К неустойчивости установившихся сдвиговых плоско-параллельных течений идеальной баротропной жидкости

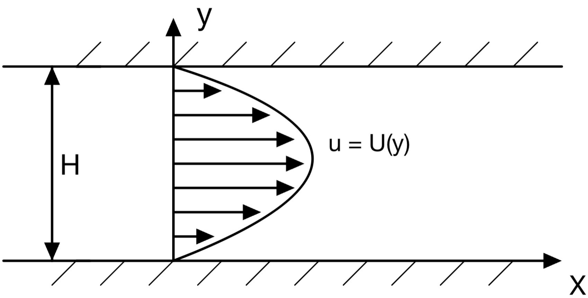
Михаил Александрович Бабенко

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Ю.Г. Губарев

Новосибирский государственный университет

19 декабря 2022 г.

Установившееся течение



Постановка точной задачи

$$\rho = \rho(x, y, t); \; u = u(x, y, t); \; v = v(x, y, t)$$

$$p = p(\rho)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u \right] = -\frac{dp(\rho)}{d\rho} \rho_x$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v \right] = -\frac{dp(\rho)}{d\rho} \rho_y$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0$$

$$v(x, y, t)|_{y=0} = 0; \; v(x, y, t)|_{y=H} = 0$$

Законы сохранения

Интеграл полной энергии

$$E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \rho \left[\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \int\limits_{\rho^*}^{\rho} \frac{p(\eta)}{\eta^2} \, d\eta \right] dy \, dx \equiv const$$

Законы сохранения

Уравнение для отношения завихренности к плотности

$$\omega = v_x - u_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) + \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\omega}{\rho} = 0$$

Интеграл движения

$$C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H} \rho\,\Phi\left(\frac{\omega}{\rho}\right)\,dy\,dx \equiv const$$

Стационарные решения

$$u = U(y),\ v = 0,\ \rho = \rho_0 \equiv const$$

Формулировка линеаризованной задачи

$$u(x,y,t) = U(y) + u'(x,y,t);\ v(x,y,t) = v'(x,y,t)$$

$$\rho(x,y,t) = \rho_0 + \rho'(x,y,t)$$

$$\rho_0 \left(u'_t + U u'_x + v' \frac{dU}{dy} \right) = -\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)\rho'_x$$

$$\rho_0 \left(v'_t + U v'_x \right) = -\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)\rho'_y$$

$$\rho'_t + \rho'_x U + \rho_0 \left(u'_x + v'_y \right) = 0$$

$$v'|_{y=0} = 0,\ v'|_{y=H} = 0$$

Уравнение для малых возмущений завихренности, плотности и поперечной составляющей скорости

$$\omega(x,y,t) = \omega_0(y) + \omega'(x,y,t);\ \omega_0 = -\frac{dU}{dy},\ \omega' = v'_x - u'_y$$

$$\left(\omega'_t - \frac{1}{\rho_0}\,\omega_0\,\rho'_t\right) + U\left(\omega'_x - \frac{1}{\rho_0}\,\omega_0\,\rho'_x\right) + v'\frac{d\omega_0}{dy} = 0$$

Сохраняющийся функционал

$$J = E + C$$

Первая вариация

$$\delta J = \delta E + \delta C$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \frac{p(\rho^*)}{\rho^*}\, dy\, dx = 0 \;\Rightarrow\; \rho^* = 0$$

Первая вариация

Первая вариация

$$\delta J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left(\frac{U^2}{2} + \int\limits_{0}^{\rho_0} \frac{dp(\eta)}{d\eta} \eta^{-2}\, d\eta + \Phi\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right) - \dot{\Phi}\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right) \frac{\omega_0}{\rho_0} \right) \delta\rho\, dy\, dx$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left[\rho_0 U + \ddot{\Phi}\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right) \frac{d}{dy}\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right) \right] \delta u\, dy\, dx$$

Условие зануления первой вариации

$$\frac{U^2}{2} + \int\limits_{0}^{\rho_0} \frac{dp(\eta)}{d\eta} \eta^{-2}\, d\eta + \Phi\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right) + \dot{\Phi}\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right) \rho_0^{-1} \frac{dU}{dy} = 0$$

Вторая вариация

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\rho_0\left[\left(\frac{U}{\rho_0}\delta\rho+\delta u\right)^2+(\delta v)^2+\frac{\dot{p}(\rho_0)-U^2}{\rho_0^2}\;(\delta\rho)^2\right]dy\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\frac{1}{\rho_0}\frac{U}{\ddot{U}}\left(\rho_0\delta\omega+\dot{U}\delta\rho\right)^2\,dy\,dx$$

Линейный аналог функционала полной энергии

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H} \rho_0 \left[\left(\frac{U}{\rho_0}\rho' + u' \right)^2 + v'^2 + \frac{\dot{p}(\rho_0) - U^2}{\rho_0^2}\ \rho'^2 \right] dy\, dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H} \frac{1}{\rho_0}\frac{U}{\ddot{U}} \left(\rho_0\omega' + \dot{U}\rho' \right)^2 dy\, dx \equiv const$$

Условия неотрицательности функционала I

$$\frac{U}{\ddot{U}} \geq 0,\ \dot{p}(\rho_0) - U^2 \geq 0$$

Поле лагранжевых смещений

$$\xi_1 = \xi_1(x, y, t), \ \xi_2 = \xi_2(x, y, t)$$

$$u' = \xi_{1t} + U\xi_{1x} - \xi_2 \frac{dU}{dy}$$

$$v' = \xi_{2t} + U\xi_{2x}$$

Преобразованная линеаризованная задача

$$\rho_0\left(\xi_{1tt} + 2U\xi_{1tx} + U^2\xi_{1xx}\right) = -\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)\rho'_x$$

$$\rho_0\left(\xi_{2tt} + 2U\xi_{2tx} + U^2\xi_{2xx}\right) = -\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)\rho'_y$$

$$\rho' = -\rho_0\left(\xi_{1x} + \xi_{2y}\right)$$

$$\xi_2|_{y=0} = 0,\ \xi_2|_{y=H} = 0$$

Выражение для малых возмущений завихренности

$$\omega' = -\omega_0\xi_{1x} - (\omega_0\xi_2)_y$$

Преобразованный линейный аналог функционала полной энергии

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \rho_0 \left[\begin{array}{c} (\xi_{1t} + U\xi_{1x})^2 + (\xi_{2t} + U\xi_{2x})^2 \\ +\dot{p}(\rho_0) \left(\xi_{1x} + \xi_{2y}\right)^2 \\ -2U \left(\xi_{1x} + \xi_{2y}\right) (\xi_{1t} + U\xi_{1x}) \\ -2\dot{U}\, \xi_{1t}\, \xi_2 \end{array} \right] dy\, dx \equiv const$$

Функционал Ляпунова

$$M \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \rho_0 \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\, dy\, dx \geq 0$$

$$\frac{dM}{dt} = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \rho_0 \left(\xi_1\, \xi_{1t} + \xi_2\, \xi_{2t}\right)\, dy\, dx$$

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \rho_0 \left({\xi_1}_t^2 + \xi_1\, \xi_{1tt} + {\xi_2}_t^2 + \xi_2\, \xi_{2tt}\right)\, dy\, dx$$

Неравенство на функционал M

$$\frac{1}{2}\frac{d^2M}{dt^2} - \lambda\frac{dM}{dt} + \lambda^2 M + 2\Pi \geq 0$$

$$\Pi \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\left[\rho_0\,\dot{p}(\rho_0)\left(\xi_{1_x} + \xi_{2_y}\right)^2\right]\,dy\,dx$$

Оценка интеграла П

$$\xi_1 = h(t) g_1(x, y)$$
$$\xi_2 = h(t) g_2(x, y)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho_0 \, \dot{p}(\rho_0) h^2(t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left(g_{1_x} + g_{2_y}\right)^2 \, dy \, dx$$

$$M = \rho_0 \, h^2(t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left(g_1^2 + g_2^2\right) \, dy \, dx$$

Оценка П через M

$$\kappa M \geq 2\Pi$$

Основное дифференциальное неравенство

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2\left(\lambda^2 + \kappa\right) M \geq 0$$

$$\lambda > 0$$

Счетный набор дополнительных условий

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right) > 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}\right) M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right)$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right) = M(0)\exp\left(\frac{\lambda\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right)$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right) = \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\lambda\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right)$$

$$M(0) > 0, \quad \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\left(\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}\right) M(0)$$

Априорная экспоненциальная оценка снизу

$$M(t) \geq A_1 \, \exp(\lambda t), \; A_1 > 0$$

Преобразованный линейный аналог функционала полной энергии

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\rho_0 \left[\begin{gathered}\left(\xi_{1_t} + U\xi_{1_x}\right)^2 + \left(\xi_{2_t} + U\xi_{2_x}\right)^2 \\ +\dot{p}(\rho_0)\left(\xi_{1_x} + \xi_{2_y}\right)^2 \\ -2U\left(\xi_{1_x} + \xi_{2_y}\right)\left(\xi_{1_t} + U\xi_{1_x}\right) \\ -2\dot{U}\,\xi_{1_t}\,\xi_2\end{gathered}\right] dy\,dx \equiv const$$

Условия линейной практической неустойчивости

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right) > 0; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}\right) M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\kappa}}\right)$$

Спасибо за внимание!