Параметрическая неустойчивость колебаний вихревого кольца в z-периодическом бозе-конденсате и возврат к исходному состоянию

В.П. Рубан

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике,
Москва, 18-19 декабря 2017 г.

В.П. Рубан, Письма в ЖЭТФ 106(4), 208-213 (2017).

1. Введение

Динамика квантовой вихревой нити в неоднородном бозе-конденсате (в режиме Томаса-Ферми) приближенно описывается уравнением локальной индукции,

$$\vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{t}}\big|_{\mathrm{norm}} = \frac{\Gamma\Lambda}{4\pi}\Big(\varkappa\vec{\mathrm{b}} + [\vec{\nabla}\ln\rho(\vec{\mathrm{R}})\times\vec{\tau}]\Big). \tag{1}$$

$\vec{\mathrm{R}}(\beta, \mathrm{t})$ — геометрическая форма нити,
$\rho(\vec{\mathrm{r}})$ — равновесный профиль плотности конденсата в отсутствие вихря,
$\Gamma = 2\pi\hbar/\mathrm{m}_{\mathrm{atom}}$ — квант циркуляции скорости,
$\Lambda = \ln(\mathrm{R}_*/\xi) \approx \mathrm{const}$ — большой логарифм,
$\varkappa$ — локальная кривизна нити,
$\vec{\mathrm{b}}$ — единичный вектор бинормали,
$\vec{\tau}$ — единичный касательный вектор.
Мы будем использовать безразмерные единицы: $\Gamma\Lambda/4\pi = 1$, $\mathrm{R}_* \sim 1$.

В работе исследуется динамика вихревого кольца на фоне z-периодической плотности

$$\rho(\mathrm{z}) = 1 - \epsilon\cos\mathrm{z}. \tag{2}$$

2. Вариационная структура уравнений

Уравнения движения для $\mathrm{R}(\varphi, \mathrm{t})$ и $\mathrm{Z}(\varphi, \mathrm{t})$ в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})\mathrm{R}\dot{\mathrm{Z}} &= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})\mathrm{R}'}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2+\mathrm{Z}'^2}} \\
&\quad+\frac{\partial\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})}{\partial\mathrm{R}}\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2+\mathrm{Z}'^2}+\frac{\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2+\mathrm{Z}'^2}}, \qquad (3)\\
-\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})\mathrm{R}\dot{\mathrm{R}} &= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})\mathrm{Z}'}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2+\mathrm{Z}'^2}}+\frac{\partial\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})}{\partial\mathrm{Z}}\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2+\mathrm{Z}'^2}, \qquad (4)
\end{aligned}$$

Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}=\int\mathrm{F}(\mathrm{Z},\mathrm{R})\dot{\mathrm{Z}}\mathrm{d}\varphi-\int\rho(\mathrm{Z},\mathrm{R})\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}'^2+\mathrm{Z}'^2}\mathrm{d}\varphi. \qquad (5)$$

причем для $\rho(\mathrm{z},\mathrm{r})=\mathrm{f}(\mathrm{z},\mathrm{r}^2/2)$ функция $\mathrm{F}(\mathrm{Z},\mathrm{R})$ определяется формулой

$$\mathrm{F}(\mathrm{Z},\mathrm{R})=\int_{\mathrm{U}(\mathrm{Z})}^{\mathrm{R}^2/2}\mathrm{f}(\mathrm{Z},\mathrm{u})\mathrm{du}, \qquad (6)$$

В частности, для $\rho=\rho(\mathrm{z})$ получаем $\mathrm{F}=\rho(\mathrm{Z})\mathrm{R}^2/2$, а для конденсата в гармонической ловушке удобно взять $\mathrm{F}=-(1-\mathrm{R}^2-\alpha\mathrm{Z}^2)^2/4=-\rho_{\mathrm{h}}^2/4$.

3. Параметрическая неустойчивость

Невозмущенному движению идеально круглого кольца вдоль оси z соответствуют решения вида $R = R_0(t)$ и $Z = Z_0(t)$, причем

$$\dot{Z}_0 = 1/R_0, \qquad \dot{R}_0 = -\rho'(Z_0)/\rho(Z_0). \tag{7}$$

Рассмотрим динамику малых отклонений от идеальной формы, положив

$$\begin{aligned} R &= R_0(t) + \sum_{m\geq 1}\Big[R_m e^{im\varphi} + R_m^* e^{-im\varphi}\Big], && (8)\\ Z &= Z_0(t) + \sum_{m\geq 1}\Big[Z_m e^{im\varphi} + Z_m^* e^{-im\varphi}\Big], && (9) \end{aligned}$$

где $R_m(t)$ и $Z_m(t)$ — малые комплексные коэффициенты Фурье. Линеаризованная система для них следует из уравнений (3) и (4). С учетом соотношения $d/dt = (1/R_0)d/dZ_0$ и наличия интеграла $R_0\rho(Z_0) = E$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ_0}Z_m &= \frac{\rho(Z_0)}{E}[m^2-1]R_m, && (10)\\ -\frac{d}{dZ_0}R_m &= \frac{\rho(Z_0)}{E}\Big[m^2 + \frac{E^2}{\rho^2(Z_0)}\Big(\frac{\rho'(Z_0)}{\rho(Z_0)}\Big)'\Big]Z_m. && (11) \end{aligned}$$

Вместо $\mathrm{Z_0}$ вводим новую независимую переменную согласно соотношению $\rho(\mathrm{Z_0})\mathrm{dZ_0} = \mathrm{d}\mu$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dZ_m}}{\mathrm{d}\mu} &= \frac{1}{\mathrm{E}}[\mathrm{m}^2 - 1]\mathrm{R_m}, \qquad (12) \\ -\frac{\mathrm{dR_m}}{\mathrm{d}\mu} &= \frac{1}{\mathrm{E}}\Big[\mathrm{m}^2 + \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{f}(\mu)}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{f}(\mu)}{\mathrm{d}\mu^2}\Big]\mathrm{Z_m}, \qquad (13) \end{aligned}$$

где функция $\mathrm{f}(\mu) = \rho(\mathrm{Z_0}(\mu))$ [2π-периодическая зависимость]. После приведения к одному уравнению мы получаем уравнение типа Хилла,

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Z_m}}{\mathrm{d}\mu^2} + \Big[\frac{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}^2 - 1)}{\mathrm{E}^2} + (\mathrm{m}^2 - 1)\frac{\mathrm{f}''(\mu)}{\mathrm{f}(\mu)}\Big]\mathrm{Z_m} = 0, \qquad (14)$$

Отсюда следуют условия параметрического резонанса порядка $\mathrm{p} = 1, 2, \ldots$ в виде $\mathrm{E} \approx \mathrm{E}_\mathrm{m}^{(\mathrm{p})} = 2\mathrm{m}\sqrt{\mathrm{m}^2 - 1}/\mathrm{p}$. Мы сосредоточимся в основном на случае $\mathrm{m} = 2$, $\mathrm{p} = 1$. Заметим, что при $\epsilon \ll 1$ мы имеем приближенно $\mathrm{f}''(\mu)/\mathrm{f}(\mu) \approx \epsilon\cos\mu$, т.е. уравнение Хилла принимает вид уравнения Матье. При этом глубина модуляции коэффициента в уравнении (14) оказывается равной 12ϵ. Пространственный инкремент неустойчивости при точном резонансе $\gamma^{(\mathrm{z})} \approx (3/2)\epsilon$. Это соответствует росту амплитуды за один период модуляции плотности в $\exp(3\pi\epsilon)$ раз.

4. Численное моделирование

Чтобы исследовать нелинейную стадию развития параметрической неустойчивости, решения системы (3)-(4) при $\rho = 1 - \epsilon\cos\mathrm{z}$ с различными начальными условиями находились численно псевдоспектральным методом с использованием процедуры Рунге-Кутта 4-го порядка для продвижения по времени. Динамику резонансных мод удобно представлять в терминах "медленных" комплекснозначных функций

$$\mathrm{A_c} = +2[\mathrm{Re}(\mathrm{R}_2) - \mathrm{i}(2/\sqrt{3})\mathrm{Re}(\mathrm{Z}_2)]\exp(\mathrm{i}\mathrm{Z}_0/2), \quad (15)$$

$$\mathrm{A_s} = -2[\mathrm{Im}(\mathrm{R}_2) - \mathrm{i}(2/\sqrt{3})\mathrm{Im}(\mathrm{Z}_2)]\exp(\mathrm{i}\mathrm{Z}_0/2). \quad (16)$$

Отметим, что $\mathrm{A_c}$ и $\mathrm{A_s}$ являются комплексными огибающими амплитуд стоячих мод $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$ соответственно, тогда как $\mathrm{A}_\pm = (\mathrm{A_c} \mp \mathrm{i}\mathrm{A_s})/2$ соответствуют разложению эллиптических возмущений вихревого кольца по бегущим модам $\exp(\pm 2\mathrm{i}\varphi)$.

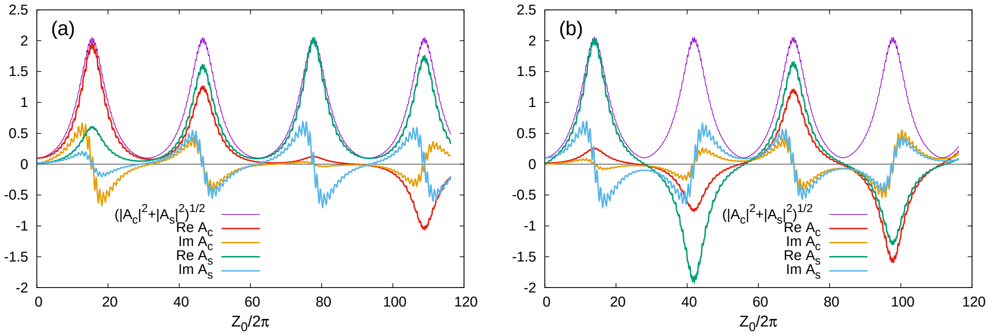

Рис.: Рис.1. Два примера развития параметрической неустойчивости вихревого кольца и его возврата к слабовозбужденному состоянию при $\epsilon = 0.03$. Остаточные осцилляции на кривых вызваны присутствием старших гармоник, что типично для параметрически неустойчивых колебаний. Начальные условия в случае (a): $\mathrm{R}(0) = 4\sqrt{3} + 0.10\cos(2\varphi)$, $\mathrm{Z}(0) = -0.02(\sqrt{3}/2)\sin(2\varphi)$, что соответствует $\mathrm{A_c}(0) = 0.10$, $\mathrm{A_s}(0) = 0.02\mathrm{i}$; в случае (b): $\mathrm{R}(0) = 4\sqrt{3} + 0.02\cos(2\varphi)$, $\mathrm{Z}(0) = -0.10(\sqrt{3}/2)\sin(2\varphi)$, что соответствует $\mathrm{A_c}(0) = 0.02$, $\mathrm{A_s}(0) = 0.10\mathrm{i}$.

На Рис.1 видны периодические синхронные возвраты системы к слабо возбужденному состоянию, чередующиеся с сильно деформированными конфигурациями кольца, причем последние отличаются между собой угловой ориентацией в плоскости (x, y). Периодичны не каждая огибающая по отдельности, а их комбинация $\sqrt{|\mathrm{A_c}|^2 + |\mathrm{A_s}|^2}$, не зависящая от отсчета угла. Только при увеличении параметра ϵ до значений $\epsilon \sim 0.1$ регулярное поведение портится (на рисунках не показано).
Такая возвратная динамика типична для автономных интегрируемых систем с небольшим числом степеней свободы. Поэтому имеет смысл вывести упрощенную модель, позволяющую на полуколичественном уровне воспроизвести наблюдаемые в численном эксперименте зависимости.
Требуемые уравнения для медленных переменных можно получить путем усреднения лагранжиана системы по (малым) осцилляциям плотности.

5. Объяснение явления возврата

Не останавливаясь на подробностях, приведем эффективный лагранжиан:

$$\begin{aligned} L \;\approx\; & S_0\dot{\chi}_0 + i\dot{b}_+ b_+^* + i\dot{b}_- b_-^* + \frac{\dot{\chi}_0}{2}(|b_+|^2 + |b_-|^2) \\ & -\sqrt{2S_0} - \frac{|m|\sqrt{m^2-1}}{2S_0}(|b_+|^2 + |b_-|^2) + \epsilon\frac{\sqrt{m^2-1}}{4|m|}(b_+b_- + b_+^* b_-^*) \\ & -T(|b_+|^4 + |b_-|^4) - W|b_+|^2|b_-|^2, \end{aligned} \tag{17}$$

где $S_0 = [R^2\rho^2(Z)/2]_0$, $\chi_0 = [\int^Z dz/\rho(z)]_0$, $b_\pm(t) = b_{\pm m}\exp(i\chi_0/2)$ — огибающие нормальных комплексных переменных ($m = 2$). Здесь мы имеем интегрируемую гамильтонову систему с тремя степенями свободы. Очевидными интегралами движения, помимо самого гамильтониана, являются

$$S_0 + \frac{1}{2}(|b_+|^2 + |b_-|^2) = I \;=\; \text{const}, \tag{18}$$

$$|b_+|^2 - |b_-|^2 = D \;=\; \text{const}. \tag{19}$$

Интеграл D выражает сохранение углового момента относительно оси z.

Исключая S_0, получаем эффективный гамильтониан возмущений в виде

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \sqrt{2I - |b_+|^2 - |b_-|^2} + \frac{m\sqrt{m^2-1}(|b_+|^2 + |b_-|^2)}{(2I - |b_+|^2 - |b_-|^2)} \\ &- \epsilon\frac{\sqrt{m^2-1}}{4m}(b_+b_- + b_+^*b_-^*) + T(|b_+|^4 + |b_-|^4) + W|b_+|^2|b_-|^2. \qquad (20)\end{aligned}$$

Условие резонанаса — обращение в ноль коэффициента разложения при $(|b_+|^2 + |b_-|^2)$. С учетом (19) выражение (20) сводится к

$$\begin{aligned}\tilde{H}(N,\Phi) &= \sqrt{2I - N} + \frac{m\sqrt{m^2-1}N}{(2I-N)} - \epsilon\frac{\sqrt{m^2-1}}{4m}\sqrt{N^2 - D^2}\cos(2\Phi) \\ &+ (T/2)(N^2 + D^2) + (W/4)(N^2 - D^2) \qquad (21)\end{aligned}$$

в терминах канонически сопряженных переменных $N = |b_+|^2 + |b_-|^2$ и $\Phi = [\arg(b_+) + \arg(b_-)]/2$. Явление возврата при этом соответствует квазизамкнутым фазовым траекториям в комплексной плоскости переменной $C = \sqrt{(|A_+|^2 + |A_-|^2)/2}(A_+A_-)/|A_+A_-|$, как показано на Рис.2.

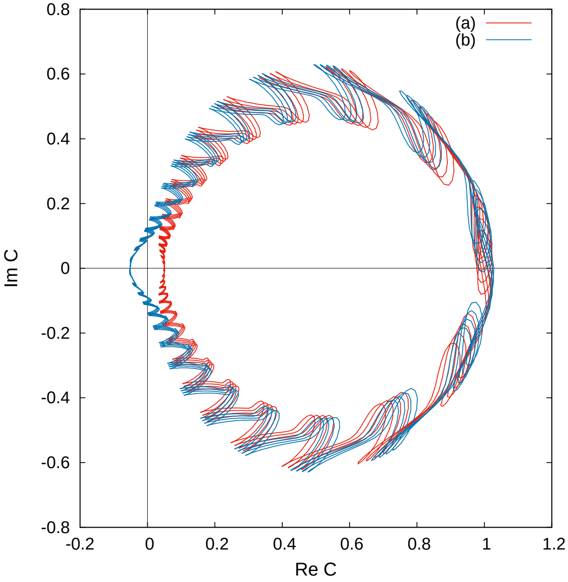

Рис.: Рис.2. Квазизамкнутые фазовые траектории в плоскости C, соответствующие двум численным экспериментам, показанным на рисунке 1.

6. Сравнение с вихревым кольцом в гармонической ловушке

Сравним полученные результаты с параметрическими неустойчивостями вихревого кольца на фоне плотности $\rho_{\mathrm{h}}(\mathrm{z},\mathrm{r}) = 1 - \mathrm{r}^2 - \alpha \mathrm{z}^2$, который характерен для гармонически захваченных бозе-конденсатов в режиме Томаса-Ферми. Фазовая траектория идеального кольца охватывает при этом точку $\mathrm{R}_* = 1/\sqrt{3}$, $\mathrm{Z}_* = 0$, а квадраты собственных частот малых колебаний даются выражением

$$\omega_{\mathrm{m}}^2 = 9(\mathrm{m}^2 - 3)(\mathrm{m}^2 - \alpha). \tag{22}$$

Отсюда следует, что в диапазоне $1 < \alpha < 4$ все моды линейно устойчивы. Весьма важно при этом, что в квадратичном гамильтониане

$$\mathcal{H}^{\{2\}} = \sum_{\mathrm{m}} \omega_{\mathrm{m}} |\mathrm{a}_{\mathrm{m}}|^2 \tag{23}$$

две первые частоты ω_0 и ω_1 имеют отрицательный знак, тогда как при $|\mathrm{m}| \geq 2$ все ω_{m} положительны. Поэтому при определенных значениях параметра анизотропии α возникают нелинейные резонанасы между некоторыми модами, приводящие к параметрическим неустойчивостям.

Например, при условии $\omega_0 \approx 2\omega_1$, имеющем место вблизи $\alpha^{(1)} = 8/5$, происходят нелинейные резонансные процессы, описываемые взаимодействием вида $\mathrm{V}^{(1)}(\mathrm{a}_0^*\mathrm{a}_1\mathrm{a}_{-1} + \mathrm{a}_0\mathrm{a}_1^*\mathrm{a}_{-1}^*)$, а при $\alpha \approx \alpha^{(2)} = 16/7$, когда $\omega_0 \approx -2\omega_2$, резонансными оказываются процессы, соответствующие взаимодействию $\mathrm{V}^{(2)}(\mathrm{a}_0\mathrm{a}_2\mathrm{a}_{-2} + \mathrm{a}_0^*\mathrm{a}_2^*\mathrm{a}_{-2}^*)$. В обеих ситуациях слабонелинейная динамика приблизительно описывается интегрируемыми гамильтонианами стандартного вида:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)} \;&=\; (\delta^{(1)} - 2\Omega^{(1)})|\mathrm{a}_0|^2 - \Omega^{(1)}(|\mathrm{a}_1|^2 + |\mathrm{a}_{-1}|^2)\\ &\quad+\mathrm{V}^{(1)}(\mathrm{a}_0^*\mathrm{a}_1\mathrm{a}_{-1} + \mathrm{a}_0\mathrm{a}_1^*\mathrm{a}_{-1}^*),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(2)} \;&=\; (\delta^{(2)} - 2\Omega^{(2)})|\mathrm{a}_0|^2 + \Omega^{(2)}(|\mathrm{a}_2|^2 + |\mathrm{a}_{-2}|^2)\\ &\quad+\mathrm{V}^{(2)}(\mathrm{a}_0\mathrm{a}_2\mathrm{a}_{-2} + \mathrm{a}_0^*\mathrm{a}_2^*\mathrm{a}_{-2}^*),\end{aligned} \tag{25}$$

где $\delta^{(1)}$ и $\delta^{(2)}$ — малые параметры рассогласования частот, а коэффициенты $\mathrm{V}^{(1)}$ и $\mathrm{V}^{(2)}$ могут быть вычислены путем переписывания $\mathcal{H}^{\{3\}}$ в терминах a_m.

В первом случае имеются дополнительные интегралы движения $|\mathrm{a}_0|^2 + |\mathrm{a}_1|^2 = \mathrm{s}_+$ и $|\mathrm{a}_0|^2 + |\mathrm{a}_{-1}|^2 = \mathrm{s}_-$, так что система остается в слабонелинейном режиме и происходит периодический квази-возврат кольца к почти осесимметричному исходному состоянию, как показано на рисунке 3a.

Во втором случае дополнительные законы сохранения имеют вид $|\mathrm{a}_0|^2 - |\mathrm{a}_2|^2 = \mathrm{d}_+$ и $|\mathrm{a}_0|^2 - |\mathrm{a}_{-2}|^2 = \mathrm{d}_-$, а параметрическая неустойчивость при $\mathrm{d}_+ > 0$, $\mathrm{d}_- > 0$ носит взрывной характер, как видно из рисунка 3b.

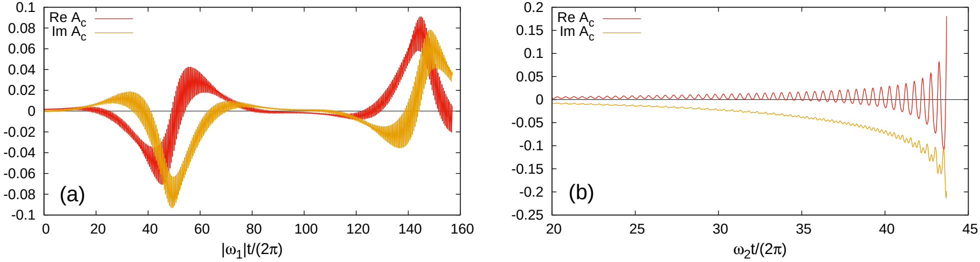

Рис.: Рис.3. Два типа нелинейной стадии параметрической неустойчивости вихревого кольца в конденсате с плотностью $\rho = 1 - \mathrm{r}^2 - \alpha \mathrm{z}^2$, наблюдаемые в численных экспериментах. Показаны соответствующим образом определенные огибающие неустойчивых мод. Осцилляции кривых обусловлены старшими гармониками. В первом случае $\alpha = 8/5$, $\mathrm{R}(0) = 0.88/\sqrt{3} + 0.002\cos(\varphi)$, $\mathrm{Z}(0) = 0$. Во втором случае $\alpha = 16/7$, $\mathrm{R}(0) = 0.95/\sqrt{3} + 0.002\cos(2\varphi)$, $\mathrm{Z}(0) = 0$.

7. Заключение

Таким образом, в данной работе впервые предсказаны параметрические неустойчивости колебаний квантового вихревого кольца в пространственно периодическом бозе-конденсате при определенных размерах кольца, а также в конденсате, захваченном гармонической анизотропной ловушкой, — при определенных значениях параметра анизотропии. Во всех случаях численно промоделированы нелинейные стадии неустойчивости. Обнаруженному при этом явлению квази-возврата дано теоретическое объяснение. Такого рода нетривиальное поведение вихревого кольца заслуживает дальнейших исследований в рамках более точных моделей. В частности, весьма желательно воспроизвести параметрическую неустойчивость при не слишком больших Λ непосредственно в численном решении трехмерного уравнения Гросса-Питаевского с периодическим внешним потенциалом, а также и с анизотропным гармоническим потенциалом.