Взаимодействие и опрокидывание волн на свободной поверхности идеальной диэлектрической жидкости в горизонтальном электрическом поле

Н.М. Зубарев,[1,2] О.В. Зубарева,[1] Е.А. Кочурин[1]

[1] *Институт электрофизики УрО РАН*

[2] *Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН*

[1] E.A. Kochurin, O.V. Zubareva, N.M. Zuvarev. Wave breaking on the surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, V. 27, No 4, P. 1223-1228, 2020.

[2] Н.М. Зубарев, Е.А. Кочурин. Интегрируемая модель взаимодействия встречных слабонелинейных волн на границе жидкости в горизонтальном электрическом поле. Теоретическая и математическая физика, Т. 202, В. 3, С. 403-414, 2020.

XXIX Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике,
14-15 декабря 2020 г., Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН

Исходные уравнения

Рассматриваются волновые процессы на поверхности идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости в сильном горизонтальном электрическом поле.

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \nabla^2\varphi = 0, \qquad \nabla^2\varphi' = 0,$$

$$\Phi_t + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} = \frac{(\varepsilon - 1)(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi' - E^2)}{8\pi\rho}, \qquad z = \eta,$$

$$\eta_t = \Phi_z - \eta_x\Phi_x, \qquad z = \eta,$$

$$\Phi \to 0, \qquad \varphi \to -Ex, \qquad z \to -\infty,$$

$$\varphi' \to -Ex, \qquad z \to +\infty,$$

$$\varphi = \varphi', \qquad \varepsilon(\varphi_z - \eta_x\varphi_x) = \varphi'_z - \eta_x\varphi'_x, \qquad z = \eta.$$

В работе [N.M. Zubarev, Phys. Lett. A, 2004] были выведены слабо-нелинейные уравнений движения:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\psi_t - c^2\hat{H}\eta_x = A_E c^2\hat{H}(\eta\hat{H}\eta_x)_x + A_E c^2(\eta\eta_x)_x \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left[A_E c^2(\hat{H}\eta_x)^2 - A_E c^2\eta_x^2 + (\hat{H}\psi_x)^2 - \psi_x^2\right], \\
&\eta_t + \hat{H}\psi_x = -\hat{H}(\eta\hat{H}\psi_x)_x - (\eta\psi_x)_x,
\end{aligned}}$$

где $\quad \psi = \Phi\,|_{z=\eta}, \quad A_E = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1), \quad c = \sqrt{(\varepsilon - 1)A_E}.$

В линейном приближении это – волновое уравнение с законом дисперсии

$$\omega^2 = c^2 k^2.$$

Его решение: $\quad \eta(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$

Рассмотрим влияние нелинейности на волны, распространяющиеся в выделенном направлении (по, либо против направления поля E):

$$\eta(x,t) \to \alpha N(y,\tau), \qquad y = x \pm ct, \qquad \tau = \alpha t,$$

$$N_\tau = \mp \frac{(A_E - 1)c}{2} \partial_y \hat{H}\left[(\hat{H} N_y)^2 + (N N_{yy}) + \hat{H}(N \hat{H} N_{yy}) \right].$$

Перенормировка времени приводит к универсальную (не зависящую от параметров задачи) уравнению на нелинейную динамику волн:

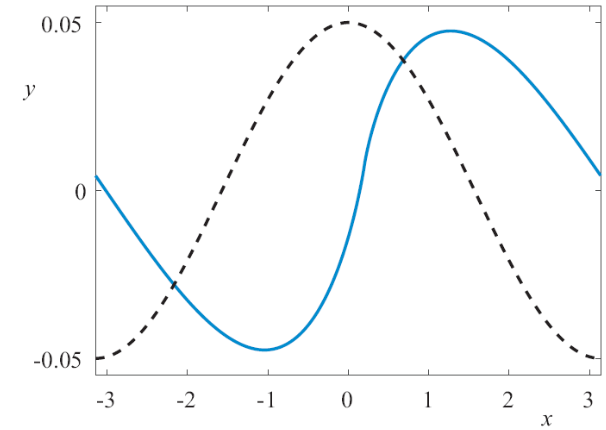
$$\boxed{N_{\tau'} = \pm \partial_y \hat{H}\left[(\hat{H} N_y)^2 + (N N_{yy}) + \hat{H}(N \hat{H} N_{yy}) \right],}$$

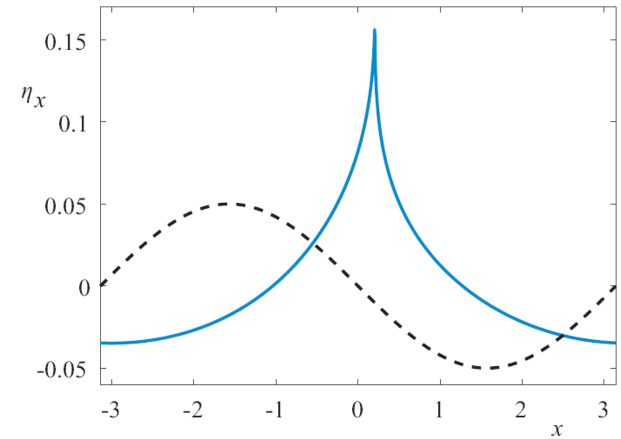
где $\quad \tau' = \tau \dfrac{(1 - A_E)c}{2} = \tau \dfrac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 1)^{3/2}}.$

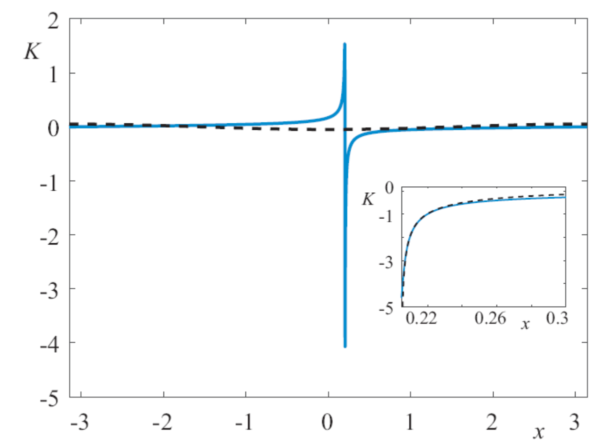
Масштаб времени: $\quad T \propto \dfrac{(\varepsilon + 1)^{3/2}}{\varepsilon - 1}.$

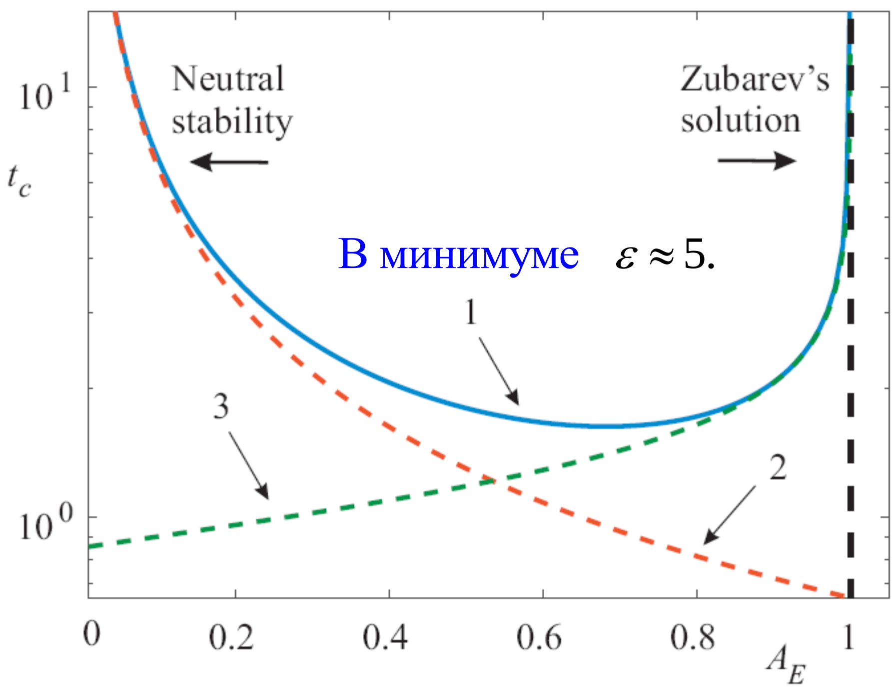
$$\boxed{T \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \to \infty.}$$

Численное моделирование показывает, что нелинейные волны проявляют тенденцию к опрокидыванию (рисунки справа соответствуют $\varepsilon = 2.2$).









В минимуме $\varepsilon \approx 5.$

Безразмерное время формирования как функция параметра $A_E = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 1)$.

В переделе $\varepsilon >> 1$ нелинейные поверхностные волны произвольной формы распространяются без искажений, а встречные уединенные волны после взаимодействия восстанавливают свою форму, приобретая при этом некоторый сдвиг фаз.

Выведено локальное квадратично нелинейное уравнение, описывающее взаимодействие встречных слабонелинейных волн (здесь $V(x,t) \equiv \widehat{H}\eta$):

$$\boxed{V_{tt} - V_{xx} = 2V_x V_{tt} - 2V_t V_{xt}}$$

Его решения строятся итерациями (особенность процедуры в том, что при рассмотрении локализованных волн не возникает секулярных слагаемых):

$$\boxed{V = V_{\text{lin}} + V_{\text{quad}} + V_{\text{cub}}}$$

$$V_{\text{lin}} = F(\xi) + G(\zeta), \qquad \xi = x + t, \qquad \zeta = x - t,$$

$$V_{\text{quad}} = -F'(\xi)G(\zeta) - F(\xi)G'(\zeta),$$

$$V_{\text{cub}} = \frac{1}{2}F^2 G'' + \frac{1}{2}F'' G^2 + G' \int F F''\, d\xi + F' \int G G''\, d\zeta.$$

Сдвиг фаз определяется квадратом амплитуды встречной волны:

$$V(x,t) \approx F(x+t) + G(x-t), \quad t \to -\infty$$

$$V \approx F(x+t-\Delta_1) + G(x-t+\Delta_2), \quad t \to +\infty$$

$$\Delta_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} GG''\, d\zeta, \qquad \Delta_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} FF''\, d\xi$$

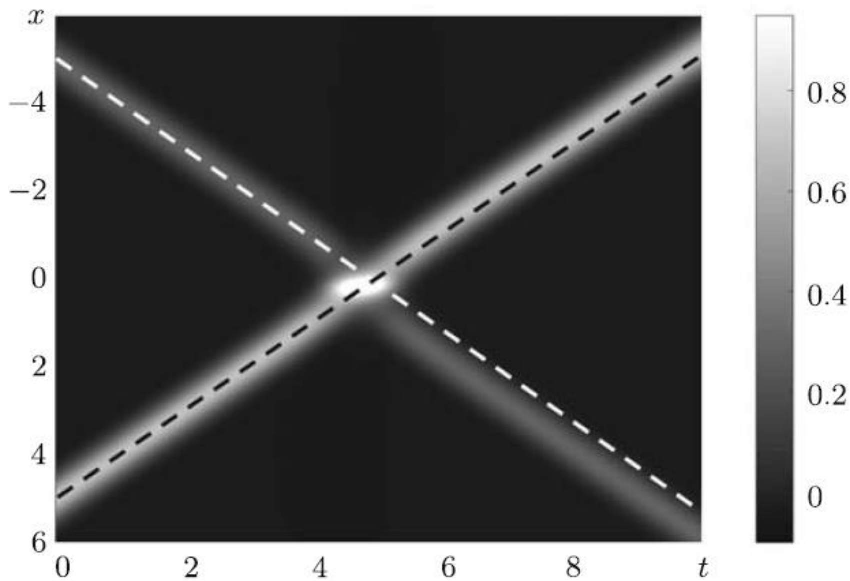
Каков механизм появления сдвига фаз?

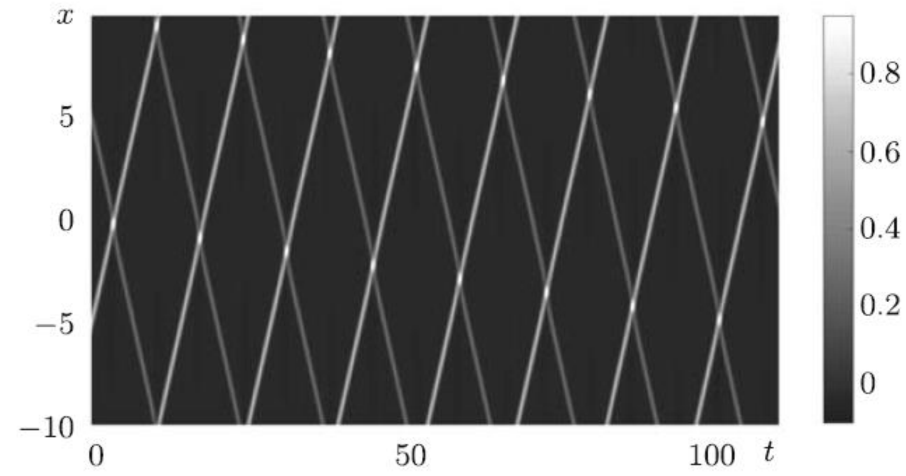
На качественном уровне – имеем закон дисперсии:

$$\omega^2 = \frac{E^2(\varepsilon - 1)^2}{4\pi\rho(\varepsilon + 1)} k^2.$$

При столкновении волн локально меняется напряженность поля E (пропорционально $\hat{H}\eta_x$) и, как следствие, их скорость. Это и приводит к набегу фаз.

Эволюция поверхности жидкости при взаимодействии встречных уединенных волн (численное моделирование)





$$\boxed{V_{tt} - V_{xx} = 2V_x V_{tt} - 2V_t V_{xt}}$$

Продемонстрирована интегрируемость этого уравнения: оно может быть представлено как условие совместности пары линейных уравнений:

$$t_x + U(x,t) = 0, \qquad t_{xx} - t_{zz} = 0$$

Здесь $U = V_t \approx \psi_x$ – x - компонента скорости жидкости.

Заключение

Теоретически (аналитически и численно) исследована нелинейная динамика свободной поверхности непроводящей жидкости, находящейся в сильном тангенциальном электрическом поле. Показано, что нелинейные поверхностные волны проявляют тенденцию к опрокидыванию. При коллапсе волн формируются разрывы в градиенте локального электрического поля и кривизне границы. Установлено, что для жидкостей с близкой к ~5 диэлектрической проницаемостью время формирования особенности минимально, т.е. коллапс поверхностных волн для таких сред происходит наиболее интенсивно. В пределе большой проницаемости жидкости нелинейные поверхностные волны распространяются без искажений; встречные волны после столкновения восстанавливают свою исходную форму, приобретая при этом некоторый сдвиг фаз.

Будьте

здоровы !