Движение тёмных солитонов в неоднородном течении бозе-эйнштейновского конденсата

С. К. Иванов, А. М. Камчатнов
Институт спектроскопии РАН

XXXI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике
19 декабря 2022 г.

Теорема Эренфеста

Уравнение Гросса-Питаевского

$$i\psi_t + \tfrac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi = U(x)\psi$$

для конденсата в ловушке с потенциалом $U(x)$. Определяем координату центра масс и среднюю «силу»

$$\langle x\rangle = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dx, \quad \langle U_x\rangle = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} U_x|\psi|^2 dx, \quad N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx.$$

Теорема Эренфеста гласит ($m = 1$ в нашем случае)

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\langle U_x\rangle.$$

Например, если

$$U(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2,$$

то $\langle x\rangle$ осциллирует с частотой

$$\omega_{\mathsf{cm}} = \omega_0.$$

Гармонический потенциал

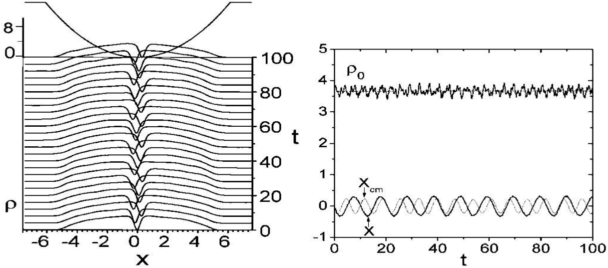
Однако глубокий солитон в потенциале

$$U(x) = \frac{\omega_0^2}{2} x^2,$$

осциллирует с частотой

$$\omega_{\mathsf{soliton}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Численный расчёт: A. M. Kamchatnov, M. Salerno, J. Phys. B **42,** 185303 (2009).



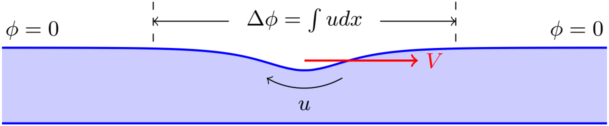
Теория: Th. Busch, J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett., **84,** 2298 (2000).

Противоток

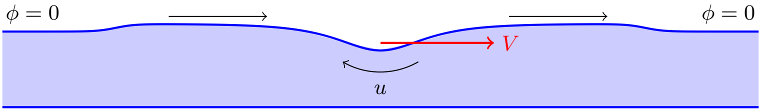
Это означает, что движение солитона сопровождается возбуждением противотока в фоновом распределении конденсата.

С. И. Шевченко, Физ. низких темп., **14,** 1011 (1988).

Фаза конденсата должна оставаться однозначной функцией координаты. Поэтому скачок фазы $\Delta\phi$, возникающий при возбуждении солитона,



должен компенсироваться набегом фазы из-за течения в фоне:



Канонический импульс

Солитонное решение в покоящемся конденсате ($\rho(x) \to \rho_0, u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$):

$$\rho(x - Vt) = \rho_0 - \frac{\rho_0 - V^2}{\cosh^2\left[\sqrt{\rho_0 - V^2}(x - Vt)\right]},$$

$$u(x - Vt) = V\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

Наивное определение импульса даёт

$$p_s = \int \rho u dx = -2V\sqrt{\rho_0 - V^2}.$$

Противоток даёт дополнительный вклад

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \phi_x^{\text{counterflow}} dx = -\rho_0 \Delta\phi,$$

то есть импульс солитона состоит из двух частей: (а) вызванный течением конденсата в узкой области солитона p_s, (б) вызванный течением в окружающем солитон фоне Δp

$$p_c = -2V\sqrt{\rho_0 - V^2} + 2\rho_0 \arccos\frac{V}{\sqrt{\rho_0}}.$$

Импульс и энергия солитона при наличии течения

В лаб-системе из скорости солитона надо вычесть скорость фонового течения u_0:

$$p_c = -2V\sqrt{\rho_0 - (V-u_0)^2} + 2\rho_0 \arccos\frac{V-u_0}{\sqrt{\rho_0}}.$$

В гамильтоновой механике $V = \frac{d\varepsilon_s}{dp_c}$, так что получаем выражение для энергии солитона при наличии течения

$$\varepsilon_s = \int V dp_c = \int V \frac{dp_c}{dV} dV = \frac{4}{3}\left[\rho_0 - (V-u_0)^2\right]^{3/2} + u_0 p_c \equiv \varepsilon_s^{(0)} + u_0 p_c.$$

Предполагая, что солитон движется по достаточно плавно изменяющемуся фону с характерными длинами, на которых он существенно меняется, много больше ширины солитона, делаем замены

$$\rho_0 \mapsto \rho(x,t), \quad u_0 \mapsto u(x,t), \quad V \mapsto \dot{x}(t)$$

Уравнения Гамильтона

Приходим к уравнениям Гамильтона для движения солитона по неоднородному и меняющемуся со временем фону:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial p_c}\right)_x, \qquad \frac{dp_c}{dt} = -\left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x}\right)_{p_c},$$

где

$$\varepsilon_s = \frac{4}{3}\left[\rho - (\dot{x} - u)^2\right]^{3/2} - 2u(\dot{x} - u)\sqrt{\rho - (\dot{x} - u)^2} + 2u\rho \arccos\frac{\dot{x} - u}{\sqrt{\rho}},$$

и

$$p_c = -2\dot{x}\sqrt{\rho - (\dot{x} - u)^2} + 2\rho \arccos\frac{\dot{x} - u}{\sqrt{\rho}}.$$

Уравнение Ньютона

Уравнение движения солитона

$$2\ddot{x} = \rho_x + (u + \dot{x})u_x + 2u_t + \frac{\rho_t + (\rho u)_x}{\sqrt{\rho - (\dot{x} - u)^2}} \arccos \frac{\dot{x} - u}{\sqrt{\rho}}.$$

комбинируем с уравнениями для эволюции фона

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \qquad u_t + u u_x + \rho_x = -U_x,$$

и получаем

$$2\ddot{x} = -2U_x - \rho_x + (\dot{x} - u)u_x$$

или

$$2\ddot{x} = -U_x + u_t + u_x \dot{x} = -U_x + \dot{u}.$$

В этой форме уравнение Ньютона было выведено в теории возмущений в Th. Busch, J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett., **84**, 2298 (2000).

Частные случаи

(1) В отсутствие потенциала

$$2\ddot{x} = \dot{u}$$

даёт интеграл

$$2\dot{x} - u = \text{const}.$$

(2) В случае стационарного течения ($\rho = \rho(x), u = u(x)$)

$$2\ddot{x} = -2U_x - \rho_x + (\dot{x} - u)u_x$$

гамильтонов подход даёт сохранения энергии

$$\varepsilon_s = \frac{4}{3}\left[\rho - (\dot{x} - u)^2\right]^{3/2} - 2u(\dot{x} - u)\sqrt{\rho - (\dot{x} - u)^2} + 2u\rho \arccos\frac{\dot{x} - u}{\sqrt{\rho}} = \text{const}.$$

(3) Нет течения ($u = 0$)

$$2\ddot{x} = -U_x.$$

В гармонической ловушке $U(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2$, тёмный солитон осциллирует с частотой

$$\omega_{\textsf{soliton}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Движение солитона по расширяющемуся облаку конденсата

В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ, **2,** 138 (1965)

V. A. Brazhnyi, AMK, V.V. Konotop, Phys. Rev. A **68,** 035603 (2003)

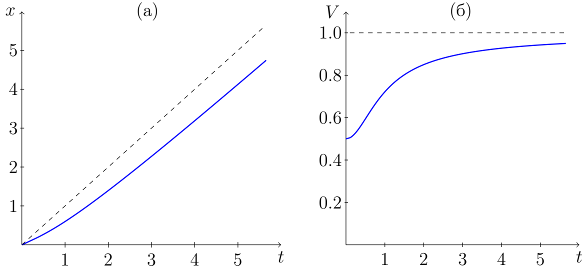
Течение расширяющегося облака конденсата описывается формулами

$$\rho(x,t) = \frac{1}{f(t)}\left(1 - \frac{x^2}{f^2(t)}\right), \qquad u(x,t) = x \cdot \sqrt{\frac{f(t)-1}{f^3(t)}},$$

$$t(f) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{f(f-1)} + \ln(\sqrt{f-1} + \sqrt{f})\right].$$

Солитон начинает движение при $x = 0, t = 0$ со скоростью V_0. Его траектория и скорость даются параметрически формулами

$$x(f) = V_0\sqrt{f(f-1)}, \qquad V(f) = V_0\,(2 - 1/f)\,.$$



Течение конденсата мимо барьера

V. Hakim, Phys. Rev. E **55,** 2835 (1997),
A. M. Leszczyszyn et al, Phys. Rev. A **79,** 063607 (2009).

Уравнения стационарного течения

$$(\rho u)_x = 0, \quad u u_x + \rho_x + U_x = 0,$$

дают ($\rho \to \rho_0, u \to u_0$ при $|x| \to \infty$)

$$\rho u = \rho_0 u_0, \quad \frac{1}{2}u^2 + \rho + U = \frac{1}{2}u_0^2 + \rho_0$$

или, исключая $\rho = \rho_0 u_0/u$,

$$\frac{1}{2}\left[u_0^2 - u^2(x)\right] + \rho_0\left(1 - \frac{u_0}{u(x)}\right) = U(x),$$

Пусть $U_m = \max\{U(x) : -\infty < x < \infty\}$ — максимальное значение потенциала. Тогда решение $u(x)$ при всех x, $-\infty < x < \infty$, существует только если

$$U_m \leq \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{3}{2}\left(\rho_0 u_0\right)^{2/3} + \rho_0,$$

то есть в интервалах

$$u_0 < u_-, \qquad u_0 > u_+,$$

где $u_\pm$ — корни уравнения

$$\frac{1}{2}u_0^2 - \frac{3}{2}(\rho_0 u_0)^{2/3} + \rho_0 = U_m.$$

Два типа путей солитона

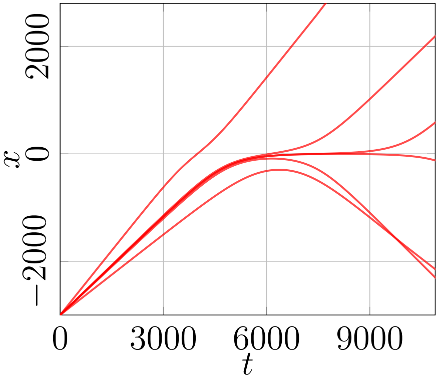
Если $u(x)$ и $\rho(x) = u_0\rho_0/u(x)$ известны, то мы можем решить уравнение

$$2\ddot{x} = -2U_x - \rho_x + (\dot{x} - u)u_x$$

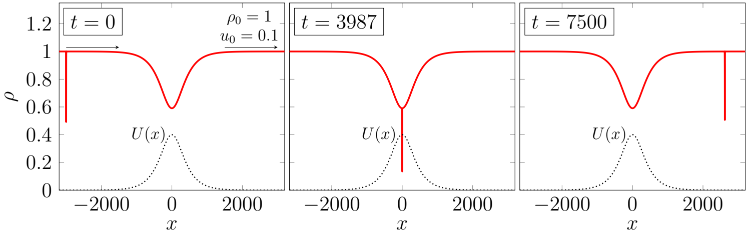
с начальным условием

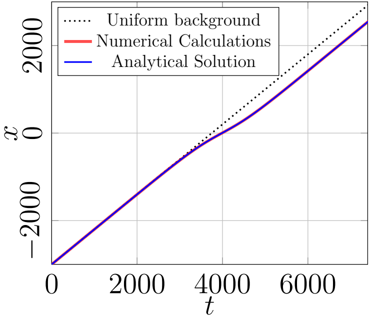
$$x(-L) = x_0, \qquad \dot{x}(-L) = V_0, \qquad (L \gg 1)$$

и получить траекторию солитона. В зависимости от начальной скорости траектории разделяются на два типа — проходящие через препятствие и отражающиеся от него.

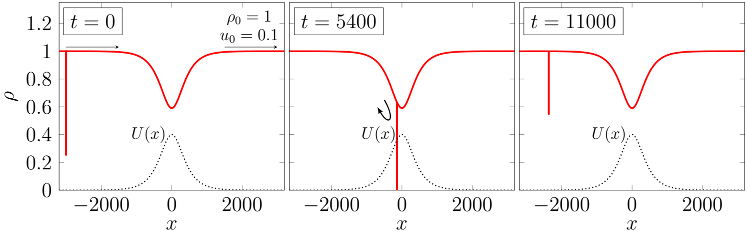


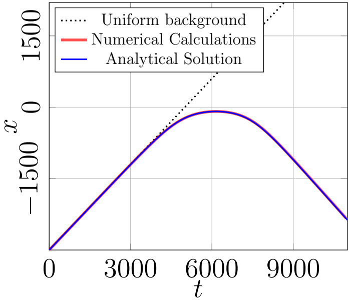
Проходящие через препятствие траектории





Отражение от препятствия



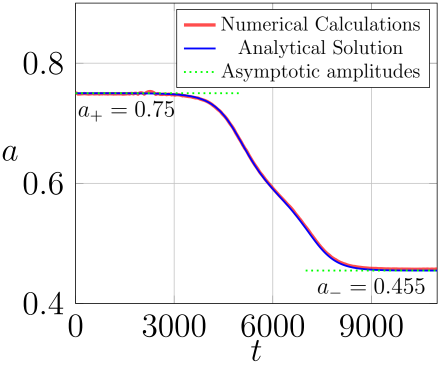


Амплитуда отражённого солитона определяется законом сохранения энергии

$$\frac{2}{3}A_+^{3/2} - M\sqrt{A_+(1-A_+)} + M(\pi - \arcsin\sqrt{A_+})$$
$$= \frac{2}{3}A_-^{3/2} + M\sqrt{A_-(1-A_-)} + M\arcsin\sqrt{A_-},$$

где

$$A_+ = \frac{a_+}{\rho_0} = \frac{\rho_0 - (V_+ - u_0)^2}{\rho_0}, \quad A_- = \frac{a_-}{\rho_0} = \frac{\rho_0 - (V_- - u_0)^2}{\rho_0}, \quad M = \frac{u_0}{\sqrt{\rho_0}}.$$



Спасибо за внимание!