

Статистика интенсивности случайного сигнала при распространении в оптоволокне в слабонелинейном режиме

С.С. Вергелес

Институт теоретической физики им. Л.Д Ландау

Л.Л. Огородников

Сколтех

XXVI Научной сессии Совета РАН по нелинейной динамике

План доклада

- Постановка задачи: эволюционное уравнение, начальная статистика
- Обзор: эволюция спектра и статистики
 - Теоретические результаты для нелинейного уравнения Шредингера
 - Результаты для обобщённого НУШ с нарушенной интегрируемостью
- Расчёты по теории возмущений для статистики излучения
- Обсуждение

Постановка задачи: эволюционное уравнение, начальная статистика

$$(\partial_z - g)\psi = i\frac{\beta}{2}\partial_t^2\psi - i\gamma|\psi|^2\psi + \xi$$

Интенсивность $I = |\psi|^2$,

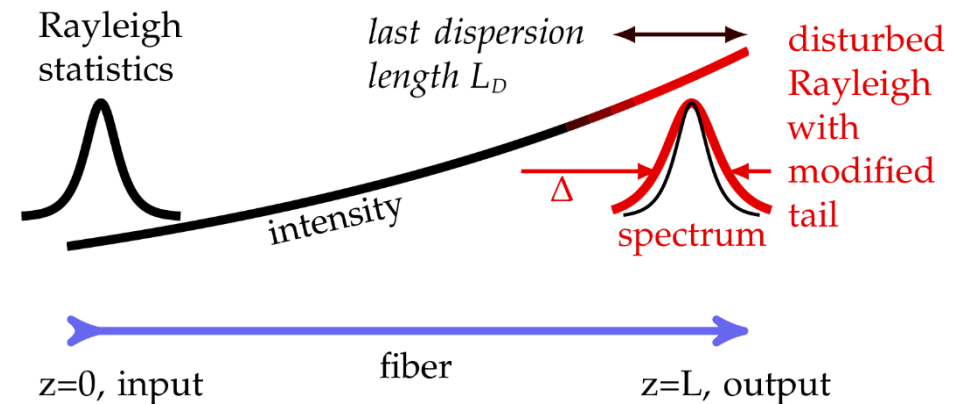
Корреляционная функция (спектр)

$$F(z, t) = \langle \psi(z, t + t')\psi^*(t) \rangle_{t'}$$

Спектральная ширина Δ

$$\Delta^2 = \frac{1}{\langle I \rangle} \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \omega^2$$

Средняя интенсивность $\gamma I \ll \beta \Delta^2$



- Влияние нелинейности слабое по сравнению с хроматической дисперсией
- Статистика на входе – гауссова (Релея)

Обзор: эволюция спектра и статистики для нелинейного уравнения Шредингера

1

Agafontsev, D. S., & Zakharov, V. E. (2015).
Integrable turbulence and formation of rogue waves.
Nonlinearity, 28(8), 2791.

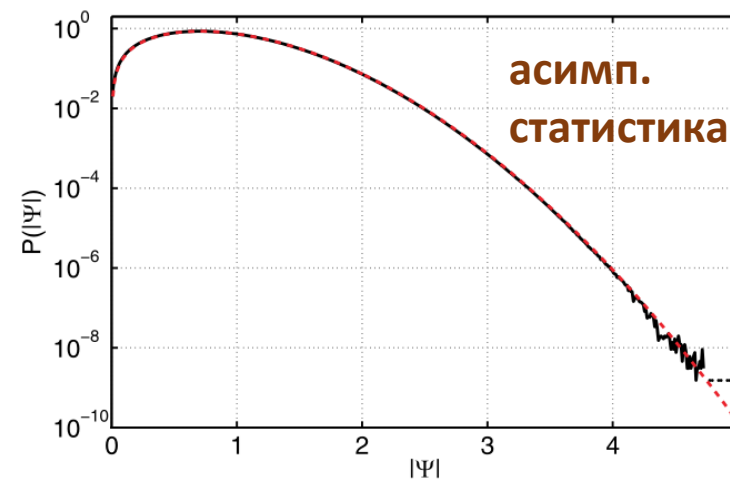
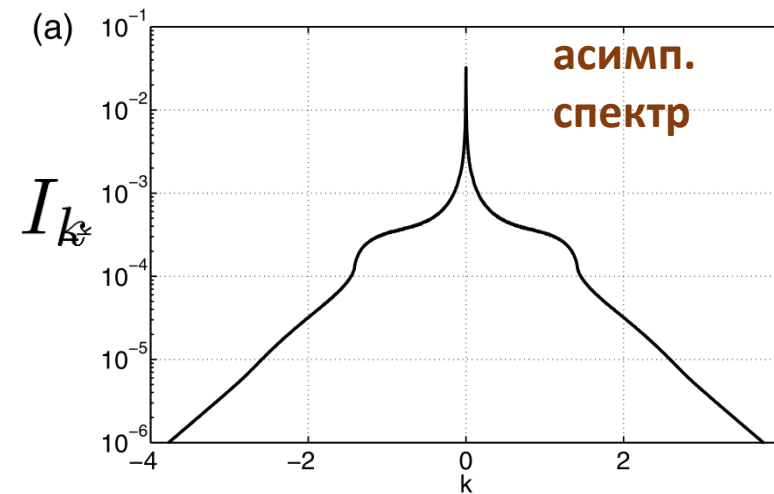
$$i\Psi_t - \Psi + \Psi_{xx} + |\Psi|^2\Psi = 0.$$

Начальные условия

$$\Psi|_{t=0} = 1 + \epsilon(x), \quad |\epsilon(x)| \ll 1$$

Нелинейность порядка единицы

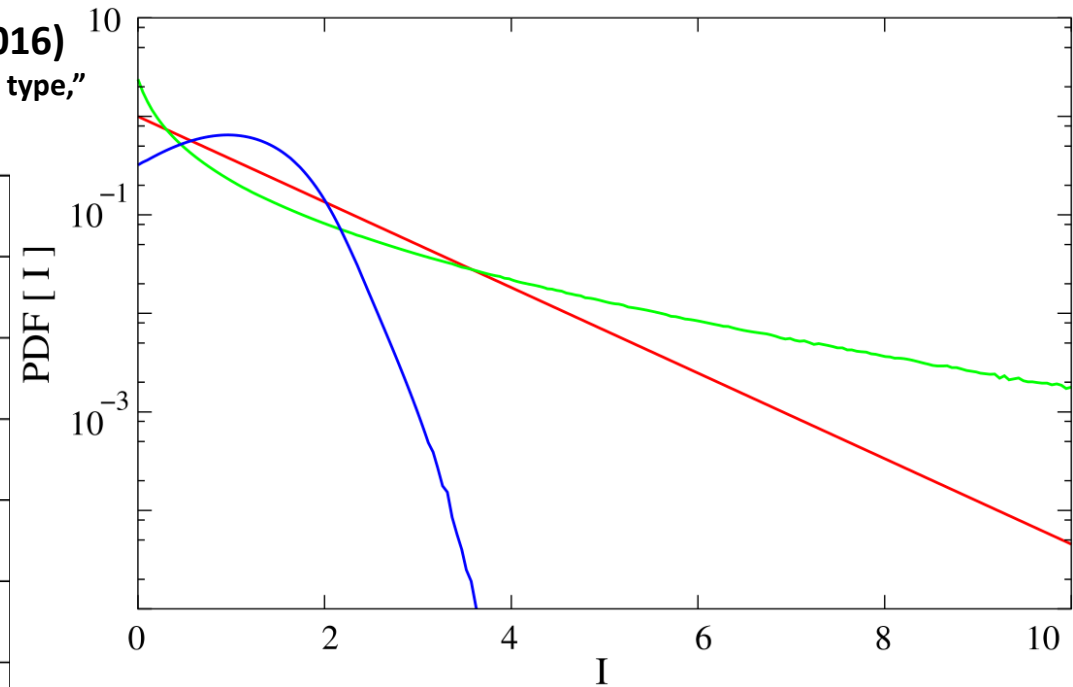
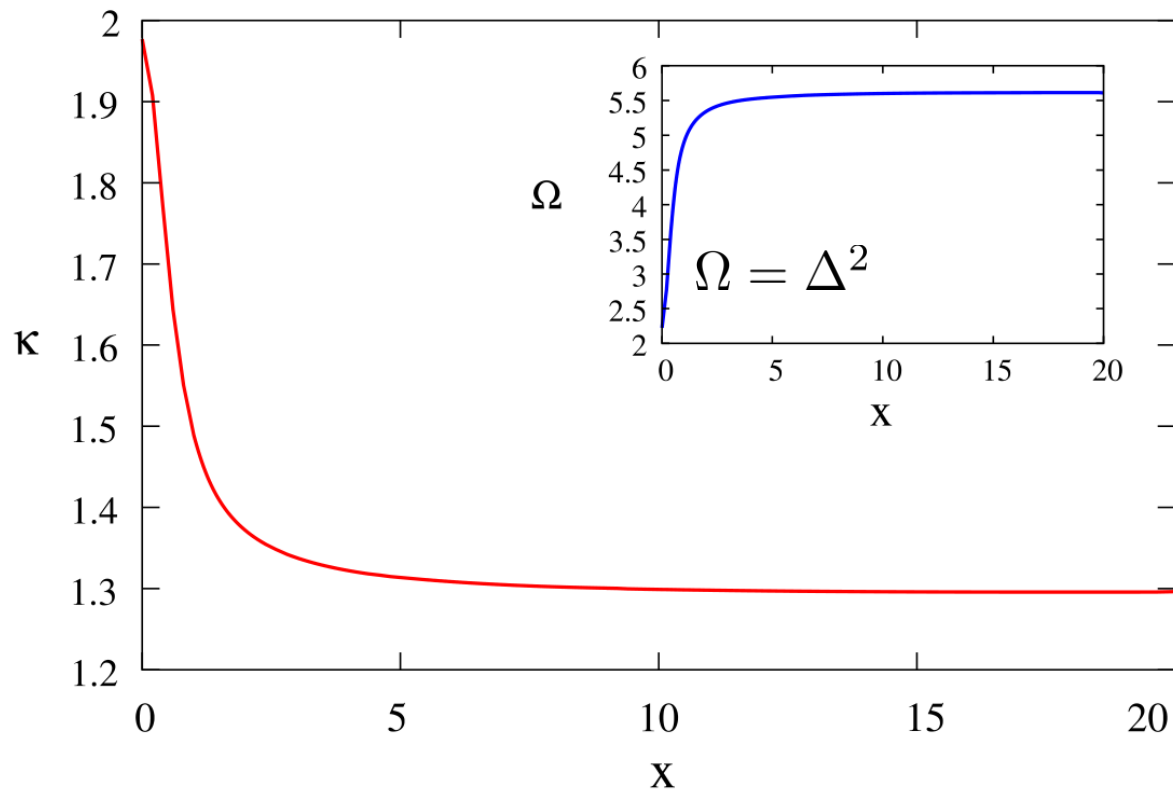
$$P_R(|\Psi|) = \frac{2|\Psi|}{\sigma^2} e^{-|\Psi|^2/\sigma^2}$$



Обзор: эволюция спектра и статистики для нелинейного уравнения Шредингера

2

M. Onorato, D. Proment, G. El, S. Randoux, and P. Suret, (2016)
"On the origin of heavy-tail statistics in equations of the nonlinear schrödinger type,"
Physics Letters A 380, 3173–3177



$$\kappa = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2}$$

Обзор: эволюция спектра и статистики для нелинейного уравнения Шредингера

3

Общие свойства динамики:

- **Существование асимптотического статистически стационарного состояния, после протекания промежуточной динамики**
- **В частности, стабилизируется ширина спектра сигнала.**

S. K. Turitsyn, A. E. Bednyakova, M. P. Fedoruk, S. B. Papernyi, and W. R. Clements, (2015)
“Inverse four-wave mixing and self-parametric amplification in optical fibre,” Nature photonics 9, 608–614

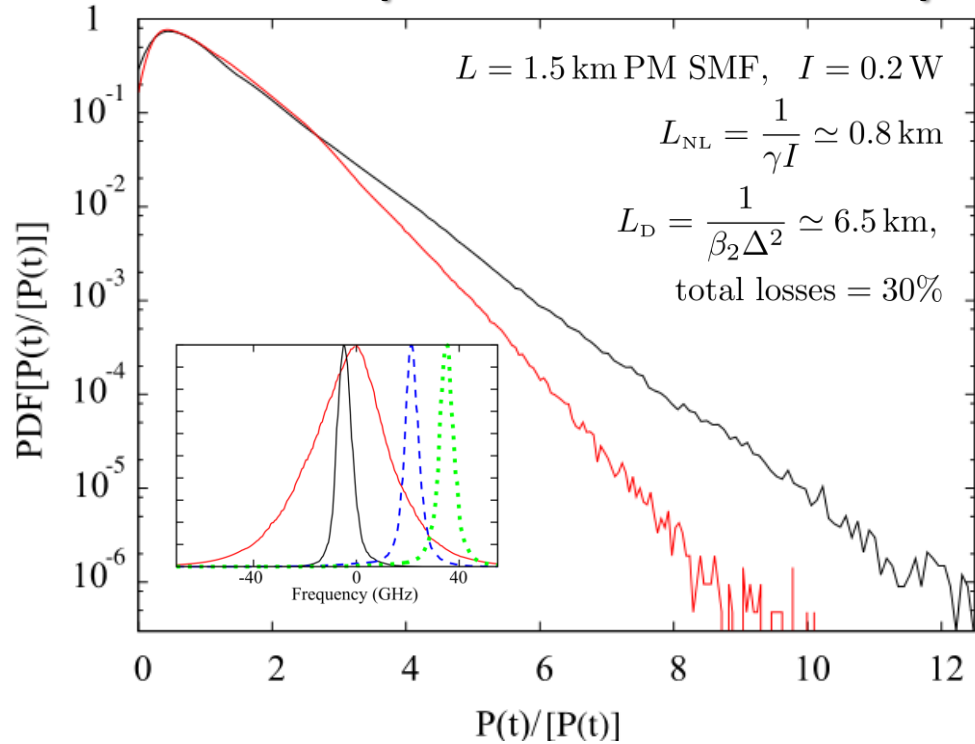
Diminishing of spectrum width for initial two-peaked spectrum

- **Статистика интенсивности по-видимому стремится к распределению Релея**

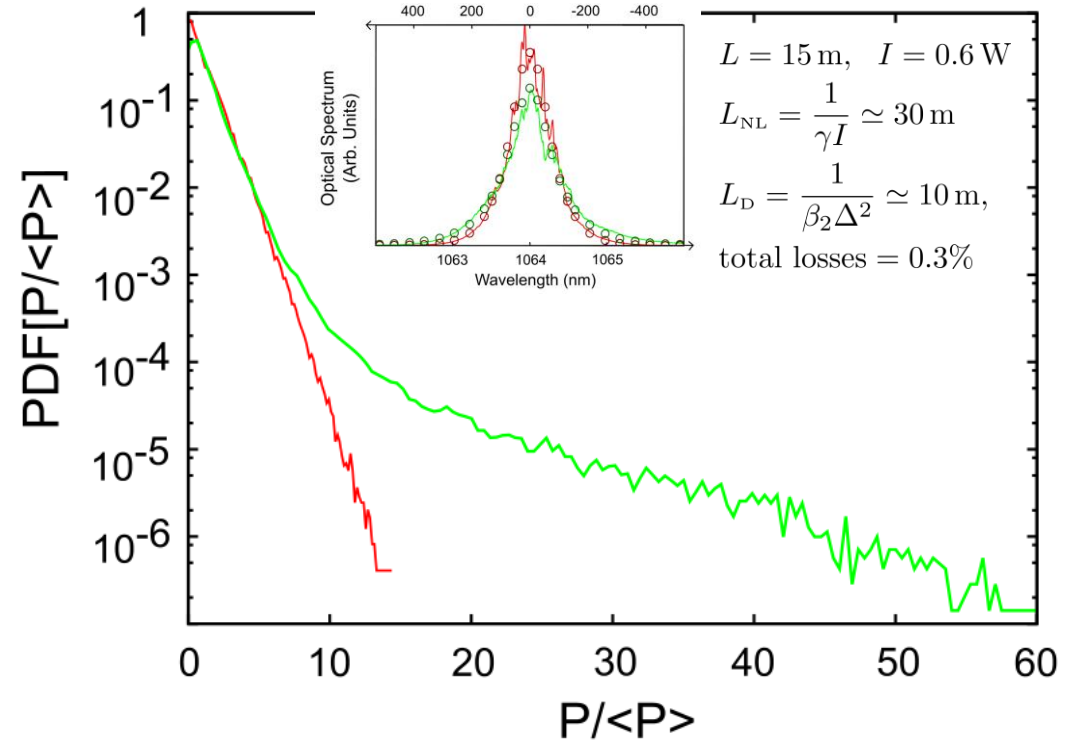
A.A. Gelash, D.S. Agafontsev. 2017

Statistic of strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves. SCT-2017, May 25

Экспериментальные результаты



Randoux, S., Walczak, P., Onorato, M., & Suret, P. (2014).
 Intermittency in integrable turbulence.
Physical review letters, 113(11), 113902.



Walczak, P., Randoux, S., & Suret, P. (2015).
 Optical rogue waves in integrable turbulence.
Physical review letters, 114(14), 143903.

Onorato, M., Proment, D., El, G., Randoux, S., & Suret, P. (2016).
 On the origin of heavy-tail statistics in equations of
 the Nonlinear Schrödinger type.
Physics Letters A, 380(39), 3173-3177.

$$\frac{\langle |\psi|^4 \rangle}{\langle |\psi^2| \rangle^2} - \frac{\langle |\psi|^4 \rangle}{\langle |\psi^2| \rangle^2} \Big|_0 = \pm \frac{\beta}{\langle I \rangle} \left(\frac{\langle |\partial_x \psi|^2 \rangle}{\langle |\psi^2| \rangle} - \frac{\langle |\partial_x \psi|^2 \rangle}{\langle |\psi^2| \rangle} \Big|_0 \right)$$

Случайный оптоволоконный ВКР-лазер: нарушение интегрируемости накачкой

Малая амплитуда слабая накачка
(сильная дисперсия)

$$\frac{\gamma I}{\beta \Delta^2} \ll 1, \quad \frac{g}{\beta \Delta^2} \ll 1$$

Автомодельное решение

$$F(\omega) = C\phi(\omega/\Delta)$$

Кинетического уравнения, записанного в терминах беленса между уширением и сужением спектра

$$(x^2 - 1)\phi = \int \frac{dx_2 dx_3}{(4\pi)^2} \frac{\phi\phi_2\phi_3 + \phi_1\phi_2\phi_3 - \phi\phi_1\phi_2 - \phi\phi_1\phi_3}{(x - x_2)^2(x - x_3)^2},$$

$$\phi = \phi(x), \phi_i = \phi(x_i), x_1 = x_2 + x_3 - x.$$

D.V. Churkin, I.V. Kolokolov, E.V. Podivilov, I.D. Vatnik, M.A. Nikulin, S.S. Vergeles, I.S. Terekhov, V.V. Lebedev, G. Falkovich, S.A. Babin and S.K. Turitsyn, (2015)

“Wave kinetics of random fibre lasers”, Nature Communications, vol. 6, p. 6214

Kolokolov, I., Lebedev, V., Podivilov, E., & Vergeles, S. (2014).

Theory of a random fiber laser.

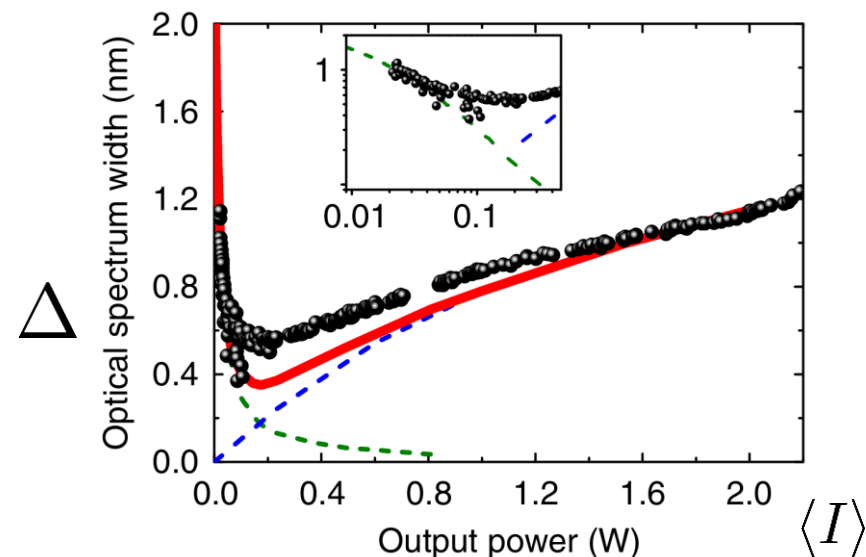
Journal of Experimental & Theoretical Physics, 119(6).

$$g(\omega) = g_0 - a\omega^2$$

$$A = \int_0^L dz a P$$

Зависимость ширины спектра от интенсивности

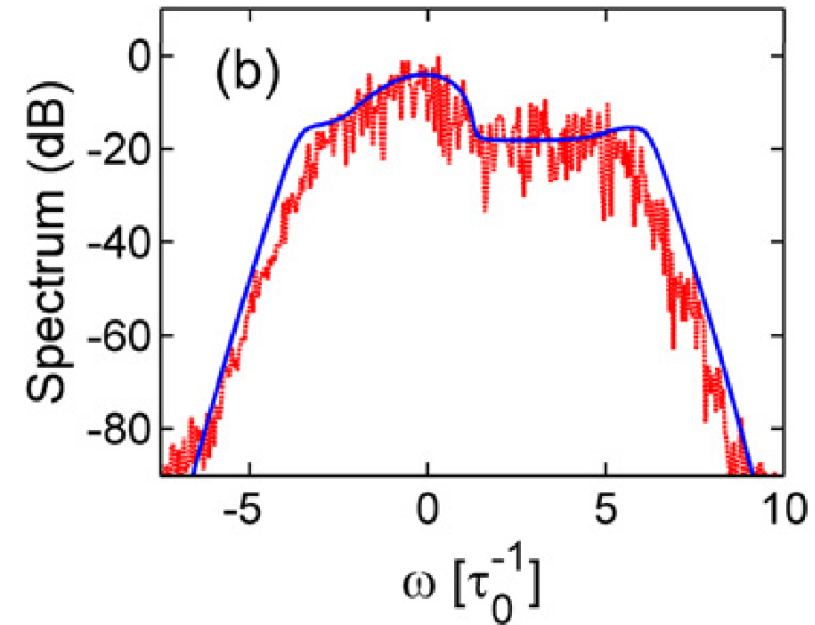
$$I \sim \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{A} \Delta^3$$



Нарушение интегрируемости третьей дисперсией

B. Kibler, K. Hammani, C. Michel, C. Finot, and A. Picozzi, (2011).
"Rogue waves, rational solitons and wave turbulence theory," *Physics Letters A* 375,
3149–3155

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + i\sigma \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - |u|^2 u$$



Statistics of the laser generation

$$(\partial_z - g)\psi = i\frac{\beta}{2}\partial_t^2\psi - i\gamma|\psi|^2\psi + \xi$$

Интенсивность $I = |\psi|^2$,

Корреляционная функция (спектр)

$$F(z, t) = \langle \psi(z, t + t')\psi^*(t) \rangle_{t'}$$

Спектральная ширина Δ

$$\Delta^2 = \frac{1}{\langle I \rangle} \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \omega^2$$

Средняя интенсивность $\gamma I \ll \beta \Delta^2$

В главном порядке по нелинейности

$$\langle |\psi|^4 \rangle = I(2 + K)$$

Статистика интенсивности на выходе из оптоволокна

$$\langle |\psi|^{2n} \rangle = ?$$

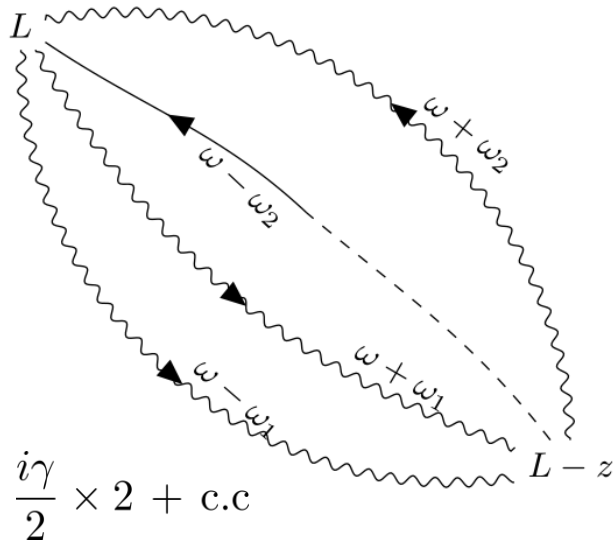
Если нелинейность отсутствует, то распределение Релея,

$$\langle |\psi|^{2n} \rangle = n! I^n, \quad I = \langle |\psi|^2 \rangle,$$

$$\text{PDF}(|\psi|^2) = \frac{1}{I} \exp(-|\psi|^2/I).$$

Распределение Релея восстанавливается хроматической дисперсией

First order of perturbation theory



$$2i\gamma I^3 \int_0^\infty dz \int 2(d\omega)(d\omega_1)(d\omega_2) \\ f(\omega + \omega_1)f(\omega - \omega_1)f(\omega + \omega_2) \\ \exp \left[-z \left(2g + i\beta_2 \left\{ (\omega + \omega_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (\omega + \omega_2)^2 - (\omega - \omega_2)^2 \right\} \right) \right] \\ + c.c.$$

Integrals saturation

Integral over frequencies: on the spectrum width, $\omega \sim \omega_{1,2} \sim \Delta$

Integral over evolutionary time: on the dispersion length, $z \sim 1/\beta_2\Delta^2$.

In the limit of small gain the answer tends to finite value

Результат вычислений

$$\langle |\psi|^4 \rangle = I^2(2 + K)$$

Отклонение от распределения Релея

$$K = -\frac{\gamma \langle I \rangle}{\beta_2 \Delta^2} \int \frac{d\omega}{\pi} \tilde{f}^2(\omega) f(\omega), \quad \tilde{f}(\omega) = \int \frac{d\omega_1}{\pi} \frac{f(\omega + \omega_1)}{\omega_1}.$$

Определение спектра сигнала на выходе $F(\omega)$: Δ – ширина спектра.

$$F(\omega) = \frac{I}{\Delta} f(\Delta \cdot \omega), \quad \int \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) = 1.$$

Более высокие моменты и функция распределения

$$\langle |\psi|^{2n} \rangle = n! I^n \left(1 + \frac{n(n-1)}{4} K \right), \quad \text{PDF}(|\psi|^2) = \left(1 + \frac{|\psi|^4 - 4|\psi|^2 + 2}{4} K \right) e^{-|\psi|^2}$$

Верно, пока $(I/\langle I \rangle)^2 \ll \beta_2 \Delta^2 / \gamma \langle I \rangle$

Соотношение между динамикой спектра и статистики интенсивности

$$(\partial_z - g)\psi = \frac{i\beta}{2}\partial_t^2\psi - i\gamma|\psi|^2\psi,$$

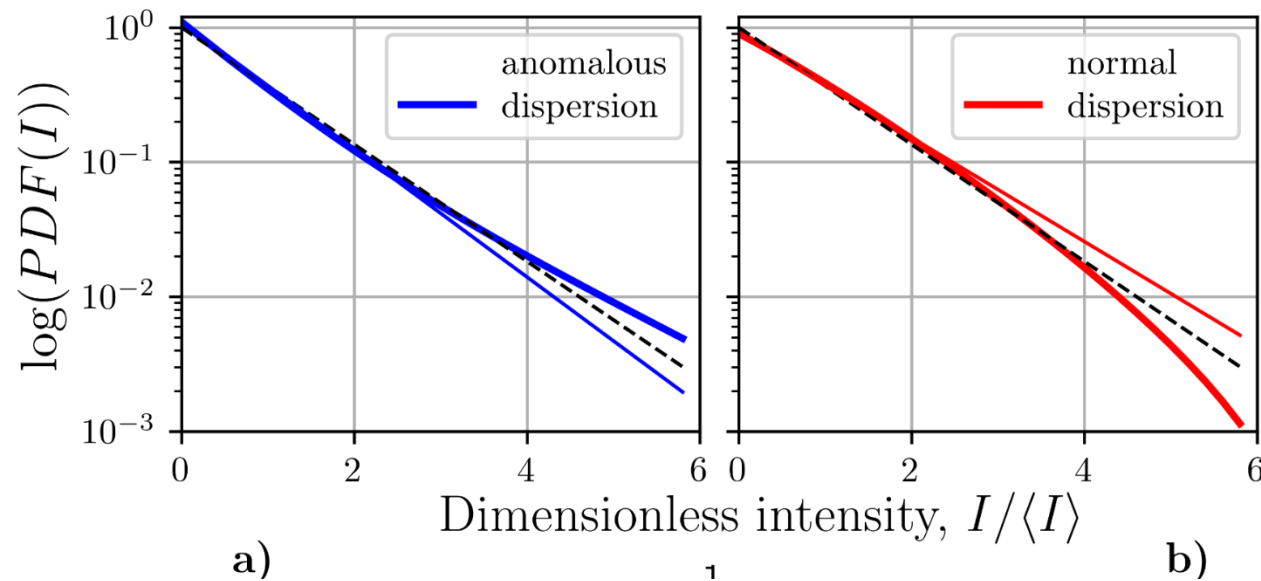
$$-\frac{2}{\gamma}\frac{d}{dz}\frac{U}{I^2} = \frac{2}{\gamma\langle I \rangle}\frac{d}{dz}\frac{T'}{\langle I \rangle},$$

$$U = \frac{\gamma}{2}\langle |\psi|^4 \rangle, \quad T = \frac{\beta}{2}\langle |\partial_t\psi|^2 \rangle,$$

$$I = \langle |\psi|^2 \rangle = I_0 \exp(2gz)$$

$$\frac{d}{dz}K = -\frac{\beta_2}{\gamma\langle I \rangle}\frac{d}{dz}\Delta^2, \quad K = \frac{2U}{\gamma\langle I \rangle}, \quad \Delta^2 = \frac{2T}{\beta_2\langle I \rangle}$$

Результат вычислений – графическое представление



Верно, пока $(I/\langle I \rangle)^2 \ll \beta_2 \Delta^2 / \gamma \langle I \rangle$

