Мероморфность решений широкого класса ОДУ типа Пенлеве

Б. И. Сулейманов

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа

16 декабря 2022 г.

Подробное содержание доклада в статьях

1) Домрин А. В., Сулейманов Б.И., Шумкин М. А. О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий", Анализ и математическая физика, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Армена Глебовича Сергеева, Тр. МИАН, 311, МИАН, М., 2020, 106–122.

2) A. V. Domrin, M. A. Shumkin and B. I. Suleimanov. Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type. Journal of Mathematical Physics. Vol.: 63. Issue:2 (2022). Issue:2022-02-28 .

Уравнения Пенлеве

Уравнения Пенлеве среди прочих ОДУ вида

$$\varphi''_{zz} = f(z, \varphi, \varphi'_z) \tag{ODE}$$

с рациональными по φ и φ'_z правыми частями были выделены по признаку свойства Пенлеве – Ковалевской: отсутствия так называемых подвижных особых точек, отличных от полюсов. Для первого

$$\varphi''_{zz} = 6\varphi^2 + z \tag{PI}$$

и второго ОДУ Пенлеве

$$\varphi''_{zz} = 2\varphi^3 + z\varphi + \alpha \qquad (\alpha \in C - -const) \tag{PII}$$

это свойство равносильно глобальной мероморфности решений задач Коши для этих ОДУ

$$\varphi(z_0) = a, \quad \varphi'_{z_0} = b \tag{Koshi}$$

при любых фиксированных комплексных z_0, a и b.

История вопроса

Вейерштрасс, Ковалевская, Пуанкаре, Пенлеве и его ученики. Ошибочные первоначальные доказательства глобальной мероморфности. Ошибочность ряда последующих доказательств -в том числе доказательства Крускала и Налини. Ошибочность доказательства Голубева. Правильное (считающееся таковым на сегодняшний день), но громоздкое доказательство на рубеже веков Лайн и его на тот момент аспирант -Хинканен.

Принципиально другое доказательство в первой из процитированных выше статей с А.В. Доминым и М. А. Шумкиным,

$$y(z) = (z-z_0)^{-2} - z_0(z-z_0)^2/10 - (z-z_0)^3/16 + h(z-z_0)^4 + \ldots$$

Основная особенность доказательства: использование результатов А. В. Домрина о свойстве глобальной мероморфности локально голоморфных решений интегрируемых нелинейных уравнений типа Кортевега де Вриза (КдВ)

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{KdV}$$

и расщепленного уравнения Шредингера

$$ip_t = p_{xx} + p^2 q, \quad -iq_t = q_{xx} + pq^2 = 0, \tag{NSH}$$

(а также иерархий их высших симметрий для некоторых иерархий высших уравнений Пенлеве)
В применении к уравнению КдВ результат А. В. Домрина: всякое решение этого уравнения, голоморфное в бидиске (x_0,t_0 – произвольные комплексные числа, c_1, c_2 – некоторые положительные числа)

$$(x, t) \in C^2, \quad |x - x_0| < c_1, |t - t_0| < c_2, \tag{bid}$$

всегда мероморфно продолжается в полосу

$$(x, t) \in C^2, \quad |t - t_0| < c_2. \tag{pol}$$

А. В. Домрин заметил, что первое и второе уравнения Пенлеве являются автомодельными решениями уравнения КдВ и МкдВ. Пример: подстановка в уравнение КдВ анзаца

$$u = t^{-2/3} f(x/t^{1/3}) = t^{-2/3} f(z)$$

дает ОДУ третьего порядка на функцию $f(z)$, которое преобразованием Миуры $f = k\varphi'_z + m\varphi^2$ и растяжениями сводится ко второму уравнению Пенлеве. (Точнее в нашей статье речь шла о модифицированном уравнении КдВ.)
Аналогично, первое уравнение Пенлеве также получается из автомодельного решения уравнения КдВ.
Мое предложение и вклад в нашу первую статью: сразу же вести речь и о высших уравнениях Пенлеве. Оно реализовано в ней путем рассмотрения автомодельных редукций иерархий высших высших коммутрирующих симметрий четырех интегрируемых уравнений.
Но доказательство может быть упрощено и обобщено на другие ОДУ типа Пенлеве, если не аппелировать к автомодельным редукциям, а использовать симметрии и инвариантные многообразия интегрируемых уравнений.

По модулю результатов А.В. Домрина доказательство простое, как гвоздь!

Симметрии эволюционнных уравнений

Под симметрией системы уравнений в частных производных

$$U_t = F(U, U_1, \ldots, U_k), \quad (U, F \in R^m) \qquad \text{(Sis)}$$

(нижний индекс вектора U означает порядок его производной по переменной x) понимается система эволюционных уравнений

$$U_\omega = G(t, x, U, U_1, \ldots, U_n), \quad (G \in R^m), \qquad \text{(Sism)}$$

правая часть которой удовлетворяет условию коммутирования $\frac{dF}{d\omega} = \frac{dG}{dt}$. При его выполнении общая теория гарантирует, что с системой (Sis) совместны, в частности, *стационарные* части $G = 0$ симметрий (Sism). Под *классической* симметрией понимается случай функции, представимой в виде $G = H(t, x, F(U, U_1, \ldots, U_k), U_x)$, а остальные симметрии системы (Sis) называются высшими. Наличие высших симметрий –отличительный признак интегрируемых уравнений.

Примеры: 1) $u_{xxx} = -uu_x$, $1 - tu_x$, $2u + xu_x - 3t(u_{xxx} + uu_x)$,

$$2)[u_{xxxx} + 5uu_{xx}/3 + 5(u_x)^2/6 + 5(x - tu + u^3)/18]'_x$$

определяют стационарные части, соответственно, 1) классических симметрий –правой части Кдв,Галилея и растяжения, 2) его первой высшей коммутирующей симметрии. Высших коммутирующих симметрий у интегрируемых уравнений бесконечно много.
Из определения следует, что любая линейная комбинация симметрий с постоянными коэффициентами тоже будет симметрией. В частности, стационарными частями симметрий КдВ будут ОДУ (k-const)

$$2u + xu_x - 3t(u_{xxx} + uu_x) = 0,$$

$$k[1 - tu_x] = u_{xxx} + uu_x$$

(это ОДУ после интегрирования сводится к перому уравнению Пенлеве $u''_{xx} + u^2/2 = k[x - tu] + c$),

$$k[1 - tu_x] = [u_4 + 5uu_2/3 + 5(u_1)^2/6 + 5(x - tu + u^3)/18]'_x,$$

(это ОДУ после однократного тривиального интегрирования дает ОДУ

$$k[x - tu + c] = u_4 + 5uu_2/3 + 5(u_1)^2/6 + 5(x - tu + u^3)/18,$$

свойство глобальной мероморфности решений для которого (только при $t = 0$!) было доказано Шимомурой -приложения: ГП, мы с Кудашевым и Гарифуллиным, Дубровин и компания, квантовая гравитация) а также стационарная часть симметрии КдВ, определяемая линейной комбинацией стационарных частей симметрии растяжения и первой высшей симмтерией уравнения КдВ (приложения: наши с Гарифуллиным статьи, Перивал, Шевиц)

Используя вышеупонянутый результат А. В. Домрина, в случае уравнений Пенлеве (1) и (2) легко доказать глобальную мероморфность решений всех задач Коши для этих ОДУ а также их высших иерархий, определяемых стационарными частями симметрий уравнений КдВ и МкдВ, представляющих собой линейные комбинации высших коммутирующих с ними сиимметрий и их классических симмтерий Галилея и аастяжения . Также легко доказывается глобальная мероморфность и для множества других иерархий уравнений типа Пенлеве, определяемых стационарными частями интегрируемых эволюционных уравнений, подпадающих под действия теорем, доказанных А.В. Домриным.

Инвариантные многообразия

Стационарные части симметрий являются частным случаем ОДУ, задающих инвариантные многообразия Наоборот – неверно. Примеры: Ю. Ю. Багдерина (2009 , Функан, т. 43, в.4, с.87-90) для уравнения Савады - Котера

$$u_t = u_5 - 30uu_3 - 30u_1u_2 + 180u^2u_1 \qquad \text{(SK)}$$

(С.В. Хабиров, В.В. Соколов. А. Б. Шабат)

Определение. ОДУ $f(x, u, u_1, \ldots, u_k) = 0$ задает инвариантное многообразие эволюционного уравнения $u_t = F(u, u_1, \ldots, u_m)$, если

$$X(F)f|_{|f|} = 0, \qquad X(F) = F\partial_u + \sum_{j \leq 1} D^j \partial_{u_j},$$

где $[f]$–многообразие, зададанное ОДУ, и его дифференциальными следствиями $D^j f = 0$ $(j = 1, ..., m)$.
(Лемма о существовании локально голоморфного совместного решения и этого ОДУ есть тривиальная модификация леммы, доказанной в книге К.Андреев, О В Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике, Наука, Новосибирск, 1994, также весьма простой– все сводится к классической теореме Фробениуса и тоже доказываемой очень легко)

Пример доказательства последней: необходимым условием существования локально голоморфного решения сразу двух скалярных ОДУ

$$y'_t = f(t, s, y), \tag{a}$$

$$y'_s = g(t, s, y) \tag{b}$$

является равенство

$$\frac{df(t, s, y)}{ds} = \frac{dg(t, s, y)}{dt} =$$

$$f'_s(t, s, y) + f'_y(t, s, y)g(t, s, y) = g'_t(t, s, y) + g'_y(t, s, y)f(t, s, y). \tag{c}$$

Равенство (c) является и достаточным условием существования такого решения. В самом деле, рассмотрим задачу Коши для ОДУ (a) с начальным условием

$$y(t_0, s) = a(s), \tag{d}$$

в свою очередь, являющимся решением ОДУ

$$a'_s = g(t_0, s, a). \tag{e}$$

Тогда для решение начальной задачи (a), (d) в силу (c).

$$y''_{ts} = y''_{st} = f'_s(t,s,y) + f'_y(t,s,y)y'_s =$$
$$= g'_t(t,s,y) + g'_y(t,s,y)f(t,s,y) - f'_y(t,s,y)g(t,s,y) + f'_y(t,s,y)y'_s =$$
$$= \frac{dg(t,s,y)}{dt} + f'_y(t,s,y)(y'_s - g(t,s,y)).$$

И, стало быть, $Y = y'_s - g(t,s,y)$ есть решение линейного ОДУ первого порядка $Y'_t = f'_y(t,s,y)Y$, которое в силу (d) и (e) удовлетворяет начальному уловию $Y(t_0) = 0$. Поэтому $Y \equiv 0$, и, значит, справедливо (b).

Для систем уравнений $(i = 1, ..., n)$

$$(y^i)'_t = f^i(t,s,y_1,\dots,y_n)$$
$$(y^i)'_s = g^i(t,s,y_1,\dots,y_n)$$

соответствующее необходимое и достаточное условие существования доказывается mutatis mutandis –просто вместо скалярного линейного ОДУ будут фигурировать системы линейных ОДУ на вектора, удовлетворяющие нулевому начальному условию. Вот и вся вам теорема Фробениуса в данном случае.

Давно (B. Fuchssteiner, W. Oevel, J. Math. Phys., 23:3 (1982), 358–363.) известно существование у уравнения Савады–Котеры бесконечной серии коммутирующих с ней симметрий вида (D– оператор полного дифференцирования по x)

$$u_{t_n} = D(J_{n+1}) = (D^3 - 6uD)L_n \qquad \text{(sSK)}$$

где

$$J_{-1} = -1/6, \qquad J_0 = u, \qquad J_2 = u_4 - 30uu_2 + 60u^3,$$

$$J_3 = u_6 - 42(uu_4 + u_1u_3 + u_2^2) + 252(2u^2u_2 + uu_1^2 - 2u^4), \dots \qquad \text{(efsSK)}$$

,

$$L_{-1} = -1/12, \qquad L_1 = u_2 - 3u^2, \qquad L_2 = u_4 - 18uu_2 - 9u1^2 + 24u^3, \dots \qquad \text{(efsSK)}$$

а также 2 серии его инвариантных многообразий, опредеяемых ОДУ $J_n = 0$ и $L_n = 0$.

Ю.Ю. Багдерина: имеется еще одна счетная серия инвариантых многообразий, определяемых ОДУ $U_j = 0$, где

$$U_j = D^2J_j - 6uJ_j \qquad \text{(efsSK).}$$

Здесь

$$U_0 = u, \qquad U_2 = u_2 - 6u^2,$$

$$U_3 = u_6 - 6(6uu_4 + 10u_1u_3 + 5u_2^2) + 360(u^2u_2 + uu_1^2 - u^4), \ldots$$

Легко проверить, что у уравнения Савады– Котеры существует также классическая симметрия растяжения

$$u_\tau = 5tu_t + xu_x + 2u = 5t(u_5 - 30uu_3 - 30u_1u_2 + 180u^2u_1) + xu_x + 2u \tag{skai}$$

Стационарная часть этой симметрии имеет вид

$$J_x = 0$$

с НЕЛОКАЛЬНОЙ

$$J = 5t(u_4 - 30uu_2 + 60u^3) + xu + v, \qquad v_x = u$$

Проверено, что подстановка этого J в формулу Багдериной дает систему ОДУ, задающую инвариантное многообразие эволюционной системы 2 уравнений, состоящей из уравнения Савады– Котеры и его проинтегрированному по форме

$$v_t = u_4 - 30uu_2 + 60u^3.$$

Отсюда и из результата А.В. Домрина (сообщение от начала декабря 2020г) о свойстве глобальной мероморфности локально голоморфных решений уравнений Савады-Котеры следует, что при $t \neq 0$ решения начальных задач для систем ОДУ типа Пенлеве

$$u_4 - 30uu_2 + 60u^3 + (xu + v)/(5t) = 0, \qquad v_x = u$$

мероморфны. (Нетрудно от этого уравнения перейти к скалярному ОДУ пятого порядка на u)