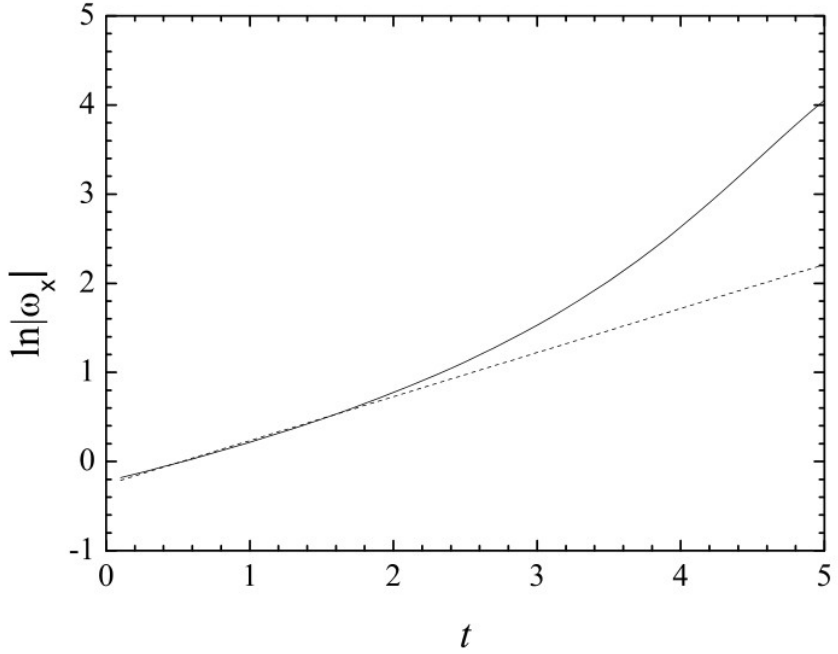


***t*=0**, ***t*=1**, ***t*=2**, ***t*=4**

***t*=5**

Kuznetsov & Mikhailov 2022

Градиент завихренности при $x=y=0$



- Рост градиента завихренности происходит по сверхэкспоненциальному закону:

$$\omega_x \sim \exp(\exp(t))$$

Kuznetsov & Mikhailov

Выводы

- Показано, что в случае столкновения двух вихрей в канале наблюдается «опрокидывание» течения и лавинообразный рост течения за счет проскальзывания на границе.
- Численный расчет показывает формирование «джета» на границе ячеек.
- Градиент завихренности демонстрирует сверхэкспоненциальный рост.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!