Оптико-механическая аналогия и число солитонов, порождаемых нелинейным импульсом

А. М. Камчатнов
Институт спектроскопии РАН

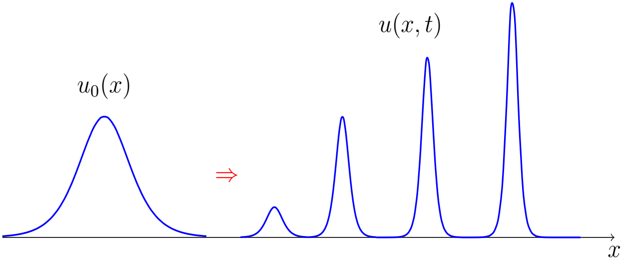
14 декабря 2020 г.

XXIX Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике-2020

Формула Карпмана

V. I. Karpman, Phys. Lett. A 25, 708 (1967)

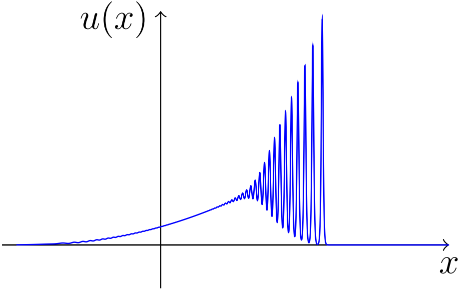
$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$



$$N = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{u_0(x)}\,dx$$

Дисперсионная ударная волна

На промежуточной стадии эволюции формируется дисперсионная ударная волна (А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 65, 590 (1973))



Её левый край распространяется с групповой скоростью $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$, соответствующей волновому числу $k(u)$.

Оптико-механическая аналогия

Движение пакета подчиняется уравнениям Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \qquad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

где $\omega = \omega(u(x,t),k)$, а значение фоновой амплитуды определяется уравнением гидродинамического (бездисперсионного) предела для простой волны:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_0(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad V_0(u) = \lim_{k\to 0}\frac{\omega(u,k)}{k}.$$

Тогда

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} - V_0\right)\frac{\partial u}{\partial x},$$

дают уравнение Эля [G. A. El, Chaos, 15, 037103 (2005)]

$$\frac{dk}{du} = \frac{\partial \omega / \partial u}{V_0(u) - \partial \omega / \partial k}.$$

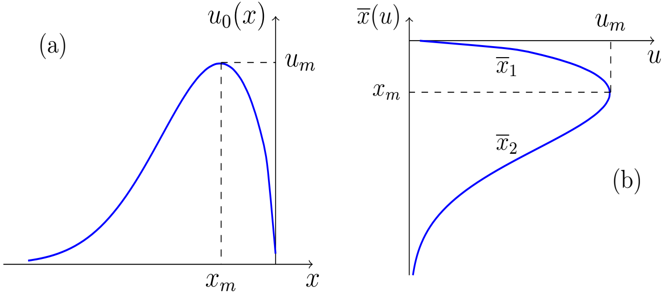
Его решение с начальным условием $k(0) = 0$ приводит к зависимости $k(u)$ вдоль траектории малоамплитудного края.

Путь малоамплитудного края

Решение уравнения $u_t + V_0(u)u_x = 0$ для эволюции фона:

$$x - V_0(u)t = \overline{x}(u),$$

где $\overline{x}(u)$ — обратная функция начального распределения u:



Двузначной функции $\overline{x}_{1,2}(u)$ отвечают две ветви решения.

Вдоль пути пакета $dx = v_g(u,k)dt$ и уравнение

$$\frac{dx}{du} - v_g(u,k(u))\frac{dt}{du} = 0$$

должно быть согласовано с $(x - V_0(u)t = \overline{x}(u))$

$$\frac{dx}{du} - \frac{dV_0}{du}t - V_0(u)\frac{dt}{du} = \frac{d\overline{x}}{du}.$$

Исключение dx/du даёт линейное уравнение

$$(v_g - V_0)\frac{dt}{du} - \frac{dV_0}{du}t = \frac{d\overline{x}}{du}.$$

Его решение $t = t(u)$ вместе с

$$x_L(u) = V_0(u)t(u) + \overline{x}(u)$$

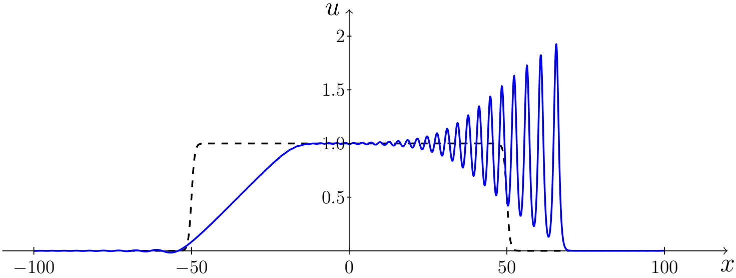
описывают движение пакета в параметрическом виде:

$$x_L(t) = (x_L(u), t(u)).$$

[A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. E 99, 012203 (2019)]

Эволюция «столика»

Численное решение уравнения КдФ приводит к профилю



Решение уравнения Эля

$$\frac{dk}{du} = \frac{2}{k} \quad \text{даёт} \quad k(u) = 2\sqrt{u} \quad \text{и} \quad k_L = k(u_0) = 2\sqrt{u_0}.$$

Число осцилляций в ДУВ

А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 93, 871 (1987)

Левый край ДУВ распространяется по столику с групповой скоростью

$$v_g = 6u_0 - 3k_L^2 = -6u_0,$$

которая отличается от фазовой скорости волны

$$V(k_L) = \frac{\omega}{k_L} = 6u_0 - k_L^2 = 2u_0.$$

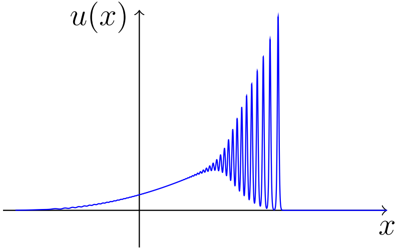
Поэтому число осцилляций внутри ДУВ увеличивается со скоростью

$$\frac{dN}{dt} = \frac{V - v_g}{\lambda} = \frac{k_L}{2\pi} \cdot 8u_0 = \frac{8}{\pi} u_0^{3/2}.$$

и

$$N(t) = \frac{8}{\pi} u_0^{3/2} t.$$

Число солитонов



В случае локализованного начального импульса число колебаний, вошедших в область ДУВ, равно

$$\frac{dN}{dt} = \int_0^t \frac{V - v_g}{\lambda}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left(\omega - k\frac{\partial\omega}{\partial k}\right) dt = \frac{S}{2\pi}.$$

При $t \to \infty$ эти колебания превращаются в солитоны и их число равно (A. M. Kamchatnov, arXiv:2008.09786):

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\omega - k\frac{\partial\omega}{\partial k}\right) dt.$$

Пример: обобщённое уравнение КдФ

Для уравнения

$$u_t + V_0(u)u_x + u_{xxx} = 0.$$

вычисление даёт

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{3}V_0(u_0(x))}\,dx.$$

Эта формула подразумевает устойчивость солитонов. Например, в случае

$$u_t + 6u^p u_x + u_{xxx} = 0$$

солитонные решения существуют при $p > 0$:

$$u_s(x,t) = \frac{u_m}{\mathrm{ch}^{2/p}\left[\frac{1}{2}p\sqrt{V_s}(x - V_s t)\right]},$$

где

$$u_m = \left[\frac{1}{12}V_s(p+1)(p+2)\right]^{1/p}.$$

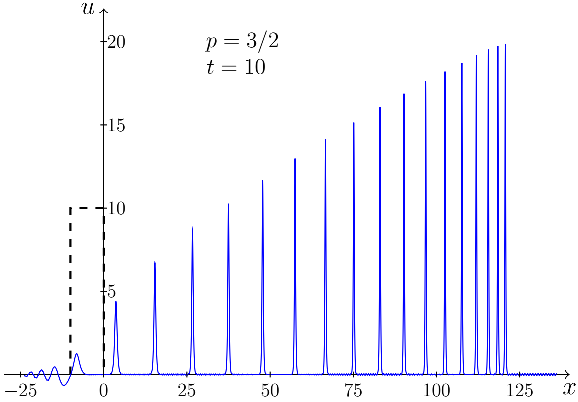
Однако они неустойчивы при $p > 4$
(E. A. Kuznetsov, Phys. Lett. A 101, 314 (1984)).

Для начального распределения в виде столика

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0, & -L \le x \le 0, \\ 0, & x < -L \quad \text{and} \quad x > 0, \end{cases}$$

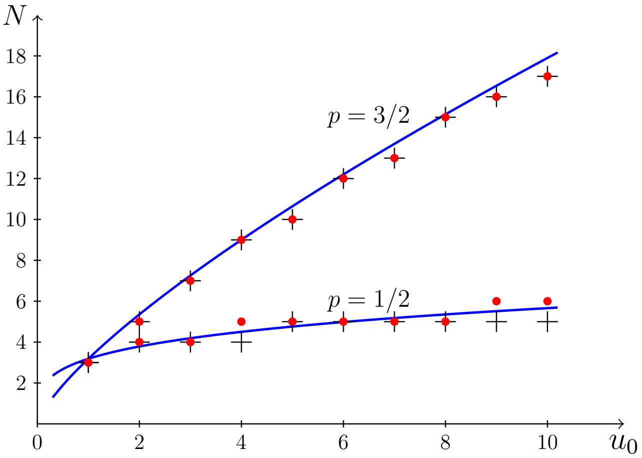
общее выражение сводится к асимптотической формуле $(N \gg 1)$

$$N \approx \frac{L}{\pi} u_0^{p/2}.$$



Число солитонов как функция u_0, $(L = 10)$

$$N \approx \frac{L}{\pi} u_0^{p/2}$$



Общее выражение для числа солитонов

Число солитонов, порождаемых импульсом простой волны с профилем $u_0(x)$ равно

$$N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(k\frac{\partial\omega}{\partial k} - \omega\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k[u_0(x)]dx$$

где $k(u)$ является решением уравнения Эля

$$\frac{dk}{du} = \frac{\partial\omega/\partial u}{V_0(u) - \partial\omega/\partial k}, \qquad k(0) = 0.$$

G. A. El, A. Gammal, E. G. Khamis, R. A. Kraenkel,
A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. A 76, 053813 (2007)

G. A. El, R. H. J. Grimshaw, N. F. Smyth, Physica D 237, 2423 (2008)

A. M. Kamchatnov, arXiv:2008.09786 (2020)

Спасибо за внимание!