К неустойчивости одномерных состояний динамического равновесия электронного газа Власова – Пуассона

Зинина Виктория

Новосибирский государственный университет

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Ю.Г. Губарев

Постановка задачи

$$f_t + vf_x + \varphi_x f_v = 0$$

$$\varphi_{xx} = 4\pi\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v,t)dv \, - \, n_e\right)$$

$$f(x,v,t) \geq 0; \; f(x,v,0) = f_0(x,v)$$

Здесь f – функция распределения электронов, t – время, x и v – координаты и скорости электронов, $\varphi(x,t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля, n_e – плотность электронов в состоянии глобального термодинамического равновесия, f_0 , φ_0 – начальные данные для функций f и φ.

Предполагается, что по аргументу x функция f распределения электронов или периодична, или ей присуще подходящее асимптотическое поведение при $|x| \to \infty$, а по аргументу v она затухает при $|v| \to \infty$.

Закон сохранения энергии

$$E \equiv \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{+\infty} v^2 f dx dv + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx = const$$

Интеграл движения

$$C \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) dx dv = const$$

$\Phi = \Phi(f)$ – произвольная функция своего аргумента

Стационарные решения

$$f = f^0(v), \qquad \varphi = \varphi^0 = const\colon \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(v)dv = n_e$$

f^0, φ^0 – функция распределения электронов и потенциал самосогласованного электрического поля в некотором состоянии локального термодинамического равновесия

Постановка линеаризованной задачи

$$f'_t + vf'_x + \varphi'_x f^0_v = 0, \qquad \varphi'_{xx} = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x,v,t)dv$$

$$f'(x,v,0) = f'_0(x,v)$$

f', φ' – малые возмущения некоторого состояния локального термодинамического равновесия

Линейный аналог функционала полной энергии

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Phi}{df^2}(f^0) f'^2 dx dv + \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx = const$$

$f' \to 0$ при $|x| \to \infty$ или периодично по x

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\varphi^0}{2} = -\frac{d\Phi}{df}(f^0)$$

Достаточное условие линейной устойчивости (теорема Ньюкомба – Гарднера – Розенблюта)

$$\frac{1}{v}\frac{df^0}{dv} \le 0$$

Пример

Стационарные решения

$$f^0 = \frac{n_e}{\pi} e^{-v^2}$$
$$\varphi^0 = const$$

Контрпример к спектральным теореме Ньюкомба – Гарднера и критерию Пенроуза

$$\varphi' = ce^{\alpha t}, \qquad \alpha, c \equiv const, \qquad \alpha > 0$$

$$f' = \begin{cases} (x - vt)e^{vt-x}, & x > vt, \qquad v > 0 \\ (x - vt)e^{x-vt}, & x < vt, \qquad v < 0 \end{cases}$$

Замена независимых переменных

$$v = u(x, \nu, t), \qquad \frac{d\nu}{dt} \equiv 0$$

$$f(x, v, t) = \rho(x, \nu, t)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \nu, t)\right)^{-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \nu, t) \neq 0$$

Постановка задачи

$$u_t + uu_x = \varphi_x, \qquad \rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$\varphi_{xx} = 4\pi\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, \nu, t)d\nu - n_e\right)$$

$$u(x, \nu, 0) = u_0(x, \nu), \qquad \rho(x, \nu, 0) = \rho_0(x, \nu)$$

$$\rho \to 0 \text{ при } |\nu| \to \infty$$

Здесь ν – лагранжевы координаты электронов, u – поле скорости, ρ – поле плотности электронов, u_0 и ρ_0 – начальные данные для полей u и ρ.

Интеграл энергии

$$E_2 \equiv \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 d\nu dx + \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx = const$$

$\rho, u \ \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ или периодичны по x

---

Интеграл движения

$$\mathrm{C}_1 \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\text{æ}) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\nu dx = const; \ \ \text{æ} \equiv \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^{-1} : \quad \text{æ}_t + u\text{æ}_x = 0$$

$\Phi_1 = \Phi_1(\text{æ})$ – произвольная функция своего аргумента

Стационарные решения

$$u = u^0(\nu), \qquad \rho = \rho^0(\nu), \qquad \varphi = \varphi^0 = const, \qquad æ = æ^0(\nu)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0(\nu) d\nu = n_e \ , \qquad \rho^0 \to 0 \text{ при } |\nu| \to \infty$$

Постановка линеаризованной задачи

$$u'_t + u^0 u'_x = \varphi'_x, \qquad \rho'_t + u^0 \rho'_x + u'_x \rho^0 = 0, \qquad æ'_t + u^0 æ'_x = 0$$

$$\varphi'_{xx} = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x, \nu, t) d\nu, \qquad \rho' \to 0 \text{ при } |\nu| \to \infty$$

$$u'(x, \nu, 0) = u'_0(x, \nu), \qquad \rho'(x, \nu, 0) = \rho'_0(x, \nu), \qquad æ'(x, \nu, 0) = æ'_0(x, \nu)$$

Линейный аналог функционала полной энергии

$$E_3 \equiv \frac{1}{2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\rho^0 u'^2 + 2u^0 u'\rho' + \frac{d^2\Phi_1}{dæ^2}(æ^0)æ'^2\frac{du^0}{d\nu}\right]d\nu dx + \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_x'^2 dx = const$$

$$\rho', u', æ' \to 0 \text{ при } |x| \to \infty \text{ или периодичны по } x$$

$$\frac{u^{02}}{2} - \frac{\varphi^0}{2} = -\frac{d\Phi_1}{dæ}(æ^0)$$

Поле лагранжевых смещений

$$\xi = \xi(x,\nu,t): \quad \xi_t = u' - u^0\xi_x$$

Преобразованная линеаризованная задача

$$\xi_{tt} + 2u^0\xi_{xt} + u^{02}\xi_{xx} = \varphi'_x$$

$$\varphi'_{xx} = -\,4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^0\xi_x d\nu$$

$$\rho' = -\rho^0\xi_x, \qquad \frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{du^0}{d\nu}\xi_x, \qquad æ' \equiv 0$$

$$\xi(x,\nu,0) = \xi_0(x,\nu), \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,\nu,0) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0(x,\nu)$$

$$\xi \to 0 \text{ при } |\nu| \to \infty$$

Достаточное условие линейной устойчивости

$$æ' \equiv 0 \Rightarrow \ \rho' = æ^0 \frac{\partial u'}{\partial \nu}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (u^0 æ^0 u'^2)\Big|_{\nu\to-\infty}^{\nu\to+\infty} dx \to 0$$

$$E_3 \equiv \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} [\rho^0 - (u^0 æ^0)_\nu] u'^2 d\nu dx + \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx = const\,, \qquad u^0 \frac{dæ^0}{d\nu} \le 0$$

Преобразованный линейный аналог функционала полной энергии

$$E_3 \equiv \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} (\rho^0 \xi_t^2 - \rho^0 u^{02} \xi_x^2) d\nu dx + \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx = const$$

$\xi \to 0$ при $|x| \to \infty$ или периодично по x

Функционал Ляпунова

$$M \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi^2 d\nu dx$$

$$\frac{dM}{dt} = 2\iint_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi \xi_t d\nu dx, \qquad \frac{d^2M}{dt^2} = 2\iint_{-\infty}^{+\infty} (\rho^0 \xi_t^2 + \rho^0 \xi \xi_{tt})\, d\nu dx$$

Основное дифференциальное неравенство

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\nu \frac{dM}{dt} + 2(\nu^2 + \alpha_1')M \geq 0; \quad \nu, \alpha_1' > 0$$

Дополнительные условия

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\alpha_1'}}\right)>0;n=0,1,2,\ldots$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\alpha_1'}}\right)\geq 2\left(\nu+\frac{\alpha_1'}{\nu}\right)\mathrm{M}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\alpha_1'}}\right),\qquad M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\alpha_1'}}\right)=M(0)\exp\left(\frac{\nu\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\alpha_1'}}\right)$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\alpha_1'}}\right)=\frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\nu\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\alpha_1'}}\right),\qquad M(0)>0,\qquad \frac{dM}{dt}(0)\geq 2\left(\nu+\frac{\alpha_1'}{\nu}\right)\mathrm{M}(0)$$

Априорная оценка снизу

$$M(t)\geq C\exp(\nu t),C\equiv const>0$$

Пример

Стационарные решения

$$\rho^0 = e^{-v^2}, \qquad u^0 \equiv v, \qquad \varphi^0 = const$$

Контрпример к спектральным теореме Ньюкомба – Гарднера и критерию Пенроуза

$$\varphi' = ce^{\alpha t}, \qquad \alpha, c \equiv const, \qquad \alpha > 0$$

$$\xi = \begin{cases} e^{\nu t - x}\left(\nu - \frac{t}{2}\right), & \nu > 0, \qquad x > 0 \\ e^{x - \nu t}\left(\nu + \frac{t}{2}\right), & \nu < 0, \qquad x < 0 \end{cases}$$

Спасибо за внимание!