

Двухмерная версия трёхмерной фазо-разрешающей модели потенциальных волн.

Д. В. Чаликов

Институт океанологии РАН, Санкт-Петербургский филиал.

Мельбурн университет, Австралия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + g\eta - p &= 0 \end{aligned} \right\} 2-D \text{ уравнения при } z = \eta$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad 3-D \text{ уравнение Лапласа}$$

Вводится связанная с поверхностью нестационарная, криволинейная неортогональная система координат:

$$\xi = x, \quad \vartheta = y, \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau), \quad \tau = t$$

$$\varphi = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}$$

$$\bar{\varphi}_{\xi\xi} + \bar{\varphi}_{\vartheta\vartheta} + \bar{\varphi}_{\zeta\zeta} = 0$$

Уравнение для нелинейной компоненты потенциала скорости

$$\tilde{\varphi}_{\xi\xi} + \tilde{\varphi}_{\vartheta\vartheta} + \tilde{\varphi}_{\zeta\zeta} = 2\eta_{\xi}\varphi_{\xi\zeta} + 2\eta_{\vartheta}\varphi_{\vartheta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta})\varphi_{\zeta} - (\eta_{\xi}^2 + \eta_{\vartheta}^2)\bar{\varphi}_{\zeta\zeta}$$

Граничные условия на поверхности: $\zeta = 0: \quad \tilde{\varphi} = 0$

Рассмотрим проекцию на поверхность уравнение для
нелинейной компоненты потенциала $\tilde{\varphi}$

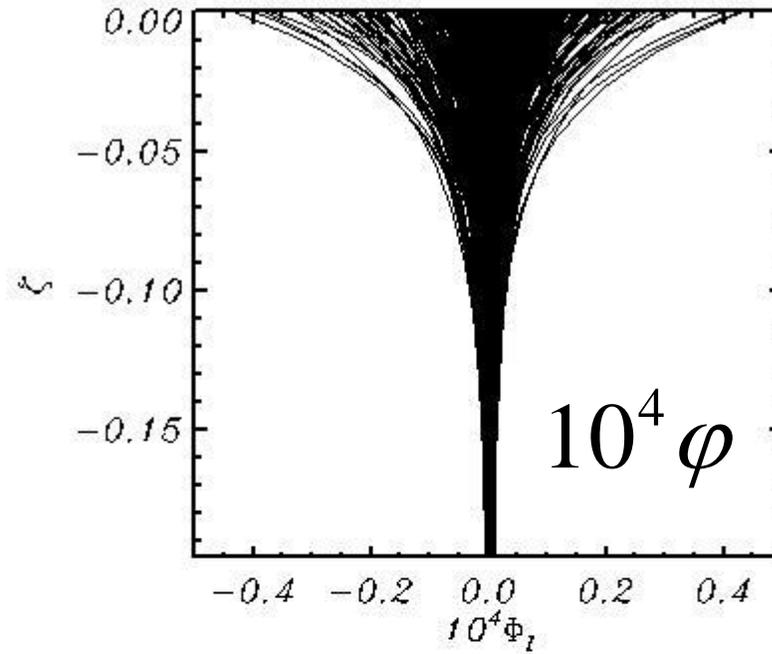
$$\left(1 + \eta_{\xi}^2 + \eta_{\vartheta}^2\right) \tilde{w}_{\zeta} = 2\left(\eta_{\xi} w_{\xi} + \eta_{\vartheta} w_{\vartheta}\right) + \left(\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta}\right) w - \left(\eta_{\xi}^2 + \eta_{\vartheta}^2\right) \bar{w}_{\zeta}$$

Это уравнение **двумерное** и **точное**. Его можно рассматривать как
дополнительное (третье) поверхностное диагностическое условие.

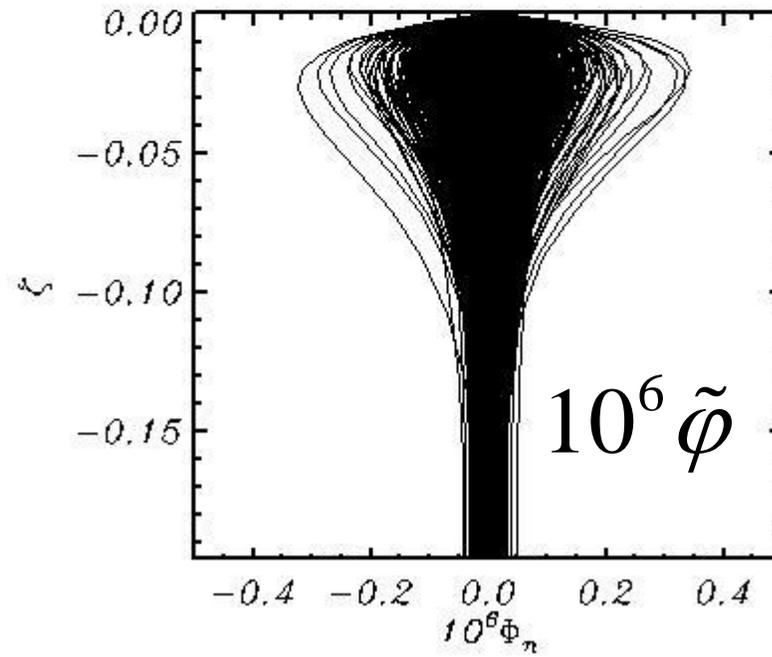
К сожалению, оно не замкнуто, т.к. содержит две неизвестные: W и W_{ζ}

Возникает проблема **замыкания**, т.е. нахождения связи между W и W_{ζ} .

Полная компонента потенциала



Нелинейная поправка к потенциалу



Замыкание в Фурье-пространстве

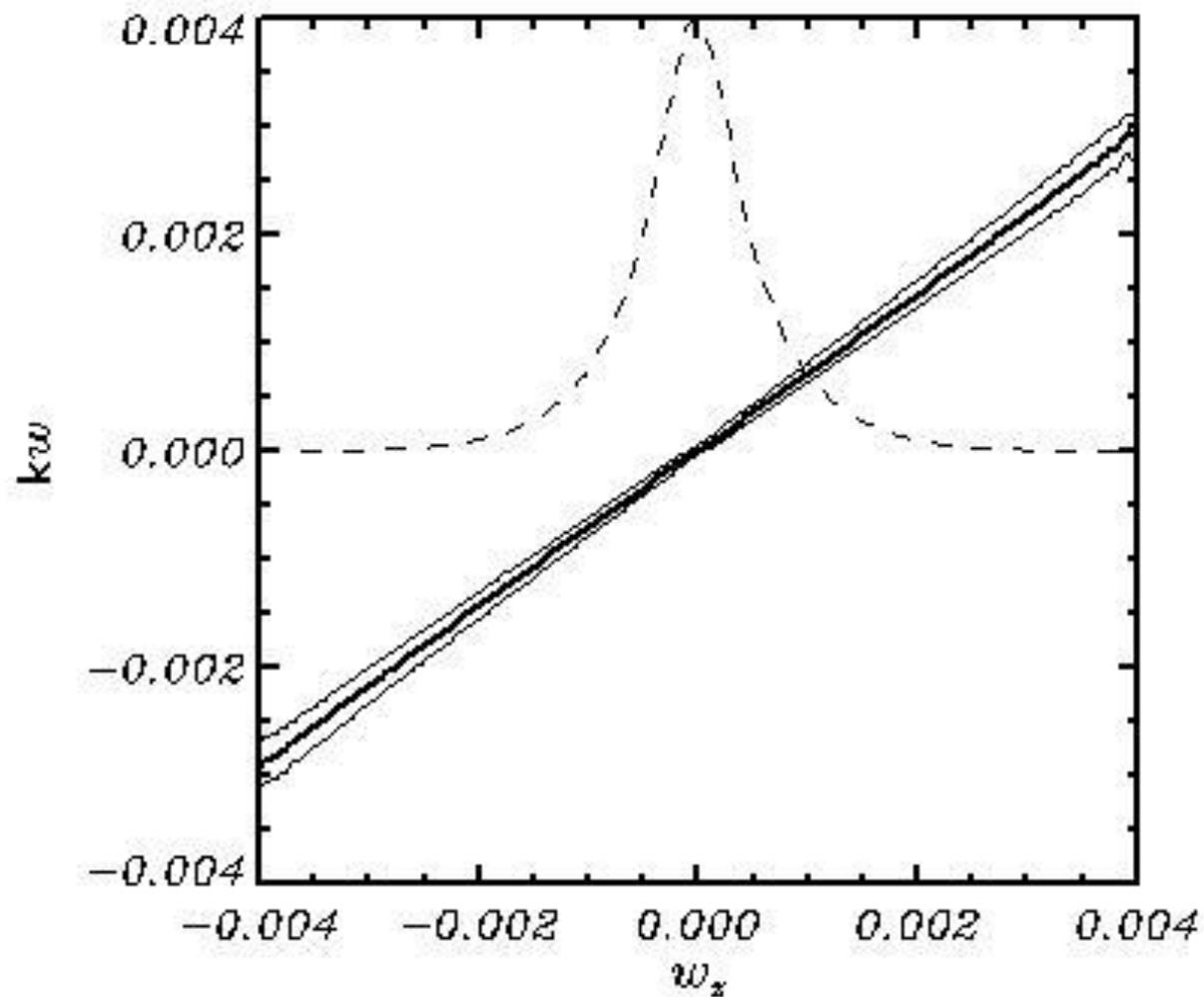
Связь Фурье-компонент

$$\left(w_{\xi}\right)_{k,l} \text{ и } \left|k_{k,l}\right|\left(w\right)_{k,l}$$

$$\left|k\right|_{k,l} w_{k,l} = \gamma \left(w_{\xi}\right)_{k,l}$$

$$\gamma = 0.7335 \pm 0.0005$$

5 000 000 000 значений



2-D уравнения для 3-D волн с Фурье замыканием

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \varphi_\xi - \eta_g \varphi_g + (1 + \eta_\xi^2 + \eta_g^2) w \quad (1)$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2} \left(\varphi_\xi^2 + \varphi_g^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \eta_g^2) w^2 \right) \quad (2)$$

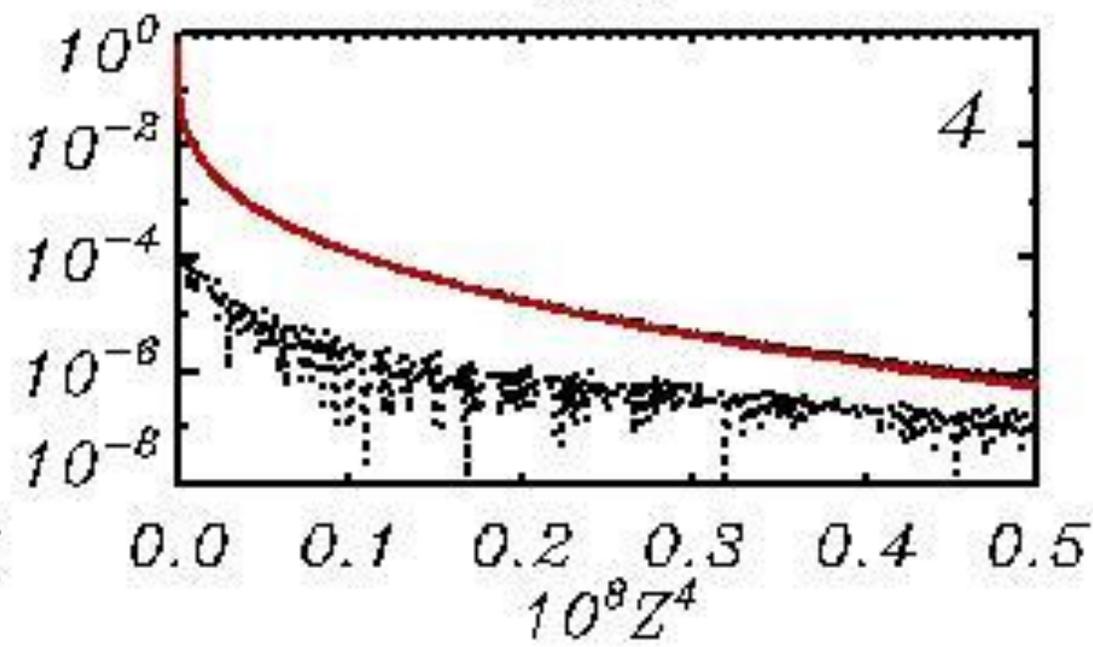
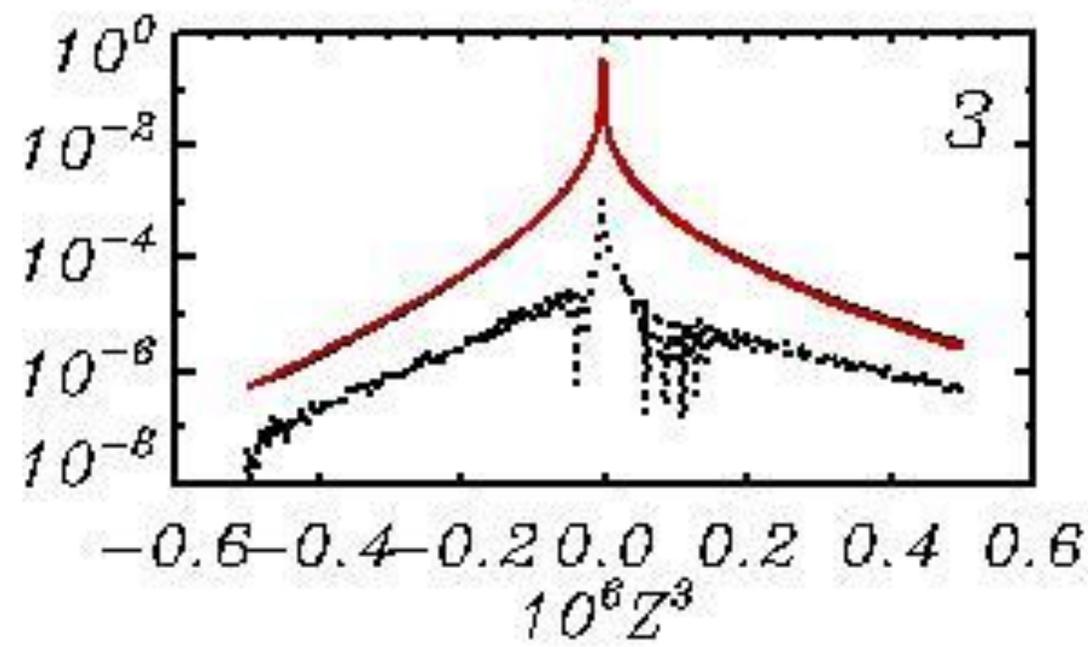
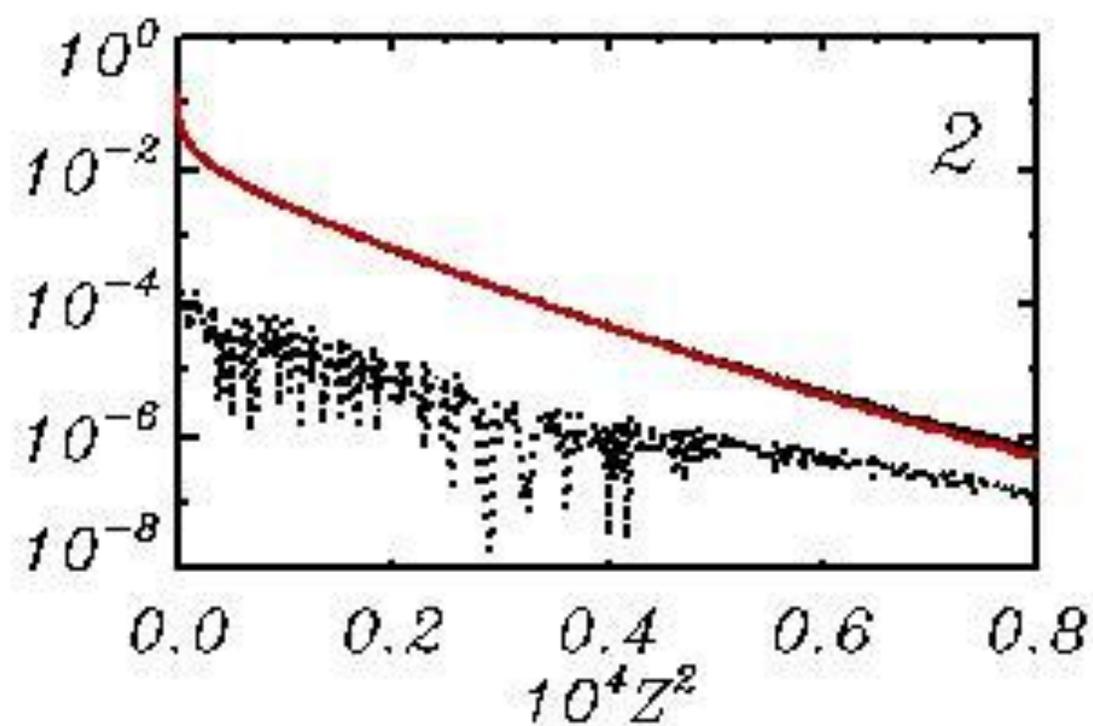
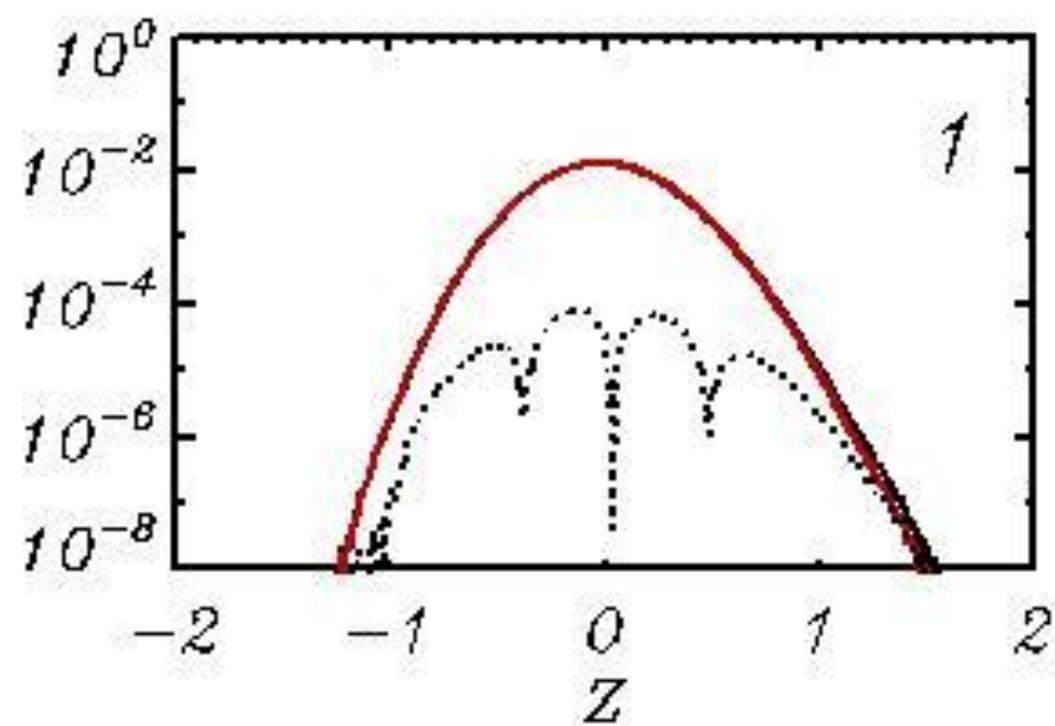
$$w_{k,l} = \gamma |k|^{-1} \left[(1+s)^{-1} 2(\eta_\xi w_\xi + \eta_g w_g) + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{gg}) w - (\eta_\xi^2 + \eta_g^2) \bar{w}_\zeta \right]_{k,l} + \bar{w}_{k,l} \quad (3)$$

Нелинейная поправка

Линейная
компонента

Уравнения (1)-(3) решаются Фурье-трансформ методом

Уравнение (3) – с применением итераций. Типичное число итераций – 4.



РЕЗУЛЬТАТЫ

- 1. 2-D модель даёт практически совпадающие статистические результаты с результатами 3-D модели.**
- 2. Численная 2-D модель не использует конечных разностей**
- 3. 2-D модель считает примерно в 50 раз быстрее чем 3-D модель.**
- 4. 2-D модель очень легко программируется и проста в эксплуатации.**