Исследование связанных когерентных структур, возникающих на поверхности глубокой воды

С. В. Дремов[1,3], Д.И. Качулин[1,3], А.И. Дьяченко[2,3]

[1]Новосибирский государственный университет

[2]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

[3]Сколковский институт науки и технологий

XXIX научная сессия совета РАН по нелинейной динамике

Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, 14-15 декабря, 2020

Исходная постановка задачи

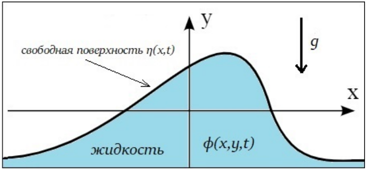
Рассматриваются одномерные гравитационные волны на поверхности идеальной несжимаемой глубокой жидкости в поле тяжести. Течение предполагается потенциальным:

$$\boxed{\triangle\phi = 0}$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \eta(x,t)$$

Граничные условия:

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + g\eta = 0 \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \eta_x\psi_x = \psi_y \end{array}\right| \text{при } y = \eta(x,t)$$



$y = \eta(x,t)$ — форма поверхности

$\psi(x,t)$ — потенциал скорости на поверхности

$\phi(x,y,t)$ — потенциал скорости внутри жидкости

Исходная постановка задачи

Рассматриваются одномерные гравитационные волны на поверхности идеальной несжимаемой глубокой жидкости в поле тяжести. Течение предполагается потенциальным:

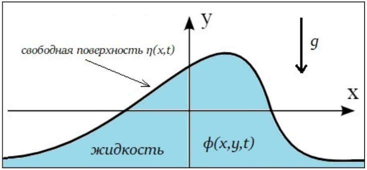
$$\boxed{\triangle\phi = 0}$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \eta(x,t)$$

Граничные условия:

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + g\eta = 0 \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t} + \eta_x\psi_x = \psi_y \end{array}\right| \text{ при } y = \eta(x,t)$$

Система уравнений является гамильтоновой, а η и ψ — гамильтоновы переменные [V. E. Zakharov, 1968].



$y = \eta(x,t)$ — форма поверхности

$\psi(x,t)$ — потенциал скорости на поверхности

$\phi(x,y,t)$ — потенциал скорости внутри жидкости

Гамильтонова система уравнений

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}, \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}$$

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla\phi)^2 dy + \frac{g}{2}\int \eta^2 dx$$

Zakharov, V. E. (1968). Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 9(2), 190-194.

Канонические преобразования

В предположении малости крутизны $\mu \ll 1$ гамильтониан можно разложить в ряд по степеням η и ψ:

Исходное разложение гамильтониана

$$H(\eta, \psi) = \frac{1}{2}\int\{g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi\}dx - \frac{1}{2}\int\{(\hat{k}\psi)^2 - (\psi_x)^2\}\eta dx + \frac{1}{2}\int\{\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi + \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))\}dx$$

Канонические преобразования

В предположении малости крутизны $\mu \ll 1$ гамильтониан можно разложить в ряд по степеням η и ψ:

Исходное разложение гамильтониана

$$H(\eta,\psi) = \frac{1}{2}\int \{g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi\}dx - \frac{1}{2}\int \{(\hat{k}\psi)^2 - (\psi_x)^2\}\eta dx + \frac{1}{2}\int \{\psi_{xx}\eta^2\hat{k}\psi + \psi\hat{k}(\eta\hat{k}(\eta\hat{k}\psi))\}dx$$

В случае однонаправленных волн можно применить каноническое преобразование $\eta,\psi \to c, c^*$ и значительно упростить исходный гамильтониан:

Гамильтониан после преобразования

$$H(c,c^*) = \int c^*\hat{V}c dx + \frac{1}{2}\int \left[\frac{i}{4}(c^2\frac{\partial}{\partial x}{c^*}^2 - {c^*}^2\frac{\partial}{\partial x}c^2) - |c^2|\hat{k}|c^2|\right]dx$$

Уравнение движения в таком случае записывается в виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \partial_x^+ \frac{\delta H}{\delta c^*} = 0$$

Dyachenko A. I., Kachulin D. I., Zakharov V. E. Super compact equation for water waves //Journal of Fluid Mechanics. – 2017. – Т. 828. – С. 661-679.

Суперкомпактное уравнение

Суперкомпактное уравнение для однонаправленных волн на воде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + i\hat{\omega}_k c - i\partial_x^+ \left(|c|^2 \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \partial_x^+ \left(\hat{k} \left(|c|^2 \right) c \right). \qquad (1)$$

Физические переменные можно восстановить с помощью следующих выражений:

$$\eta(x) = \frac{\hat{k}^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} g^{\frac{1}{4}}} \left[c(x) + c^*(x) \right] + \ldots \qquad \psi(x) = -i \frac{\hat{k}^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{2} g^{\frac{1}{4}}} \left[c(x) + c^*(x) \right] + \ldots$$

Уравнение (1) имеет решение в виде одиночного бризера:

$$c(x,t) = c_{br}\left(x - V_0 t; \delta\right) e^{ik_0 x - i\omega_{k_0} t - i\delta^2 t}, \text{ где } \; V_0 = \frac{\omega_{k_0}}{2k_0}$$

Решение можно получить численно с помощью метода Петвиашвили.

Суперкомпактное уравнение

Суперкомпактное уравнение для однонаправленных волн на воде

$$\frac{\partial c}{\partial t} + i\hat{\omega}_k c - i\partial_x^+ \left(|c|^2 \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \partial_x^+ \left(\hat{k} \left(|c|^2 \right) c \right). \tag{1}$$

Физические переменные можно восстановить с помощью следующих выражений:

$$\eta(x) = \frac{\hat{k}^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} g^{\frac{1}{4}}} \left[c(x) + c^*(x) \right] + \dots \qquad \psi(x) = -i \frac{\hat{k}^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{2} g^{\frac{1}{4}}} \left[c(x) + c^*(x) \right] + \dots$$

Уравнение (1) имеет решение в виде одиночного бризера:

$$c(x,t) = c_{br}\left(x - V_0 t; \delta \right) e^{ik_0 x - i\omega_{k_0} t - i\delta^2 t}, \text{где} \;\; V_0 = \frac{\omega_{k_0}}{2k_0}$$

Решение можно получить численно с помощью метода Петвиашвили.

Переходя к терминам огибающей волнового пакета $C(x,t)$, такой что $c(x,t) = C(x,t)e^{ik_0 x - i\omega_{k_0} t}$ и предполагая узость его спектральной ширины, уравнение (1) сводится к нелинейному уравнению Шрёдингера (НУШ):

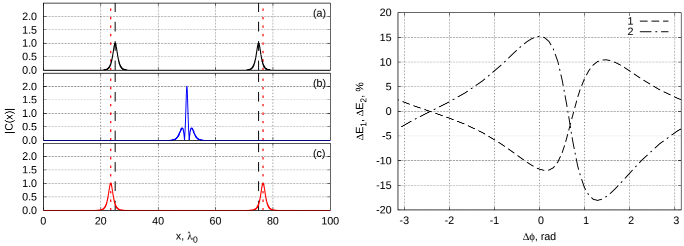
Нелинейное уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{i\omega_{k_0}}{8k_0^2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + ik_0^2 \left[|C|^2 C \right] = 0.$$

В приближении НУШ бризер суперкомпактного уравнения соответствует солитону огибающей.

Парное столкновение солитонов и бризеров

- В работе [Kachulin, Gelash, 2018] исследовалось парное столкновение солитонов в модели НУШ, а также бризеров в модели суперкомпактного уравнения.

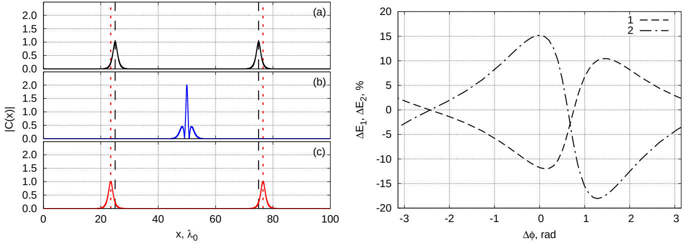


- При взаимодействии в модели суперкомпактного уравнения бризеры обмениваются энергией, их амплитуды и скорости изменяются, чего не наблюдается в модели НУШ.

Kachulin D., Gelash A. On the phase dependence of the soliton collisions in the Dyachenko–Zakharov envelope equation //Nonlinear Processes in Geophysics. – 2018. – Т. 25. – №. 3. – С. 553-563.

Парное столкновение солитонов и бризеров

- В работе [Kachulin, Gelash, 2018] исследовалось парное столкновение солитонов в модели НУШ, а также бризеров в модели суперкомпактного уравнения.



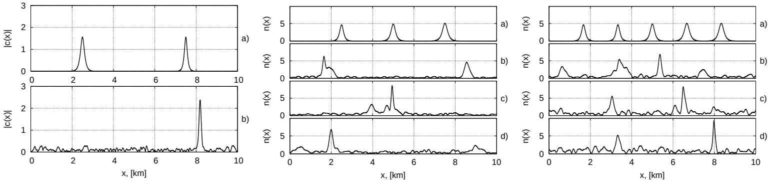
- При взаимодействии в модели суперкомпактного уравнения бризеры обмениваются энергией, их амплитуды и скорости изменяются, чего не наблюдается в модели НУШ.

Kachulin D., Gelash A. On the phase dependence of the soliton collisions in the Dyachenko–Zakharov envelope equation //Nonlinear Processes in Geophysics. – 2018. – Т. 25. – №. 3. – С. 553-563.

Что будет, если столкнуть бризеры множество раз?

Многократные столкновения бризеров

- В работе [Kachulin, Dyachenko, Dremov, 2020] исследовалась динамика многократных столкновений бризеров в модели суперкомпактного уравнения.



- Вне зависимости от числа бризеров после большого числа столкновений останется только один бризер.
- Взаимодействие бризеров может быть различным. В некоторых случаях формируется периодически осциллирующая структура, напоминающая би-солитонное решение НУШ.

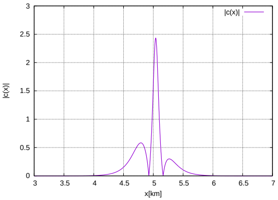
Kachulin D., Dyachenko A., Dremov S. Multiple Soliton Interactions on the Surface of Deep Water //Fluids. – 2020. – T. 5. – №. 2. – С. 65.

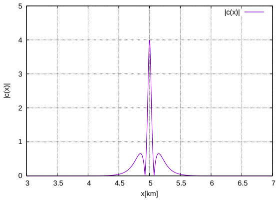
Би-солитонное решение НУШ

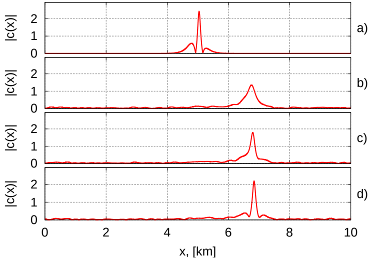
Точное связанное би-солитонное решение НУШ можно записать в виде:

$$C_{bs}(x,t) = \frac{2\,\frac{c_1-c_2}{c_1+c_2}\left(c_1\cosh\left[\frac{2c_2k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(x-x_2)\right]e^{-\frac{1}{2}ik_0^2c_1^2t}-c_2\cosh\left[\frac{2c_1k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(x-x_1)\right]e^{-\frac{1}{2}ik_0^2c_2^2t}\right)}{\left(\frac{c_1-c_2}{c_1+c_2}\right)^2\cosh\left[\frac{2k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(c_1(x-x_1)+c_2(x-x_2))\right]+\cosh\left[\frac{2k_0^2}{\sqrt{\omega k_0}}(c_1(x-x_1)-c_2(x-x_2))\right]-\frac{4c_1c_2}{(c_1+c_2)^2}\cos\left[(c_1^2-c_2^2)\frac{k_0^2}{2}t\right]}$$

Решение является периодическим по времени: $T = \frac{4\pi}{k_0^2(c_1^2+c_2^2)}$; c_1, c_2 — амплитуды солитонов, а параметр $\kappa = \frac{c_1}{c_2}$ — соотношение их амплитуд.







Zakharov V., Shabat A. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media //Soviet physics JETP. – 1972. – T. 34. – №. 1. – С. 62.

Peregrine D. H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions //The ANZIAM Journal. – 1983. – T. 25. – №. 1. – С. 16-43.

Алгоритм нахождения связанной структуры

Алгоритм нахождения связанных структур схож с тем, который использовался в работе [Dyachenko, Zakharov, 2008]. Затухание осуществлялось добавлением соответствующего слагаемого к правой части уравнения:

Механизм затухания

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \cdots - \gamma f(x) c(x,t)$$

где $f(x) = cos^6(\frac{\pi x}{L})$, L - размер расчётной области

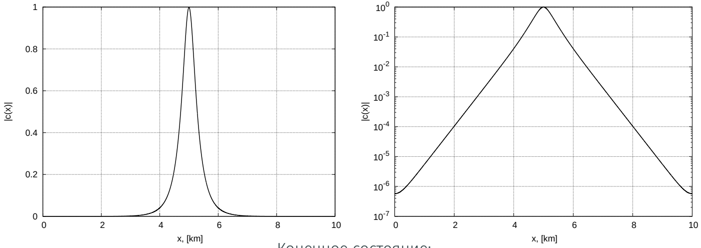
Коэффициент γ и функция $f(x)$ подавляют излучение на краях расчётной области и не влияют при этом на саму структуру, распоженную в центре области. Для удержания связанной структуры в центре скорость системы отчёта V постоянно корректировалась в течение расчёта.

Dyachenko A. I., Zakharov V. E. On the formation of freak waves on the surface of deep water //JETP letters. – 2008. – T. 88. – №. 5. – С. 307.

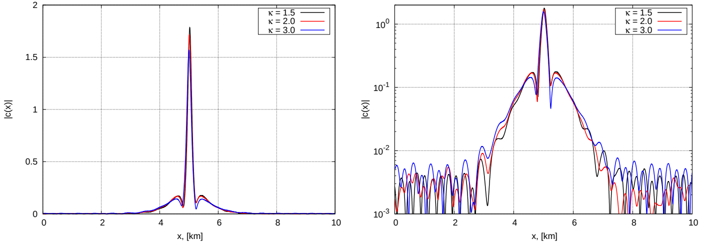
Численное моделирование: два одиночных бризера в одной точке

Первый вариант начальных условий — использовать два одиночных бризера и поместить в одну точку расчётной области.

Начальное состояние:



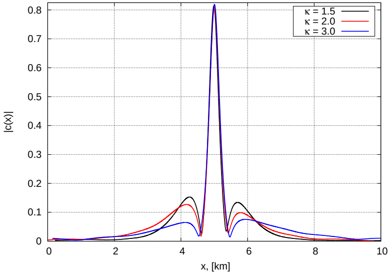
Конечное состояние:



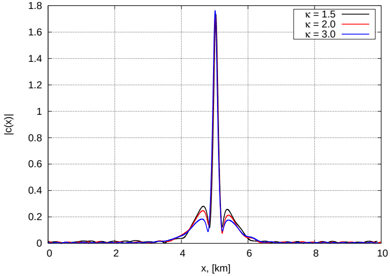
Оставшиеся после процедуры затухания структуры стабильно распространяются на протяжении 10^6 с. $\approx 100000\, T_0$, где $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{gk_0}} \approx 10$ с. – период волны, $\mu \approx 0.2$

Численное моделирование: би-солитоны НУШ

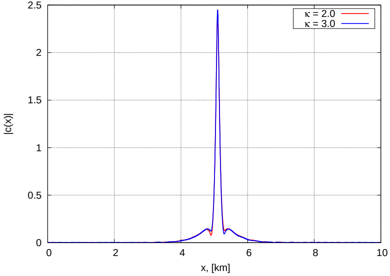
Второй вариант начальных условий — использовать би-солитоны НУШ.



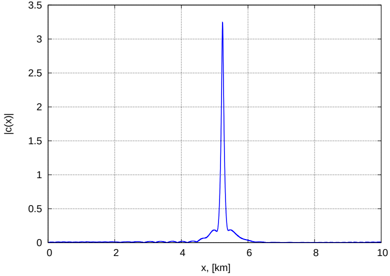
$\mu \approx 0.09$



$\mu \approx 0.18$



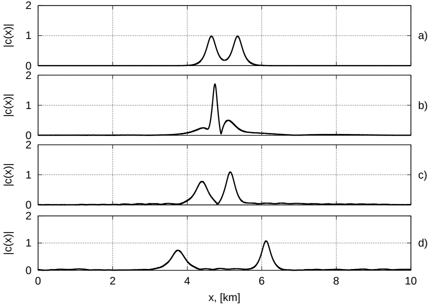
$\mu \approx 0.26$



$\mu \approx 0.33$

Распад связанного состояния

- При превышении значений крутизны $\mu = 0.4$ любой вариант начальных условий распадается, а получение связанной структуры становится невозможным.



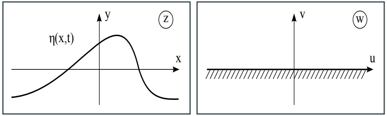
Распад би-солитона

- В случае использования би-солитонов НУШ в качестве начальных условий связанную структуру также невозможно получить при соотношении амплитуд $\kappa \leq 1.1$ ни при какой крутизне.
- В случае использования двух бризеров с параметром $\kappa = 1.1$ связанная структура стабильно существует.

Уравнения в конформных переменных

Уравнения в конформных переменных основаны на конформном отображении области $z = x + iy$, заполненной жидкостью, в нижнюю полуплоскость новой комплексной переменной $w = u + iv$.

Конформное преобразование:



В терминах функций $R = \frac{1}{Z_w}$ и $V = i\Phi_z = i\frac{\Phi_w}{Z_w}$ уравнения приобретают следующий вид:

RV - уравнения

$$R_t = i(UR_w - RU_w)$$

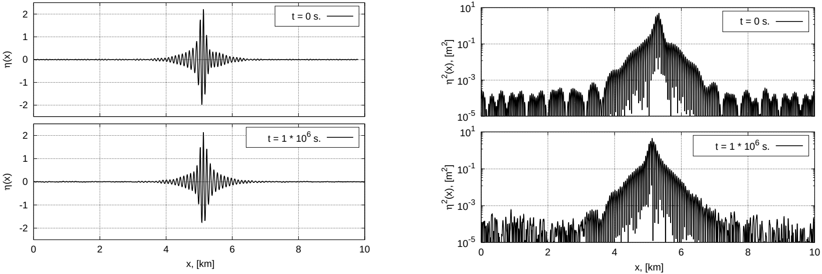
$$V_t = i(UV_w - RB_w) + g(R - 1)$$

здесь $U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$, $B = \hat{P}(V\,\bar{V})$, где $\hat{P} = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})$ – оператор проектирования

Dyachenko A. I. et al. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) //Physics Letters A. – 1996. – Т. 221. – №. 1-2. – С. 73-79.

Dyachenko A. I. On the dynamics of an ideal fluid with a free surface //Doklady Mathematics. – Pleiades Publishing, Ltd.(Плеадес Паблишинг, Лтд), 2001. – Т. 63. – №. 1. – С. 115-117.

Связанные структуры также получены и в полной системе нелинейных уравнений в конформных переменных. Ниже представлен пример структуры с крутизной $\mu \approx 0.2$ и соотношением амплитуд $\kappa = 1.5$.



Структура стабильно распространяется в течение 10^6 с., уровень излучения изменяется незначительно.

Заключение

- В модели суперкомпактного уравнения, а также в полной системе нелинейных уравнений в конформных переменных получены необычные связанные когерентные структуры, стабильно распространяющиеся по поверхности жидкости в течение сотен тысяч характерных периодов волн.
- В качестве начальных условий для нахождения таких структур использовались два одиночных бризера, найденные методом Петвиашвили и помещённые в одну точку расчётной области, а также известные би-солитонные решения НУШ.
- Структуры получены в широком диапазоне определяющих параметров — крутизны и соотношения амплитуд. Также, выявлены условия, при которых получить связанную структуру невозможно.

Заключение

- В модели суперкомпактного уравнения, а также в полной системе нелинейных уравнений в конформных переменных получены необычные связанные когерентные структуры, стабильно распространяющиеся по поверхности жидкости в течение сотен тысяч характерных периодов волн.
- В качестве начальных условий для нахождения таких структур использовались два одиночных бризера, найденные методом Петвиашвили и помещённые в одну точку расчётной области, а также известные би-солитонные решения НУШ.
- Структуры получены в широком диапазоне определяющих параметров — крутизны и соотношения амплитуд. Также, выявлены условия, при которых получить связанную структуру невозможно.

Спасибо за внимание!