Уравнение Хассельманна для Изотропного Спектра: Три Измерения вместо Пяти

В. Геогджаев[1]

[1] Институт Океанологии им. П. П. Ширшова РАН

Abstract:
Одним из частных случаев эволюции спектров поверхностных волн на воде является эволюция изотропного спектра. Такая ситуация является в осонвном теоретической, однако имеет важное значение как для лучшего понимания общего (анизотропного) случая, так и для калибровки моделей.
Мы представляем метод, позволяющий упростить уравнения Хассельмана в изотропном случае, сведя интеграл взаимодействий с трёхмерного до двумерного. Учитывая общую симметрию по углу, это уменьшает размерность задачи с пяти до трёх.

Уравнение Хассельманна (кинетическое уравнение)

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \pi g^2 \int\limits_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4} T^2 \left(N N_3 N_4 + N_2 N_3 N_4 - N N_2 N_3 - N N_2 N_4\right) \times$$

$$\times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4)\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3\, d\mathbf{k}_4$$

Квадруплетная форма кинетического уравнения

Уравнение Хассельманна может быть переписано через интегрирование по квадруплетам взаимодействующих волн:

$$\frac{\partial\varepsilon(\omega,\theta)}{\partial t} = \frac{\pi}{2g^4}\int \tilde{T}^2 \,\Big(S(\,\omega/\tilde{\omega}_1,\, \theta-\tilde{\theta}_1,\, q) + S(\,\omega/\tilde{\omega}_2,\, \theta-\tilde{\theta}_2,\, q) -$$

$$- S(\,\omega/\tilde{\omega}_3,\, \theta-\tilde{\theta}_3,\, q) - S(\,\omega/\tilde{\omega}_4,\, \theta -$$

$$S(\omega_B,\theta_B,q) = \omega_B^{11}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4}{\tilde{\omega}_1^4\tilde{\omega}_3^4\tilde{\omega}_4^4} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}{\tilde{\omega}_2^4\tilde{\omega}_3^3\tilde{\omega}_4^4} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\tilde{\omega}_1^4\tilde{\omega}_2^4\tilde{\omega}_3^4} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4}{\tilde{\omega}_1^4\tilde{\omega}_2^3\tilde{\omega}_4^4}\right)$$

Здесь dq означает дифференциал по параметрам квадруплета. Можно, например, положить

$$dq = \delta(s-s')\, d\tilde{\mathbf{k}}_1\, d\tilde{\mathbf{k}}_3$$

где $s = \frac{|\mathbf{k}_1|+|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2|}$ и $s' = \frac{|\mathbf{k}_3|+|\mathbf{k}_4|}{|\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4|}$

Спектры Колмогорова–Захарова

Важным примером изотропных решений кинетического уравнения являются спектры Колмогорова–Захарова:

$$
\begin{aligned}
N_k^{(1)} &= c_p \left(\frac{P_0}{g^2}\right)^{1/3} \frac{1}{k^4}, \\
N_k^{(2)} &= c_q \left(\frac{Q_0}{g^{3/2}}\right)^{1/3} \frac{1}{k^{23/6}}.
\end{aligned}
$$

Первый из них представляет собой стационарное решение с потоком энергии в сторону высоких частот. Практически любой спектр волнения включает в себя диапазон частот, в котором реализуется этот спектр.
Второй спектр обеспечивает передачу числа волн N к низкочастотным модам, что также является важным процессом при развитии спектра волнения.

Чем важен изотропный спектр?

• Изотропные спектры Захарова–Колмогорова естественным образом возникают в процессе развития волнения
• В высоких частотах спектры приближаются к изотропным. Заметим, что высокие частоты требуют больше вычислительных мощностей при расчётах.
• Изотропные спектры представляют важный тестовый случай.

Трёхмерность вместо пятимерности

В кинетическом уравнении имеется 2-мерный спектр (частота и угол) и 3-мерный набор квадруплетов.
Для изотропного измерения естественным образом исчезает угловая зависимость спектра. Но набор квадруплетов остаётся тем же.
Мы показываем, что можно сократить размерность многообразия квадруплетов до двух, проведя интегрирование по одной из переменных.
Результирующие формулы слишком сложны для аналитических вычислений. Однако численные расчёты по ним делаются по той же самой схеме, что и для общего случая.

Квадруплеты и изотропия

Квадруплеты образуют трёхмерное многообразие. Наша цель — ввести на этом многообразии такие координаты, чтобы одна из них оказалась зависящей только от углов между векторами (а не от их длинн).
Мы будем использовать среднюю частоту ω_B для задания масштаба квадруплета. Резонансное условие

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = 2\omega_B$$

показывает, что длины нормированных векторов определяются двумя координатами. В качестве этих координат мы выберем λ_1 and λ_3 $(0 < \lambda_1, \lambda_3 < 1)$

$$\tilde{\omega}_1 = (1 - \lambda_1)s \quad \tilde{\omega}_2 = (1 + \lambda_1)s \quad \tilde{\omega}_3 = (1 - \lambda_3)s \quad \tilde{\omega}_4 = (1 + \lambda_3)s$$

Третьей координатой будет модуль $s = \frac{\omega_B^2}{gk_B}$.

Координаты

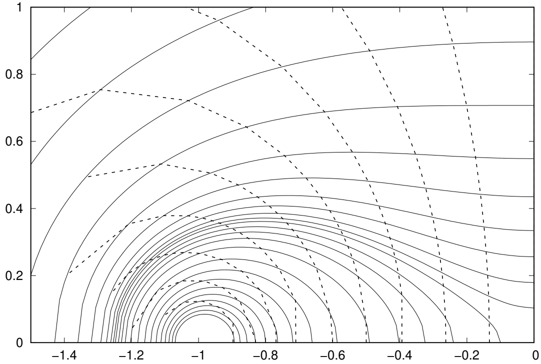

Рисунок изображает изолинии λ (пунктир) и изолинии s (сплошные).
Любые две точки с одинаковым s определяют резонансный квадруплет.

Масштабирование

λ_1 и λ_3 определяют соотношене между длинами векторов квадруплета. Чтобы эти длины не зависели от s мы должны масштабировать квадруплет. Масштабированный квадруплет состоит из нормированных векторов $\mathbf{k}_1/s$, $\mathbf{k}_2/s$, $\mathbf{k}_3/s$, $\mathbf{k}_4/s$. Их длины: $(1-\lambda_1)^2$, $(1+\lambda_1)^2$, $(1-\lambda_3)^2$, $(1+\lambda_3)^2$. Они не зависят от s. Кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \varepsilon(\omega)}{\partial t} = 2\pi\, g^{-4} \int \frac{\tilde{T}^2}{s^{23}} \Big(S(\,\omega/(1-\lambda_1),\, q_s) + S(\,\omega/(1+\lambda_1),\, q_s) -$$

$$- S(\,\omega/(1-\lambda_3),\, q_s) - S(\,\omega/(1+\lambda_3),\, q_s)\Big) \times$$

$$\times\, (1-\lambda_1)^3 (1-\lambda_3)^3 \frac{\partial \theta_1}{\partial s}\, \frac{\partial \theta_3}{\partial s}\, ds\, d\lambda_1\, d\lambda_3$$

$$S(\omega, q) =$$

$$= \omega_B^{11} \Bigg(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4}{(1-\lambda_1)^4 (1-\lambda_3)^4 (1+\lambda_3)^4} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}{(1-\lambda_1)^4 (1+\lambda_1)^4 (1+\lambda_3)^4} -$$

$$- \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{(1-\lambda_1)^4 (1+\lambda_1)^4 (1-\lambda_3)^4} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4}{(1-\lambda_1)^4 (1+\lambda_1)^4 (1+\lambda_3)^4} \Bigg)$$

Теперь мы можем взять интеграл по s и получить коэффициент F

$$F(\lambda_1, \lambda_3) = \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\tilde{T}^2}{s^{23}} (1-\lambda_1)^3 (1-\lambda_3)^3 \frac{\partial \theta_1}{\partial s} \frac{\partial \theta_3}{\partial s} \, ds$$

Таким образом, интеграл в кинетическом уравнении сводится к двумерному

$$\frac{\partial \varepsilon(\omega)}{\partial t} = 2\pi \, g^{-4} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 F(\lambda_1, \lambda_3) \, (S(\,\omega/(1-\lambda_1),\, q_s) + S(\,\omega/(1+\lambda_1),\, q_s) -$$

$$- S(\,\omega/(1-\lambda_3),\, q_s) - S(\,\omega/(1+\lambda_3),\, q_s)) \, d\lambda_1 \, d\lambda_3$$

Численное интегрирование

Программа, написанная автором, может использовать для вычислений любую сетку квадруплетов. Если взять сетку, основанную на координатах λ, то в изотропном случае переменная s не влияет на вычисление взаимодействия.
Таким образом, можно инициализировать сетку обычным образом, а потом просуммировать коэффициенты узлов с одинаковым s.

Дальнейшее развитие

Предполагается исследовать ядро $F(\lambda_1, \lambda_3)$, определить его конкретный вид и найти наиболее существенные области взаимодействия.

Выводы

• Для изотропных спектров можно уменьшить размерность интегрирования с 5 до 3.
• Квадруплетную сетку, подготовленную для изотропного случая, можно использовать и в общем случае.
• Исследование изотропных спектров позволяет быстро производить вычисления, при этом сохраняя многие свойства спектров.
• В изотропном случае упрощается вид 4-волновых взаимодействий.