Первые интегралы баротропных моделей – размерность имеет значение

В.А.Гордин (НИУ – ВШЭ, Гидрометцентр РФ)

Работа была поддержана Программой «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2016– 2017 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100" (№ проекта 16-05-0069).

XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике

18 – 19 декабря 2017г.

В одномерном случае движение баротропной среды при $p = g\rho^2$ описывается системой

$$\partial_t \rho + \partial_x (u\rho) = 0, \qquad \partial_t u + u\partial_x u + g\partial_x \rho = 0,\ \rho \geq 0. \qquad (1)$$

Эта же система описывает динамику тяжелой (учитывается тяготение) жидкости в прямолинейном канале (тогда вместо $\rho(t,x)$ – высота жидкости H).

В двумерном случае используется система трех уравнений мелкой воды (можно учесть и вращение плоскости)

$$\begin{aligned}
&\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + g\partial_x H - lv - \omega^2 x = 0,\\
&\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + g\partial_y H + lu - \omega^2 y = 0, \qquad (2)\\
&\partial_t H + u\partial_x H + v\partial_y H + H\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0,\ H \geq 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\langle u, v\rangle$ - скорость жидкости, H - ее высота, константы: l - параметр Кориолиса, $\omega = l/2$- угловая скорость, g – ускорение свободного падения.

Баротропная (двумерная) модель атмосферы получается из трехмерной гидростатической приближенным осреднением по вертикали (проекцией на первую вертикальную моду). Она отличается от (2) третьим уравнением:

$$\partial_t H + u\partial_x H + v\partial_y H + c^2\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0,\ c = const. \qquad (3)$$

Будем искать для этих систем все первые интегралы степени нуль, т. е. инварианты систем вида $\int_{\mathbb{R}} f(u,\rho)dx$ или $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{F}(u,\mathrm{v},\mathrm{H})dxdy$, соответственно.

Списки первых интегралов оказались весьма различны.

Теорема 1. В первом случае необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла линейному гиперболическому (при H>0) уравнению

$$H\partial_H^2 f = g\partial_u^2 f. \qquad (4)$$

Найдем счетный базис в пространстве решений (4).

Решения $f_{0,1} = u$, $f_{1,0} = H$, $f_{1,1} = Hu$ очевидны. Будем искать независимые решения вида $f = H^2 P(u) + HQ(u) + R(u)$. Подставляя в (4), получим дифференциальное соотношение на коэффициенты: $2HP(u) = g\left[H^2 P'' + HQ'' + R''\right]$; штрих – производная по u. Оно должно выполняться тождественно по обоим переменным.

Приравнивая коэффициенты при степенях H, получим: $P'' = 0,\ 2P = gQ'',\ R'' = 0$. Следовательно, $P = a + bu,\ Q = 2g^{-1}\left(au^2/2 + bu^3/6\right),\ R = c + ud$.

Интеграл, отвечающий ud в функции R мы уже знаем; отвечающий c, - тривиальный, константа. Но два новых первых интеграла мы нашли: $f_{2,0} = H^2 + 2g^{-1}Hu^2, f_{2,1} = H^2 u + Hg^{-1}u^3/3$.

Теперь будем искать решения в классе многочленов третьей степени по H с коэффициентами, зависящими от u: $f = H^3 P(u) + H^2 Q(u) + HR(u) + \mathrm{T(u)}$. Подставляя в (4), получаем соотношение:

$$6H^2 P(u) + 2\,\mathrm{HQ} = g\left[H^3 P'' + H^2 Q'' + HR'' + \mathrm{T}'' \right].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях H, получаем еще два первых интеграла:

$$f_{3,0} = H^3 + 3g^{-1}H^2u^2 + 6\,\mathrm{Hg}^{-2}\mathrm{u}^4, f_{3,1} = H^3u + H^2g^{-1}u^3 + \mathrm{Hg}^{-2}\mathrm{u}^5/10. \qquad (4)$$

Итак, инварианты $f_{n,0}$ начинаются с H^n и степени по скорости четные, а инварианты $f_{n,1}$ начинаются с $H^n u$, и все степени по скорости нечетные.

Эти функции образуют базис в пространстве всех решений гиперболического уравнения (2). Действительно, решение уравнения второго порядка по u однозначно задается двумя начальными функциями: решением и его первой производной при u=0. Многочлены по H в пространстве функций от H плотны в любой подходящей норме, например,

$$\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-H^2)\,|\,g(H)\,|^2\, dH.$$

Теперь вернемся к двумерным системам – там пространство первых интегралов нулевой степени имеет весьма небольшую размерность. Выпишем еще раз эти системы:

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + g\partial_x \Phi - lv - \omega^2 x = 0,$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + g\partial_y \Phi + lu - \omega^2 y = 0,$$

$$\partial_t \Phi + u\partial_x \Phi + v\partial_y \Phi + \Phi\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0 \ \text{или}$$

$$\partial_t \Phi + u\partial_x \Phi + v\partial_y \Phi + c^2\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0,\ c = const.$$

Теорема 2. Общее решение систем (2) и (3) конечномерно. Базис (если H стабилизируется, а скорость убывает на бесконечности) следующий ($r^2 = x^2 + y^2$):

Название инварианта	Система (2) $F=$	Система (3) $F=$
Масса M	Φ	$exp\left(\Phi / c^2\right) - e_\infty,\quad e_\infty = \lim\limits_{r\to\infty}\left[exp\left(\Phi / c^2\right)\right]$
x-компонента импульса P_x	$\Phi(u - ly) + \Phi_\infty ly$	$exp\left(\Phi / c^2\right)(u - ly) + e_\infty ly$
y-компонента импульса P_y	$\Phi(v + lx) - \Phi_\infty lx$	$F = exp\left(\Phi / c^2\right)(\mathrm{v} + lx) - e_\infty lx$
z-компонента момента импульса M_z	$\Phi(-uy + vx + r^2 l / 2) - \Phi r^2 l / 2$	$exp\left(H / c^2\right)(-uy + vx + r^2 l / 2) - \mathrm{e}_\infty r^2 l / 2$
Энергия E	$\frac{1}{2}\left\{\Phi\left[u^2 + v^2 + \Phi\right] - \Phi_\infty^2\right\}$	$\exp(\Phi / c^2)\left[\frac{u^2 + v^2}{2} + \Phi\right] - e_\infty \Phi_\infty$

При отсутствии вращения к списку для системы (2) добавляется еще два первых интеграла: $F=\Phi u$, $F=\Phi v$ – координаты центра масс. При $l \neq 0$ соответствующие функционалы на решениях системы (2) уже не сохраняются со временем, но удовлетворяют гармоническим уравнениям:

$$d_t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi u \; dx\, dy = l \int_{\mathbb{R}^2} \Phi v \; dx\, dy, \; d_t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi v \; dx\, dy = -l \int_{\mathbb{R}^2} \Phi u \; dx\, dy.$$

Инвариантом является сумма квадратов этих функционалов, но это не совсем интеграл степени нуль.

Аналогичные функционалы, осциллирующие с заданной частотой на решениях, имеются и у системы (3)

Кроме того, имеются и первые интегралы **степени один**, связанные с потенциальным вихрем $\gamma = \Omega / \Phi, \Omega = -\partial_y u + \partial_x v + l$: для системы (2) получаем функциональную серию первых интегралов: $F_g = \Phi g(\gamma)$, где g – произвольная функция. Сохраняются функционалы $\int_{\mathbb{R}^2} \left[\Phi g(\gamma) - \Phi_\infty g(\gamma_\infty)\right] dx\, dy, \quad \gamma_\infty = l / \Phi_\infty$.

Для системы (3), соответственно, $F_g = \exp(\Phi / c^2) g\left[\Omega \exp(-\Phi / c^2)\right]$.

Аналогичные первые интегралы существуют и для моделей на вращающейся сфере.

Для двумерных моделей полученные первые интегралы $E + aM_z + \Phi g(\gamma)$, $a = const$, g – выпуклая функция, позволяют построить функционал Ляпунова для стационарных решений типа монополя (циклон, антициклон) – эти монополи обладают свойством нелинейной устойчивости в круге не слишком большого радиуса.

Метод определения первых интегралов системы квазилинейных уравнений первого порядка

$$\partial_t \vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} A_k\left(\vec{Q}\right)\partial_{x_k}\vec{Q} + \vec{B}\left(\vec{Q}\right),$$

где $\vec{Q}$ - неизвестная вектор-функция с N компонентами от n переменных, A_k - матрицы, $\vec{B}$ - «младшие» члены. В атмосферных задачах они описывают ускорение Кориолиса и силу тяжести.

Первый интеграл степени нуль (не входят явно производные решения) – интегральный функционал вида:

$$I_f\left[\vec{Q}\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\vec{x}, \vec{Q}\right) d\vec{x},$$

если $d_t I_f\left[\vec{Q}(t)\right] = 0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla_{\vec{Q}} f \left[\sum_{k=1}^{n} A_k\left(\vec{Q}\right)\partial_{x_k}\vec{Q} + \vec{B}\left(\vec{Q}\right)\right] d\vec{x}$ тождественно по всем функциям $\vec{Q}(\vec{x})$, удовлетворяющим условиям на бесконечности. Это условие на функцию *f*. Его можно переписать так:

$$\delta_{\vec{Q}}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla_{\vec{Q}} f \left[\sum_{k=1}^{n} A_k\left(\vec{Q}\right)\partial_{x_k}\vec{Q} + \vec{B}\left(\vec{Q}\right)\right] d\vec{x}\right\} = 0$$

- равенство должно выполняться тождественно по $\vec{Q}$. На первом этапе решения находим общее решение задачи, отбрасывая младшие члены $\vec{B}$, а потом накладываем дополнительные условия, связанные и с ними.

Замечание. Пространство $\mathbb{R}^n$, где задана система и где интегрируем, можно заменить на многообразие. В атмосферных задачах: сфера или сферический слой.

Теорема. Определим дифференциальные 1-формы $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{n}$, $\alpha_j = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\partial_{q_l} f\right)a_{ilk}\right]dq_l$

Для того чтобы функция f обеспечивала первый интеграл, необходимо, чтобы все дифференциальные формы $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{n}$ были замкнуты.

Алгоритм. Получаем переопределенную систему линейных уравнений в частных производных на одну функцию N переменных. Находим общее решение, зависящее от конечномерных параметров или от функций меньшего числа переменных. Если $\vec{B} \equiv \vec{0}$, то условия и достаточны. В общем же случае накладываем дополнительные условия (они тоже линейны) на найденные параметры функции f, чтобы и при заданных младших членах $\vec{B} \neq \vec{0}$ получался первый интеграл $I_f\left[\vec{Q}\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\vec{x},\vec{Q}\right)d\vec{x}$.

Примеры трехмерных(n=3) задач для уравнений идеальной газовой динамики (N=5) в трехмерном пространстве или в сферическом слое (т. е. вокруг шара – планеты) V.

$$E = \int_V \rho \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\kappa - 1)\rho} - \frac{R^2_{Земли} g}{r} - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{2} \right] d\vec{x},$$

$$M_z = \int_V \rho r \left(u - r\omega \sin\vartheta \right) \sin\vartheta \, d\vec{x},$$

$$K_g = \int_V \rho g\left(\rho p^{-1/\kappa} \right) d\vec{x}, \text{ где } d\vec{x} = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\lambda \, d\vartheta.$$

Здесь g – произвольная функция. Это «энтропийное» семейство инвариантов. Здесь еще важен инвариант Эртеля:

$$E_F = \int_{\mathbb{R}^3} \rho F\left(Z_1, S \right) d^3\vec{x}, \; S = \rho p^{-1/\kappa}, \; Z_1 = \rho^{-1} \left(rot\,\vec{v} + 2\vec{\omega}, grad\, S \right),$$

а также и его обобщения более высокого порядка:

$$E_F = \int_{\mathbb{R}^3} \rho F\left(Z_2, Z_1, S \right) d^3\vec{x}, \;\; Z_2 = \rho^{-1} \left(rot\,\vec{v} + 2\vec{\omega}, grad\, Z_1 \right) ...$$

Первые интегралы и нелинейная устойчивость солитоноподобных стационарных решений

Рассмотрим первые интегралы системы (2) вида $R = E + K_f + aM_z$, где функция f и константа a будут выбраны ниже.

Система уравнений Эйлера для таких первых интегралов имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\Phi u + \partial_y f'(\gamma) - a\Phi y = 0,\\
&\Phi v + \partial_x f'(\gamma) + a\Phi x = 0, \qquad (5)\\
&\Phi + \frac{u^2 + v^2}{2} + f(\gamma) - \gamma f'(\gamma) + a\left[-uy + vx + l\left(x^2 + y^2\right)/2\right] = 0.
\end{aligned}$$

Эту систему удобно переписать в полярных координатах – получится система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Условия положительной определенности функционала R – выпуклость функции f и неравенство

$$\Phi > \left(w + ar\right)^2, \qquad (6)$$

где w – угловая скорость в полярных координатах. На бесконечности она стремится к нулю, а геопотенциал Ф стабилизируется.

При ненулевом значении параметра a, условиях на бесконечности: стабилизации Ф и убывания w, неравенство может выполняться только в круге конечного радиуса. Параметры в первом интеграле подбираются методом пристрелки такими, чтобы получилось солитоноподобное решение. Практически это означает, что траектория системы дифференциальных уравнений должна попасть из начальных условий при r=0 в седловую точку системы по сепаратрисе при $r \to +\infty$.

Значения были выбраны типичные для атмосферы Земли: $\gamma_\infty = 0,05 \cdot 10^{-9} м^{-2} с$, $\gamma_0 = -2 \cdot 10^{-10} м^{-2} с$, $\Phi_0 = 10^5 м^2 с^{-2}$. Это отвечает «эквивалентной глубине атмосферы» ~ 10 км. Значение параметра a (при попадании из седла в седло) $\sim 10^{-4}$. Таким образом, нарушение условия устойчивости солитона (6) происходит примерно при $r_* = 10^{6,5} м$. Приближение плоской Земли перестает работать раньше.

Соответствующие графики компонент решения приведены на Рис.1.

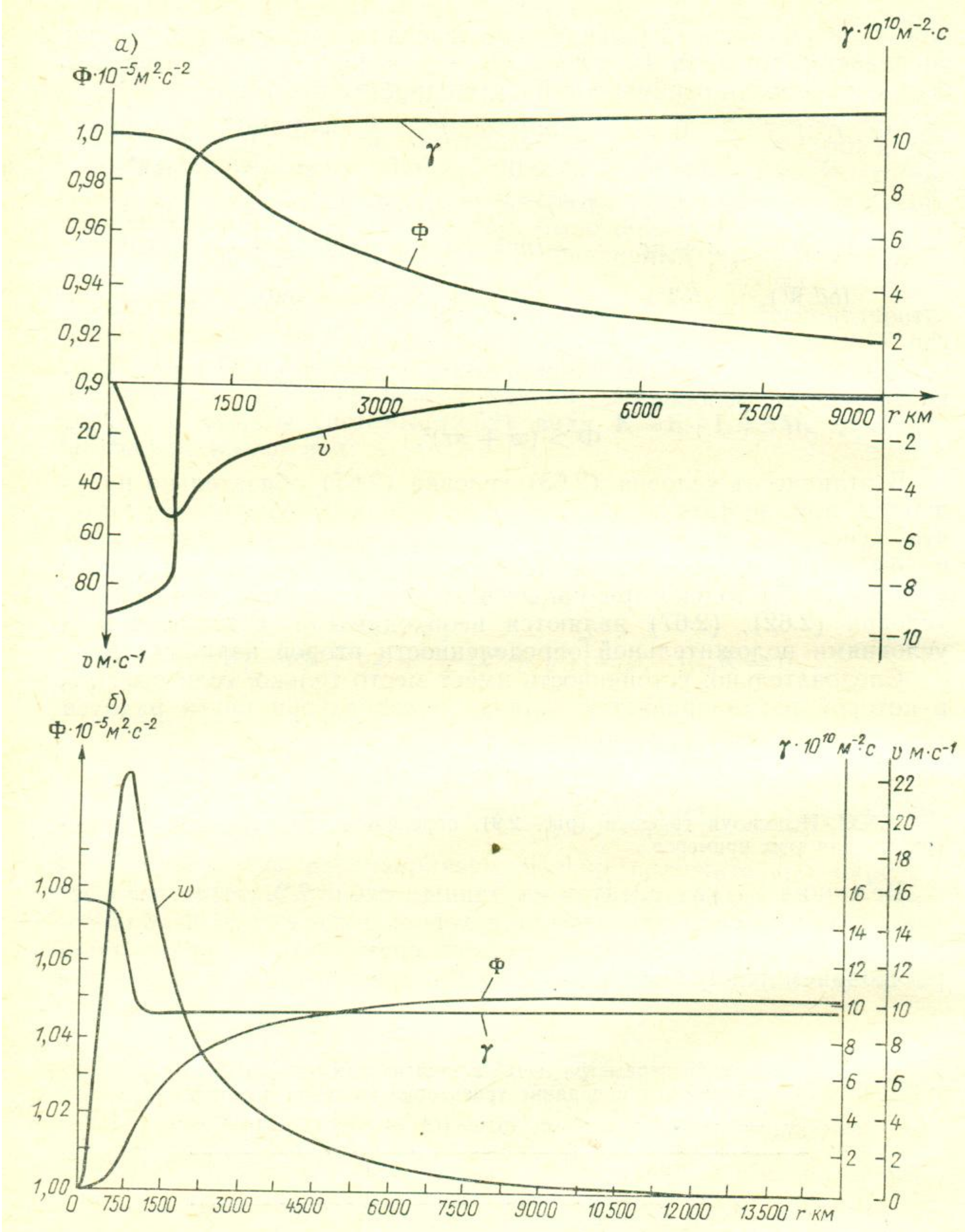
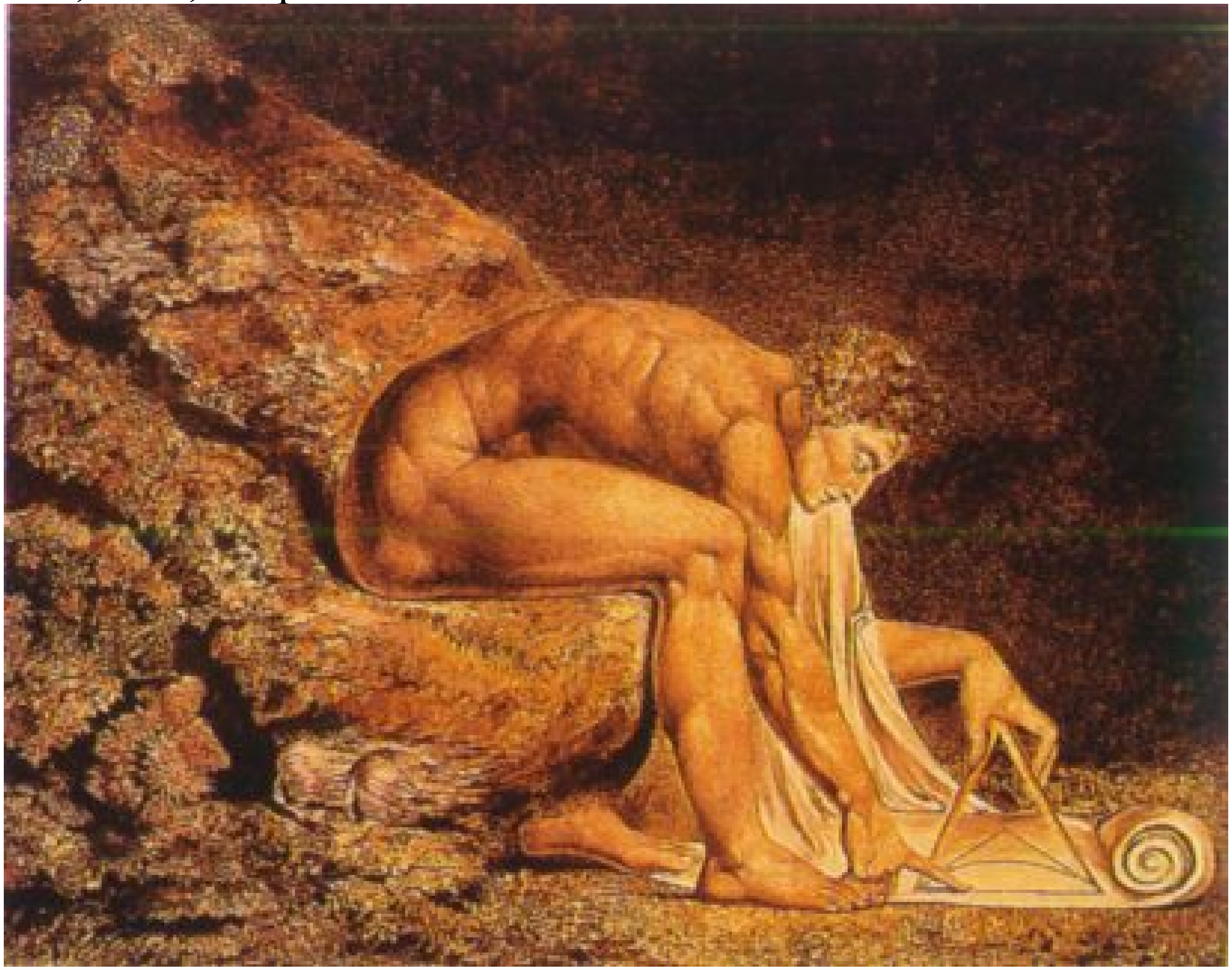


Рис.1. Решения типа «антициклон» и «циклон». Модель: плоскость с учетом вращения. $l = 10^{-4} c^{-1}$. Для решения типа «антициклон» полагалось $f(\gamma) = \dfrac{A}{1-(\gamma/\gamma_\infty)^2}$, а для типа «циклон» $f(\gamma) = \dfrac{1}{A[\gamma-\gamma_\infty]^2}$. Параметры подбирались (метод пристрелки) таким образом, чтобы при решении системы (5) траектория попадала из седла (отвечающего r=0) в седло (отвечающее $r = +\infty$). Характерный радиус циклонов и антициклонов (там, где скорость w достигает максимума) получается, отвечающим параметрам атмосферы Земли.

Литература

V.A.Gordin. Mathematical Problems and Methods in Hydrodynamical Weather Forecasting. Gordon & Breach, 2000, 842p.



Спасибо за внимание