Уравнения динамики 2D жидкости со свободной границей

Дьяченко С.А., Захаров В.Е. and Дьяченко А.И.

State University of New York at Buffalo
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
Сколковский институт науки и технологий

Грант РНФ 19-72-30028

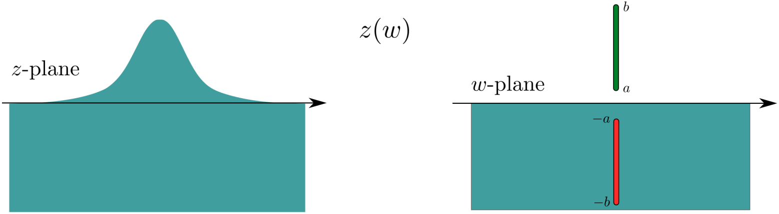

Figure: The branch cut of R, V is marked in green.

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x\phi_x &= \phi_y\Big|_{y=\eta} & &\Rightarrow & \dot{R} &= i(UR'_w - UR'_w) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) &= 0\Big|_{y=\eta} & &\Rightarrow & \dot{V} &= i(UV'_w - B'_w R) \\ \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0 & & & & \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{z'_w} \qquad V = i\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$U(u,t) = \hat{P}^-[\bar{V}(u,t)R(u,t) + V(u,t)\bar{R}(u,t)], \qquad B(u,t) = \hat{P}^-[V(u,t)\bar{V}(u,t)$$

Теперь функции заданы на контуре

$$C = \gamma(ia, ib)$$

Четыре интеграла типа Коши для $r(w,t)$, $V(w,t)$, $U(w,t)$, $B(w,t)$ и их предельных значениях на контуре:

$$r(w,t) = \frac{i}{2\pi} \oint\limits_C \frac{r(s,t)ds}{s-w} \qquad V(w,t) = \frac{i}{2\pi} \oint\limits_C \frac{V(s,t)ds}{s-w}$$

$$U(w,t) = \frac{i}{2\pi} \oint\limits_C \frac{U(s,t)ds}{s-w} \qquad B(w,t) = \frac{i}{2\pi} \oint\limits_C \frac{B(s,t)ds}{s-w}$$

Интегрирование по контуру C идет против часовой стрелки.

$$R(w,t) = 1 + r(w,t)$$

Конформное преобразование и второй лист

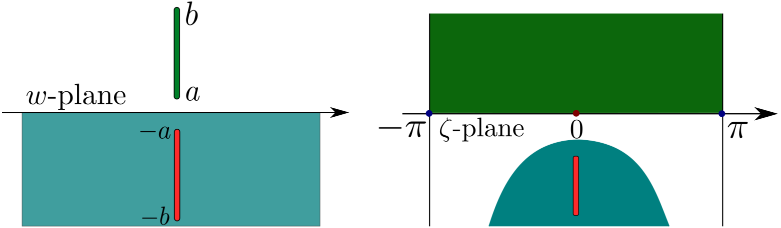

Figure: Настоящая жидкость - голубая, фантомная - белая, второй лист - зеленый.

Конформное преобразование

$$w = ic(t) - il(t)\cos\zeta, \qquad l(t) = \frac{b(t) - a(t)}{2}, \qquad c(t) = \frac{a(t) + b(t)}{2}$$

преобразует область вне разреза $C = \gamma(ia, ib)$ на периодическую полосу на ζ-плоскости, так что

$$\zeta = \xi + i\chi, \qquad -\pi < \xi \leq \pi, \qquad \chi \leq 0$$

Уравнения на контуре

Тогда для предельных значений $R(\xi, t)$ и $V(\xi, t)$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} l \sin\xi \dot{R} - [\dot{c} - \dot{l}\cos\xi + U(\xi)]R' + U'R = 0, \\ l \sin\xi \dot{V} - [\dot{c} - \dot{l}\cos\xi + U(\xi)]V' + B'R = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Точки ветвления разреза

$$ia \text{ и } ib \Rightarrow 0 \text{ и } \pi.$$

В этих точках с очевидностью выполнено

$$R(0, t) = 0 \qquad R(\pi, t) = 0$$

и

$$[\dot{c} - \dot{l}\cos\xi + U(\xi)]|_{\xi=0,\pi} = 0,$$

т.е. для движения концов разреза имеем

$$\dot{a} = -U(0, t) \qquad \dot{b} = -U(\pi, t)$$

Также сохраняются значения скорости V в точках ветвления:

$$V(0, t) = const1 \qquad V(\pi, t) = const2$$

Многолистность ???

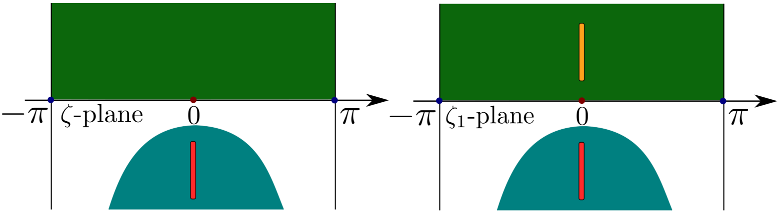

Figure: Следующий лист

$$\dot{R} = i\left(UR'_w - U'_w R\right)$$
$$\dot{V} = i\left(UV'_w - B'_w R\right)$$

$$I\sin\xi\,\dot{R} = [\dot{c} - \dot{I}\cos\xi + U(\xi)]R'_\xi - U'_\xi R$$
$$I\sin\xi\,\dot{V} = [\dot{c} - \dot{I}\cos\xi + U(\xi)]V'_\xi - B'_\xi R \qquad (2)$$

Необходимо численное моделирование !