Теорема об асимптотической редукции в бассейне с пологим берегом нелинейных уравнений мелкой воды со свободной границей к задаче с фиксированной границей

С.Ю.Доброхотов, Д.С.Миненков, В.Е.Назайкинский

Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН

Работа поддержана грантом РНФ 21-71-30011

XXX Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике

20-21 декабря 2020

Задача Коши для нелинейных уравнений мелкой воды

$$\widetilde{\eta}_t + \nabla((D(x) + \widetilde{\eta})\widetilde{\mathbf{u}}) = 0, \qquad \widetilde{\mathbf{u}}_t + \langle \widetilde{\mathbf{u}}, \nabla \rangle \widetilde{\mathbf{u}} + g\nabla\widetilde{\eta} = 0,$$

$$\widetilde{\eta}_{t=0} = \widetilde{\eta}^{(0)}(x), \qquad \widetilde{\mathbf{u}}_{t=0} = \widetilde{\mathbf{u}}^{(0)}(x),$$

- $D(x) = D(x_1, x_2)$ - глубина бассейна
- g - ускорение свободного падения
- $\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}(x,t)$ - возвышение свободной поверхности
- $\widetilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{u}}(x,t) = (\widetilde{u}_1(x,t), \widetilde{u}_2(x,t))$ - горизонтальная скорость

Решение определено в области, такой, что функция $D(x) + \widetilde{\eta}(x,t)$ в ней положительна, а на границе области равна нулю.

G.F. Carrier and H.P. Greenspan, Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech.* **4**(1), 97–109 (1958).

В. А. Фок, "О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике" *Вестн. Ленинградск. ун-та*, 1959, № 16, 67–70.

E. Pelinovsky and R. Mazova, "Exact Analytical Solutions of Nonlinear Problems of Tsunami Wave Run-Up on Slopes with Different Profiles," Natur. Hazards **6**, 227–249 (1992).

T. Vukašinac and P. Zhevandrov, "Geometric Asymptotics for a Degenerate Hyperbolic Equation," Russ. J. Math. Phys. **9** (3), 371–381 (2002).

S.Yu. Dobrokhotov and B. Tirozzi, "Localized Solutions of the One-Dimensional Nonlinear Shallow Water Equations with Velocity $c = \sqrt{x}$," Uspekhi Mat. Nauk **65** (1) (391), 185–186 (2010).

S.Yu.Dobrokhotov, V.E.Nazaikinskii, Characteristics with Singularities and the Boundary Values of the Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a Degenerate Wave Equation, Mathematical Notes, 2016, Vol. 100, No. 5

О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, "Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой", Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1969, ВИНИТИ, М., 1971, 7–252.

Асимптотическая задача: малое возмущение линейных уравнений

- Математическая формализация: вводим малый параметр $\varepsilon \geqslant 0$ и ищем зависящие от него решения вида

$$\widetilde{\eta} = \varepsilon\eta(x,t,\varepsilon),\ \widetilde{\mathbf{u}} = \varepsilon\mathbf{u}(x,t,\varepsilon),$$

где $\eta(x,t,\varepsilon),\ \mathbf{u}(x,t,\varepsilon)$ - гладкие функции; начальные условия ставим в виде

$$\widetilde{\eta}^{(0)} = \varepsilon\eta^{(0)}(x,\varepsilon), \qquad \widetilde{\mathbf{u}}^{(0)} = \varepsilon\mathbf{u}^{(0)}(x,\varepsilon)$$

- Получаем задачу Коши

$$\eta_t + \nabla(D(x)\mathbf{u}) = -\varepsilon\nabla(\eta\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u}_t + g\nabla\eta = -\varepsilon\langle\mathbf{u},\nabla\rangle\mathbf{u},$$

$$\eta_{t=0} = \eta^{(0)}(x,\varepsilon), \qquad \mathbf{u}_{t=0} = \mathbf{u}^{(0)}(x,\varepsilon).$$

Метод построения асимптотического решения

- На первый взгляд, систему

$$\eta_t + \nabla(D(x)\mathbf{u}) = -\varepsilon\nabla(\eta\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u}_t + g\nabla\eta = -\varepsilon\langle\mathbf{u}, \nabla\rangle\mathbf{u},$$

$$\eta_{t=0} = \eta^{(0)}(x,\varepsilon), \qquad \mathbf{u}_{t=0} = \mathbf{u}^{(0)}(x,\varepsilon).$$

естественно решать с помощью обычной регулярной теории возмущений по параметру ε , но сложность в том, что область $\Omega(t,\varepsilon)$, в которой определено решение, зависит от самого решения:

$$D(x) + \varepsilon\eta(x,t,\varepsilon) > 0 \quad \text{при } x \in \Omega(t,\varepsilon),$$

$$D(x) + \varepsilon\eta(x,t,\varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega(t,\varepsilon).$$

- Нужно сделать замену переменных, такую, чтобы в новых переменных область не зависела от решения.

- Пример: 1D, линейное дно – преобразование Кэрриера-Гринспена; задача в точности линеаризуется.

G. F. Carrier, H. P. Greenspan, “Water waves of finite amplitude on a sloping beach”, J. Fluid Mech., 4:1 (1958), 97–109.

С. Ю. Доброхотов, С. Б. Медведев, Д. С. Миненков, “О заменах, приводящих одномерные системы уравнений мелкой воды к волновому уравнению со скоростью звука c2=x”, Матем. заметки, 93:5 (2013), 716–727.

(в общем случае это невозможно, да и не нужно)

- Основная задача – «остановить» область.
- 1D case:

V.A. Chugunov, S.A. Fomin, W.Noland, B.R. Sagdiev, “Tsunami runup on a sloping beach”, https://doi.org/10.1002/cmm4.1081

CARRIER-GREENSPAN TRANSFORM

THE LINEAR WAVE EQUATION for $N(\tau, y), U(\tau, y)$:

$$N_\tau + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma^2 y U) = 0, \quad U_\tau + g N_y = 0, \qquad g = 1,\ \gamma = 1$$

CONSIDER the SYSTEM

$$x = y - N(\tau, y) + \frac{1}{2}U^2(\tau, y), \quad t = \tau + U(\tau, y)$$

Let it defines one-to-one map from $\{y \geq 0, \tau \in \mathbb{R}\}$ to the value area of the right hand side

THEN

$$\eta(t, x) = N(\tau, y) - \frac{1}{2}U^2(\tau, y), \quad v(t, x) = U(\tau, y)$$

are the solution to the **ORIGINAL NONLINEAR SYSTEM** in a **PARAMETRIC FORM**

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x}[v(\eta + \gamma x)] = 0,\ v_t + v v_x + g\eta_x = 0$$

Shallow water: slopping bottom, Carrier—Greenspan

$$\eta_t + \big((D(x)+\eta)u\big)_x = 0, \quad u_t + g\eta_x + uu_x = 0$$

Depth $D(x) = \gamma(x-a)$
:

)

Withount loss of generality: g=1, a=0,, $\gamma = 1$

Carrier—Greenspan transform.

$$t = \tau + U, \quad x = y - N + U^2/2, \quad \eta = N - U^2/2, \quad u = U \iff$$

$$J \equiv \frac{\partial(\tau,y)}{\partial(t,x)} = 1 + \eta_x - u_t - \eta_x u_t + \eta_t u_x, \; J^{-1} \equiv \frac{\partial(t,x)}{\partial(\tau,y)} = 1 - N_y + U_\tau - N_y U_\tau + N_\tau U_y + UU_y$$

Theorem (C—G).

If $J > 0$, $J < \infty$
then shallow water
is equivalent to linearized SW:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial[\eta + v^2/2]}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial[(\eta+x)v]}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\tau,y)}{\partial(t,x)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial \tau} + \dfrac{\partial N}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N}{\partial \tau} + \dfrac{\partial[yU]}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

)

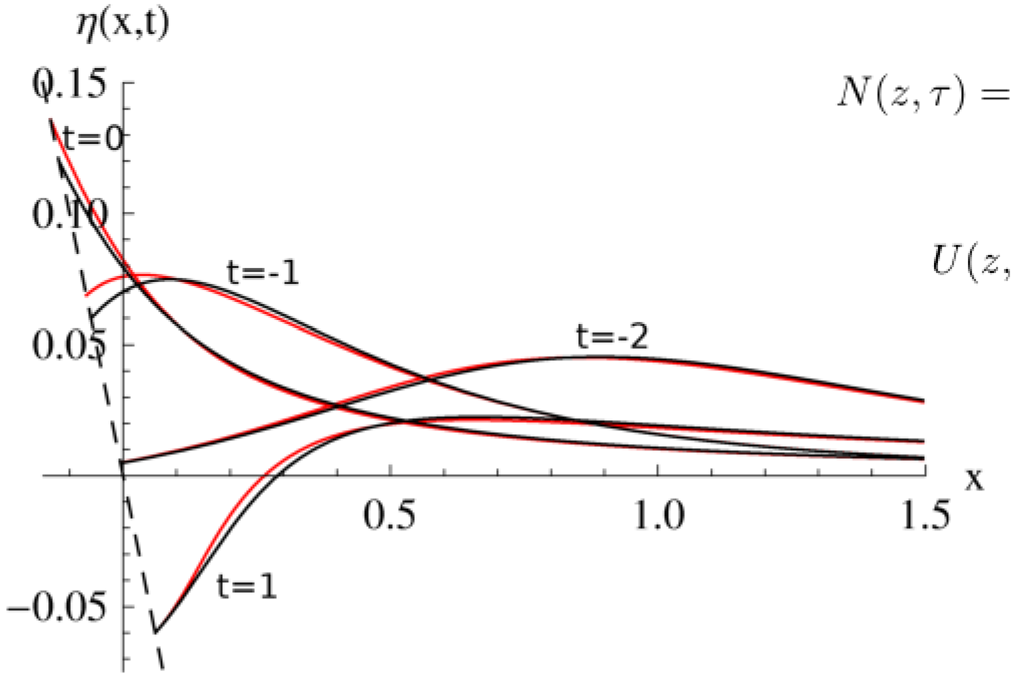
Reduced Carrier-Greenspan transformation (simplification):

$$D(y) = D(x) + \eta(x,t)\rho(x),\ \tau = t,\ N(y,\tau) = \eta(x,t),\ U(y,\tau) = u(x,t),$$

here $\rho(x)$ is a cut-off function, $\rho = 1$ near x^0 : $D(x) = 0$ and $\rho = 0$ outside of the neighborhood of the point x^0.

The main property: **the boundary becomes fixed**

Example: exact solitary solution



$$N(z,\tau) = \mathrm{Re}\,\frac{A(\tau+ib)}{(z-(\tau+ib)^2/4)^{3/2}},$$

$$U(z,\tau) = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{A}{(z-(\tau+ib)^2/4)^{3/2}},$$

- Пример: 1D, линейное дно – преобразование Кэрриера-Гринспена; задача в точности линеаризуется (в общем случае это невозможно, да и не нужно)
- Основная задача – «остановить» область.
- Предположение: $D(x)$ – гладкая функция, положительная в ограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$, отрицательная вне Ω_0 и такая, что на $\partial\Omega_0$ всюду выполняется условие $\nabla D(x) \neq 0$.
- Конструкция: рассмотрим области

$$\Omega_\lambda = \{x : D(x) + \lambda > 0\}$$

и гладкое семейство диффеоморфизмов

$$F(\,\cdot\,,\lambda) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(\,\cdot\,,0) = \mathrm{id}, \quad F(\,\cdot\,,\lambda)\,(\Omega_\lambda) = \Omega_0.$$

Замена переменных $y = F(x, \varepsilon\eta(x,t,\varepsilon))$ сводит задачу в область Ω_0.

Возможный способ построения семейства диффеоморфизмов

$$G(\,\cdot\,,\lambda) = (F(\,\cdot\,,\lambda))^{-1}$$

$$\frac{d}{d\lambda}G(y,\lambda) = -\frac{\nabla D(G(y,\lambda))}{|\nabla D(G(y,\lambda))|^2}$$

$$G(y,0) = y$$

Задача в области Ω_0

- Итак, делаем замену переменных $y = F(x, \varepsilon\eta(x,t,\varepsilon))$,

$$N(y,t,\varepsilon) = \eta(x,t,\varepsilon), \qquad \mathbf{U}(y,t,\varepsilon) = \mathbf{u}(x,t,\varepsilon)$$

- Обратная замена имеет вид $x = G(y, \varepsilon N(y,t,\varepsilon))$, $G(\,\cdot\,,\lambda) = (F(\,\cdot\,,\lambda))^{-1}$
- Уравнения в области Ω_0 для вектора $\Psi = \binom{N}{\mathbf{U}}$:

$$\mathcal{L}_D \Psi = \varepsilon \widetilde{B}(\Psi, \nabla\Psi, \varepsilon), \qquad \mathcal{L}_D = \begin{pmatrix} \partial_t & \nabla_y \circ D(y) \\ g\nabla_y & \partial_t \end{pmatrix}$$

(плюс соответствующие начальные условия).

- Эти уравнения уже можно решать с помощью регулярной теории возмущений

$$
\begin{aligned}
&B(\Psi, \nabla_y \Psi, \varepsilon) \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0 + \varepsilon \mathcal{J}_1)^{-1} N_y + \dfrac{\big\langle \nabla, D(y)\mathbf{U}\big\rangle - \big\langle (\mathcal{J}_0 + \varepsilon \mathcal{J}_1)^{-1}\nabla, \big(D(G(y, \varepsilon N)) + \varepsilon N\big)\mathbf{U}\big\rangle}{\varepsilon} \\ \mathcal{J}_2(\mathcal{J}_0 + \varepsilon \mathcal{J}_1)^{-1} \nabla \mathbf{U} - \big\langle \mathbf{U}, (\mathcal{J}_0 + \varepsilon \mathcal{J}_1)^{-1} \nabla \big\rangle \mathbf{U} - \dfrac{(\mathcal{J}_0 + \varepsilon \mathcal{J}_1)^{-1} - I}{\varepsilon} N_y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
G_y(y, \lambda) := \begin{pmatrix} G_{1y_1}(y, \lambda) & G_{1y_2}(y, \lambda) \\ G_{2y_1}(y, \lambda) & G_{2y_2}(y, \lambda) \end{pmatrix}, \qquad G_\lambda(y, \lambda) = \begin{pmatrix} G_{1\lambda}(y, \lambda) \\ G_{2\lambda}(y, \lambda) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathcal{J}_0(y, \tau, \varepsilon) = G_y^{\mathrm{T}}(y, \varepsilon N(y, \tau, \varepsilon)), \\
\mathcal{J}_1(y, \tau, \varepsilon) = N_y(y, \tau, \varepsilon) G_\lambda^{\mathrm{T}}(y, \varepsilon N(y, \tau, \varepsilon)), \qquad \mathcal{J}_2(y, \tau, \varepsilon) = N_\tau(y, \tau, \varepsilon) G_\lambda^{\mathrm{T}}(y, \varepsilon N(y, \tau, \varepsilon))
\end{gathered}
$$

$$\mathcal{L}_y\Psi + \varepsilon B(\Psi, \nabla_y\Psi, \varepsilon) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_0 \times [0,T], \qquad \Psi|_{t=0} = \Psi^{(0)}, \quad x \in \overline{\Omega}_0$$

$$\Psi^{(0)} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^{(0)} \varepsilon^j, \quad \Psi \sim \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon^j,$$

$$B(\Psi, \nabla\Psi, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j B_j(\Psi_0, \dots, \Psi_j, \nabla_y\Psi_0, \dots, \nabla_y\Psi_j),$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_y\Psi_0 = 0, && \Psi_0|_{t=0} = \Psi_0^{(0)}, \\ &\mathcal{L}_y\Psi_j = -B_{j-1}(\Psi_0, \dots, \Psi_{j-1}, \nabla_y\Psi_0, \dots, \nabla_y\Psi_{j-1}), && \Psi_0|_{t=0} = \Psi_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Предложение *Пусть v — гладкая вектор-функция в цилиндре $\overline{\Omega}_0 \times [0,T]$, а u_0 — гладкая функция в $\overline{\Omega}_0$. Тогда существует и единственно гладкое решение задачи Коши $\mathcal{L}_y u = v$, $u|_{t=0} = u_0$ в цилиндре $\overline{\Omega}_0 \times [0,T]$.*

Основной результат

- <u>Теорема:</u> *Асимптотическое решение задачи Коши для нелинейной системы уравнений мелкой воды существует и асимптотически единственно.*
- Ключевое утверждение в доказательстве:

Задача

$$\mathcal{L}_D\Psi = f(x,t), \qquad \Psi|_{t=0} = \Psi_0(x)$$

в цилиндре $\overline{\Omega_0} \times [0,T]$ *с гладкими начальными данными* $\Psi_0(x)$ *и правыми частями* $f(x,t,\varepsilon)$ *имеет единственное гладкое решение в* $\overline{\Omega_0} \times [0,T]$.

- Оператор в этой линейной задаче вырождается на границе. Доказательство утверждения опирается на униформизацию, приводящую к волновому уравнению на трехмерном многообразии с гипоэллиптическим оператором пространственной части.

С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, “Униформизация уравнений с граничным вырождением бесселева типа и квазиклассические асимптотики”, Матем. заметки, 107:5 (2020), 780–786.

Основное следствие. *Пусть функции* $N(y,t)$, $\boldsymbol{U}(y,t)$ *являются решениями с ограниченной энергией линеаризованной системы уравнений мелкой воды в области* Ω_0 *с фиксированной границей и* F*- некоторое отображение* $x = F(y, N(y,t))$ *переводящее область со свободной границей* Ω_t *в область*Ω_0*. Тогда заданные параметрически функции*

$$\eta(x,t) = N(y,t), \quad u(x,t) = \boldsymbol{U}(y,t), \quad x = F(y, N(y,t))$$

определяют главный член исходной нелинейной системы уравнений мелкой воды.

Возможная формула первого приближения

$$x = y - N(y,t)\frac{\rho(y)\nabla_y D(y)}{|\nabla_y D(y)|^2}, \quad \eta = N(y,t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{U}(y,t).$$

S.Yu.Dobrokhotov, D.S.Minenkov, V.E.Nazaikinskii, On asymptotic solutions of the nonlinear system of shallow water equations in a basin with a shallow beach, Russian Journal of Mathematical Physics, 2022, V. 29, N 1 (to appear)

Вопросы в практической реализации полученных формул связаны с тем, что решения линеаризованной задачи тоже асимптотические и имеют свои малые параметры, например, длину волны и при применении полученных формул следует учитывать соотношения между ними и ε.

Спасибо за внимание!

Будьте здоровы!