К неустойчивости стационарных решений системы уравнений Власова — Максвелла в трехмерной постановке

Юрий Геннадьевич Губарев[1,2]

Яков Андреевич Журенков[1]

[1]Новосибирский Государственный Университет
[2]Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

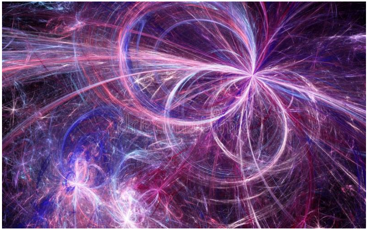
19 декабря 2022

Постановка точной задачи

$$f^s = f^s\left(t, \vec{x}, \vec{v}\right); \quad \vec{E} = \vec{E}\left(t, \vec{x}\right); \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t, \vec{x}\right)$$

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^s}{\partial x_i} + \frac{q^s}{m^s}\left(E_i + \frac{\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_i}{c}\right)\frac{\partial f^s}{\partial v_i} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}$$



$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{B} - \sum_s \frac{q^s}{c}\int\limits_{\Re^3} \vec{v} f^s d\vec{v}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} f^s d\vec{v}; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

Стационарные решения

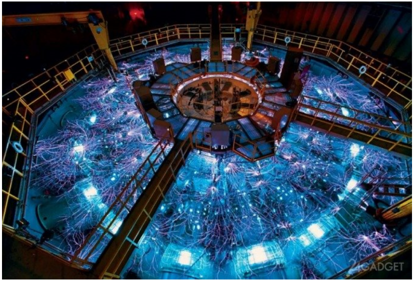
$$f^{s0} = f^{s0}\left(\vec{x}, \vec{v}\right); \quad \vec{E}^{0} = \vec{E}^{0}\left(\vec{x}\right); \quad \vec{B}^{0} = \vec{B}^{0}\left(\vec{x}\right)$$

$$v_i \frac{\partial f^{s0}}{\partial x_i} + \frac{q^s}{m^s}\left(E_i^0 + \frac{(\vec{v} \times \vec{B}^0)_i}{c}\right)\frac{\partial f^{s0}}{\partial v_i} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}^0 = \sum_s \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \vec{v} f^{s0} d\vec{v}$$

$$\operatorname{div} \vec{E}^0 = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} f^{s0} d\vec{v}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^0 = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B}^0 = 0$$



Формулировка линеаризованной задачи

$$\frac{\partial f^{s'}}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^{s'}}{\partial x_i} + \frac{q^s}{m^s}\left[\left(E_i' + \frac{\left(\vec{v}\times\vec{B}'\right)_i}{c}\right)\frac{\partial f^{s0}}{\partial v_i} + \right.$$

$$\left. + \left(E_i^0 + \frac{(\vec{v}\times\vec{B}^0)_i}{c}\right)\frac{\partial f^{s'}}{\partial v_i}\right] = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}'; \quad \operatorname{div}\vec{B}' = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{B}' - \sum_s \frac{q^s}{c}\int\limits_{\Re^3} \vec{v} f^{s'}\, d\vec{v}$$

$$\operatorname{div}\vec{E}' = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} f^{s'}\, d\vec{v}$$

Гидродинамическая подстановка

Замена переменных

$$\vec{v}_0 : \vec{v}^s = \vec{V}^s\left(\vec{x}, \vec{v}_0, t\right); \quad \frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0$$

$$f^s\left(\vec{x}, \vec{v}, t\right) = \rho^s\left(\vec{x}, \vec{v}_0, t\right)\left(J^s\right)^{-1}; \quad J^s \equiv \frac{D\left(V_1^s, V_2^s, V_3^s\right)}{D\left(v_{01}, v_{02}, v_{03}\right)} \neq 0$$

Постановка задачи в новых переменных

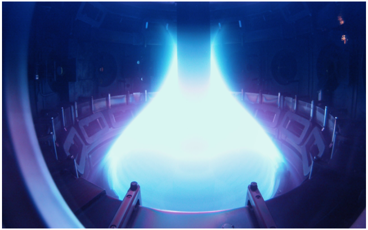
$$\frac{\partial V_i^s}{\partial t} + V_k^s \frac{\partial V_i^s}{\partial x_k} = \frac{q^s}{m^s} \left(E_i + \frac{\left(\vec{V}^s \times \vec{B}\right)_i}{c} \right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{B} - \sum_s \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \vec{V}^s \rho^s d\vec{v}_0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} \rho^s d\vec{v}_0$$

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_i^s \rho^s\right) = 0$$



Вспомогательные соотношения

$$\frac{\partial J^s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(V_i^s J^s\right) = 0$$

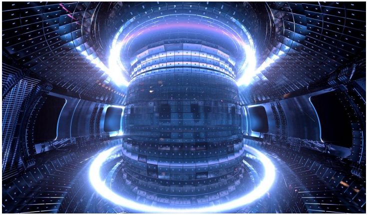
$$\varkappa^s \equiv \rho^s \left(J^s\right)^{-1}: \qquad \frac{\partial \varkappa^s}{\partial t} + V_i \frac{\partial \varkappa^s}{\partial x_i} = 0$$

Стационарные решения

$$\vec{V}^{s0} = \vec{V}^{s0}\left(\vec{x}, \vec{v}_0\right); \quad \rho^{s0} = \rho^{s0}\left(\vec{x}, \vec{v}_0\right); \quad \vec{B}^0 = \vec{B}^0\left(\vec{x}\right); \quad \vec{E}^0 = \vec{E}^0\left(\vec{x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(V_i^{s0}\rho^{s0}\right) = 0; \quad V_k^{s0}\frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_k} = \frac{q^s}{m^s}\left[E_i^0 + \frac{(\vec{V}^{s0} \times \vec{B}^0)_i}{c}\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}^0 = \sum_s \frac{q^s}{c}\int\limits_{\Re^3} \vec{V}^{s0}\rho^{s0} d\vec{v}_0$$



$$\operatorname{div}\vec{E}^0 = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} d\vec{v}_0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}^0 = 0; \quad \operatorname{div}\vec{B}^0 = 0$$

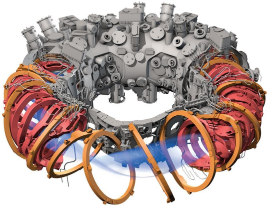
Формулировка линеаризованной задачи

$$\frac{\partial V_i^{s'}}{\partial t} + V_k^{s0} \frac{\partial V_i^{s'}}{\partial x_k} + V_k^{s'} \frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_k} = \frac{q^s}{m^s} \left(E_i' + \frac{\left(\vec{V}^{s0} \times \vec{B}'\right)_i}{c} + \frac{\left(\vec{V}^{s'} \times \vec{B}^0\right)_i}{c} \right)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{B}' - \sum_s \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \vec{V}^{s0} \rho^{s'} d\vec{v}_0 - \sum_s \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \vec{V}^{s'} \rho^{s0} d\vec{v}_0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}'; \quad \operatorname{div} \vec{B}' = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E}' = \sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} \rho^{s'} d\vec{v}_0$$



$$\frac{\partial \rho^{s'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^{s0} V_i^{s'} + \rho^{s'} V_i^{s0} \right) = 0$$

Поле лагранжевых смещений

$$\vec{\xi}^{s} = \vec{\xi}^{s}\left(\vec{x}, \vec{v}_0, t\right)$$

$$\frac{\partial \xi_i^s}{\partial t} = V_i^{s'} + \xi_k^s \frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_k} - V_k^{s0} \frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_k}$$

Преобразованная линеаризованная задача

$$\rho^{s'} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{s0} \xi_i^s\right)$$

$$\vec{B}' = -\sum \frac{q^s}{c} \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} \left(\vec{V}^{s0} \times \vec{\xi}^{s}\right) d\vec{v}_0; \quad \operatorname{div} \vec{B}' = 0$$

$$\vec{E}' = -\sum_s q^s \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} \vec{\xi}^{s} d\vec{v}_0; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}'$$

Поле лагранжевых смещений

Преобразованная линеаризованная задача

$$\frac{\partial^2 \xi_i^s}{\partial t^2} + 2V_k^{s0}\frac{\partial^2 \xi_i^s}{\partial x_k \partial t} - \xi_k^s \frac{\partial}{\partial x_k}\left(V_m^{s0}\frac{\partial V_i^{s0}}{\partial x_m}\right) + V_k^{s0}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(V_m^{s0}\frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_m}\right) =$$

$$= \frac{q^s}{m^s}\left(E_i' + \frac{\left(\vec{V}^{s0} \times \vec{B}'\right)_i}{c} + \frac{\left(\vec{V}^{s'} \times \vec{B}^0\right)_i}{c}\right)$$

Функционал Ляпунова

$$M = \sum_s m^s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} \xi_i^{s2} d\vec{v}_0 d\vec{x}$$

$$\frac{dM}{dt} = 2\sum_s m^s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \rho^{s0} \xi_i^s \frac{\partial \xi_i^s}{\partial t} d\vec{v}_0 d\vec{x}$$

$$\frac{d^2M}{dt^2} = 2\sum_s m^s \int\limits_{\Re^3} \int\limits_{\Re^3} \left[\rho^{s0} \left(\frac{\partial \xi_i^s}{\partial t} + V_k^{s0} \frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{q^s}{m^s} \frac{(\vec{V}^{s\prime} \times \vec{B}^0)_i}{c} \xi_i^s \rho^{s0} + \right.$$

$$\left. + \frac{q^s}{m^s} \rho^{s0} \xi_i^s \xi_k^s \frac{\partial}{\partial x_k} \left(E_i^0 + \frac{(\vec{V}^{s0} \times \vec{B}^0)_i}{c} \right) \right] d\vec{v}_0 d\vec{x} +$$

$$+ 2 \int\limits_{\Re^3} \left[B_i^{\prime 2} - E_i^{\prime 2} \right] d\vec{x}$$

Основное дифференциальное неравенство

$$\text{Пусть } \xi_i^s = \exp(\mu_i^s t) h_i^s(\vec{x}, \vec{v}_0)$$

$$\ddot{M} - 2\lambda \dot{M} + 2\left(\lambda^2 + \gamma\right) M \geq 0, \quad \gamma \equiv const > 0$$

$$\lambda > 0$$

Дополнительные условия

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) > 0;\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$\dot{M}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) \geq 2\left(\lambda+\frac{\gamma}{\lambda}\right) M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right)$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) \equiv M\left(0\right)\exp\left(\frac{\lambda\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right)$$

$$\dot{M}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) \equiv \dot{M}\left(0\right)\exp\left(\frac{\lambda\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right)$$

Априорная оценка снизу

$$M\left(t\right) \geq C_0 \exp\left(\lambda t\right), \quad C_0 \equiv const > 0$$

Начальные данные для растущих возмущений

$$M\left(0\right) > 0$$

$$\dot{M}\left(0\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\gamma}{\lambda}\right) M\left(0\right)$$

Выводы

- Рассмотрена задача линейной устойчивости стационарных решений системы уравнений Власова — Максвелла в трехмерной декартовой системе координат.
- Найдены достаточные условия линейной практической неустойчивости: $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) > 0,\ \dot{M}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right) \geq 2\left(\lambda+\frac{\gamma}{\lambda}\right) M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2+2\gamma}}\right)$$

  Важной особенностью этих условий является их конструктивность, что позволяет использовать их при проведении физических экспериментов и численных расчетов.
- В случае, когда найденные условия неустойчивости выполнены, построена априорная экспоненциальная оценка снизу роста изучаемых малых возмущений.

Спасибо за внимание!