Точные решения задачи о динамике жидкости со свободной поверхностью, помещенной между двумя сближающимися вертикальными стенками

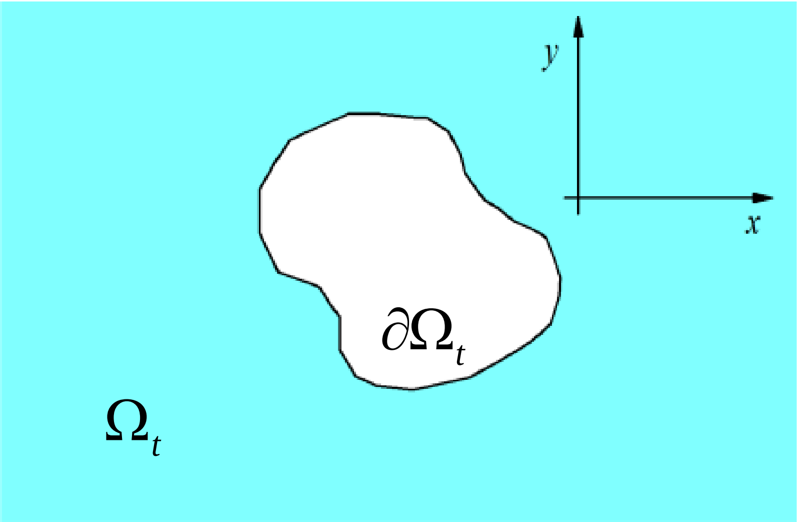
Журавлева Е.Н.[1,2], Зубарев Н.М.[3,4],
Зубарева О.В.[3], Карабут Е.А.[1,2]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, SB, RAS, Novosibirsk, Russia*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[3]*Institute of Electrophysics, UD, RAS, Ekaterinburg, Russia*
[4]*Lebedev Physical Institute, RAS, Russia*

XXX Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике,
20-21 декабря 2021 г., Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН

Постановка задачи

Рассматривается плоское потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. Она занимает изменяющуюся область Ω_t в плоскости $\{x, y\}$ со свободной границей $\partial\Omega_t$.



$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x, \qquad v_t + uv_x + uv_y = -p_y,$$

$$u_x = -v_y, \qquad u_y = v_x \quad \text{in} \quad \Omega_t,$$

где $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ – x и y компоненты вектора скорости; $p(x, y, t)$ – давление.

В отсутствие внешних сил и капиллярности динамическое и кинематическое граничные условия можно записать как

$$p = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p_t + up_x + vp_y = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega_t.$$

Известны точные частные решения этой задачи – нестационарные течения с линейным полем скоростей (u и v являются линейными функциями x и y), открытые Дирихле [1]. Для этих течений граница жидкости представляет собой параболу, эллипс, гиперболу или прямую [1-8].

Flows with linear velocity field

1. *Direchlet G.L.*Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. J. Reine Angew. Math., **58** (1861) P. 181–216.

2. *Борисов А.В., Мамаев И.С. (ред.)* Динамика жидких и газовых эллипсоидов.—М.—Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2010. — 364 с.

3. *Овсянников Л.В.* Общие уравнения и примеры. В книге: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск, "Наука"(1967) С. 5–75

4. *Longuet-Higgins M.S.* A class of exact, time-dependent, free-surface flows. J. Fluid. Mech., **55** (1972) No.3, 529-543.

5. *Налимов В.И., Пухначев В.В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей // Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1975.

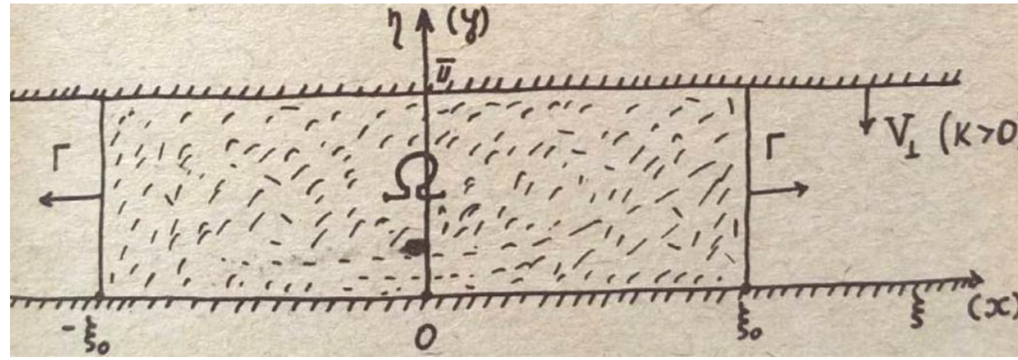
6. *Пухначев В.В.* О движении жидкого эллипса // Динамика сплошной среды. Новосибирск, ИГ СО АН СССР. 1978. Вып. 33. С. 68-75.

7. *Лаврентьева О.М.* О движении жидкого эллипсоида // ДАН СССР.—1980.—Т.253, № 4. С. 828-831.

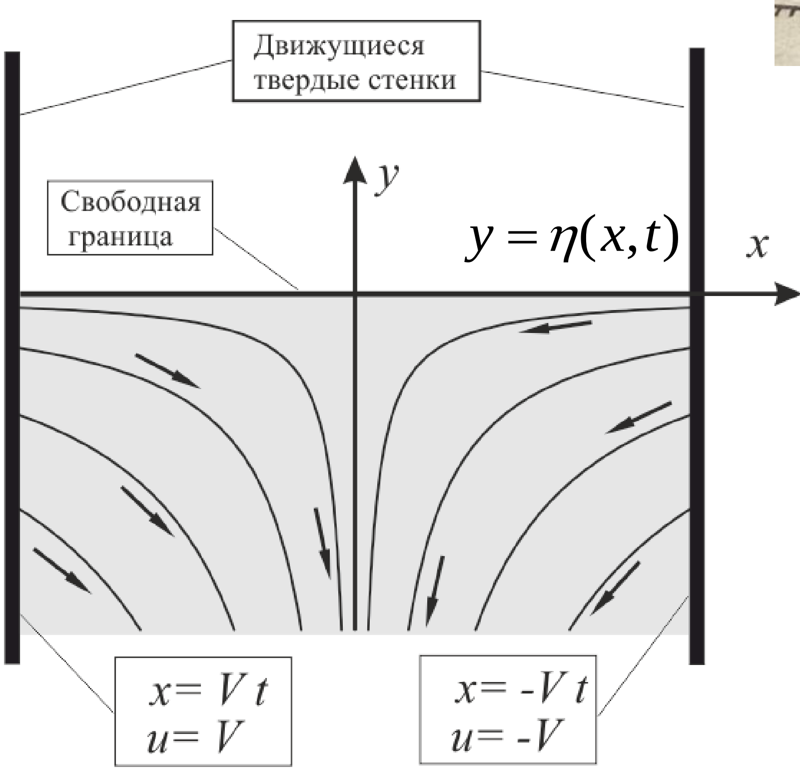
8. *Лаврентьева О.М.* Об одном классе движения жидкого эллипсоида // ПМТФ.—1984.— Т. 25, №4. С. 148-153.

Комбинированные граничные условия

Решение Овсянникова “балка под прессом” [3].



$$u = \frac{k\xi}{(1-kt)^2} = \frac{kx}{1-kt}, \quad v = -k\eta = -\frac{ky}{1-kt}$$



$$\boxed{\begin{aligned} &\eta = 0, \quad p = -y^2/t^2, \\ &u = x/t, \quad v = -y/t. \end{aligned}}$$

Гибридные граничные условия

Обозначим абсолютное значение скорости каждой стенки за V. Их положения задаются уравнениями

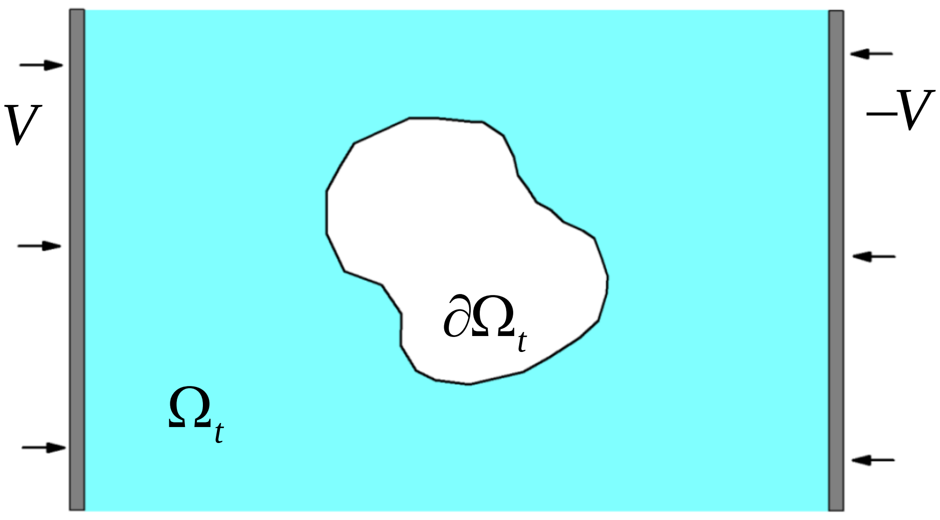
$$x = \pm Vt$$

т.е. они сталкиваются в момент $t = 0$ (нас будет интересовать поведение жидкости при $t < 0$). Кинематические условия на стенках имеют вид:

$$u\,|_{x=\pm Vt} = \pm V,$$

или, в комплексной форме,

$$\operatorname{Re} U = \pm V \quad \text{at} \quad \operatorname{Re} z = \pm Vt.$$



$$U(z,t) = u(x,y,t) - iv(x,y,t),$$
$$z = x + iy$$

Комплексная скорость U – аналитическая функция переменной z в области Ω_t.

В решениях уравнений движения неизбежно возникают сингулярности за конечное время: это время ограничено сверху моментом столкновения стенок.

Flows with nonlinear velocity field

[1] F. John, Two-dimension potential flows with a free boundary, Commun. Pure Appl. Maths 6, 497–503 (1953).

[2] E.A. Karabut, E.N. Zhuravleva, Unsteady flows with a zero acceleration on the free boundary, J. Fluid Mech., 754, 308-331 (2014).

[3] E.A. Karabut, E.N. Zhuravleva, Unsteady flows with a zero acceleration on the free boundary, Docl. Phys., 59:10, 480-483 (2014).

[4] V.E. Zakharov, Report "Are Equations of Deep Water with a Free Surface Integrable?", Russian-French Workshop on Mathematical Hydrodynamics, LIH SB RAS & NSU, Novosibirsk, Russia (2016).

[5] N.M. Zubarev, E.A. Karabut, Exact Local Solutions for the Formation of Singularities on the Free Surface of an Ideal Fluid, JETP Letters, vol. 107, no. 7, pp. 412–417 (2018).

[6] E.N. Zhuravleva, N.M. Zubarev, O.V. Zubareva, E.A. Karabut, Algorithm for Constructing Exact Solutions of the Problem of Unsteady Plane Motion of a Fluid with a Free Surface, JETP Letters, vol. 110, no. 7, pp. 452–456 (2019).

[7] V.E. Zakharov, Integration of a deep fluid equation with a free surface, Theoretical and Mathematical Physics, 202(3), 285-294 (2020).

[8] E.A. Karabut, E.N. Zhuravleva, N.M. Zubarev, Application of transport equations for constructing exact solutions for the problem of motion of a uid with a free boundary, J. Fluid Mech. vol. 890, A13 (2020).

Два класса точных решений

Течения описываются комплексными уравнениями Хопфа [2,6]:

$$\boxed{U_t + UU_z = 0} \qquad \boxed{U_z + UU_t = 0}$$

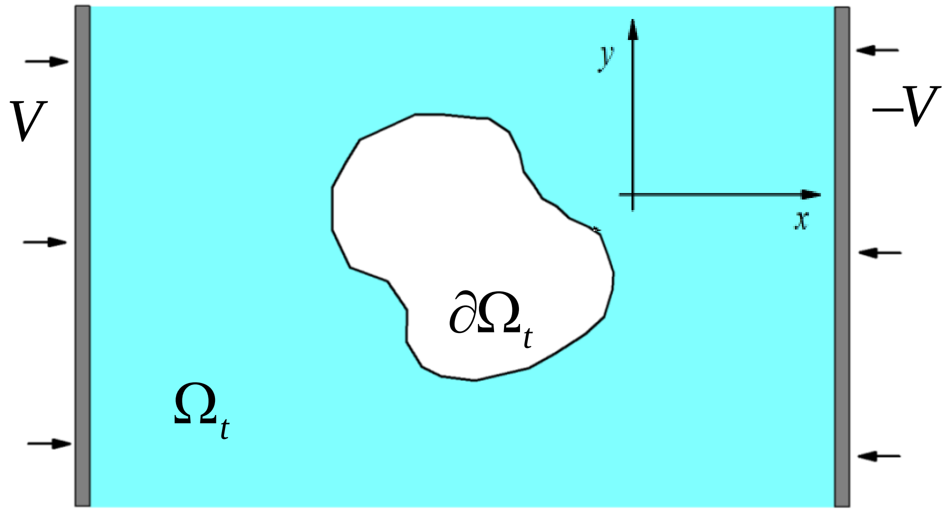
Общее свойство соответствующих нестационарных течений заключается в том, что ускорение на свободной границе равно нулю,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{on} \qquad \partial\Omega_t.$$

Осуществим преобразование годографа (выбираем U в качестве независимой переменной и z в качестве неизвестной функции). Получим:

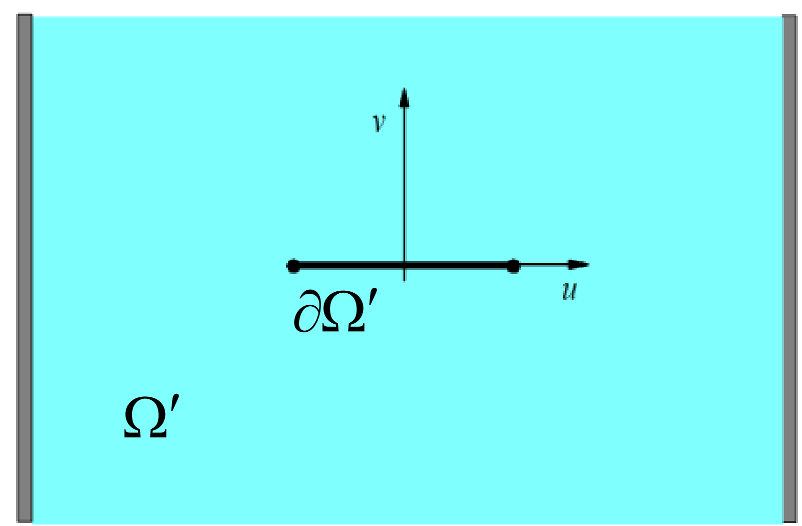
$$\boxed{z = F(U) + tU} \qquad \boxed{z = F(U) + t/U}$$

Решения содержат произвольную комплексную функцию F.



$$u = \text{const}, \quad \text{on} \quad \partial\Omega_t,$$
$$v = \text{const} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_t,$$
$$V = \text{const}.$$

$$z \to V$$

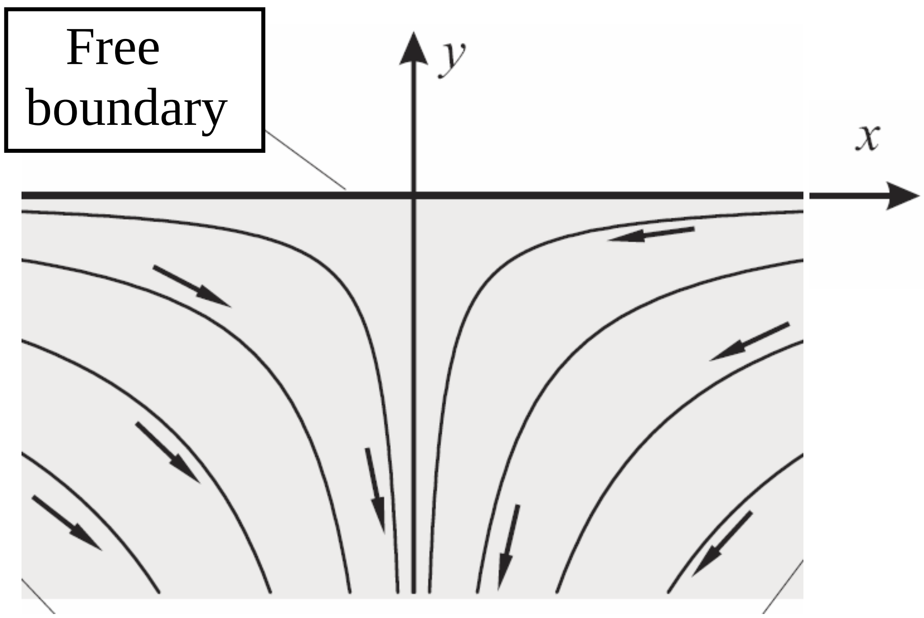


Интерпретация решений

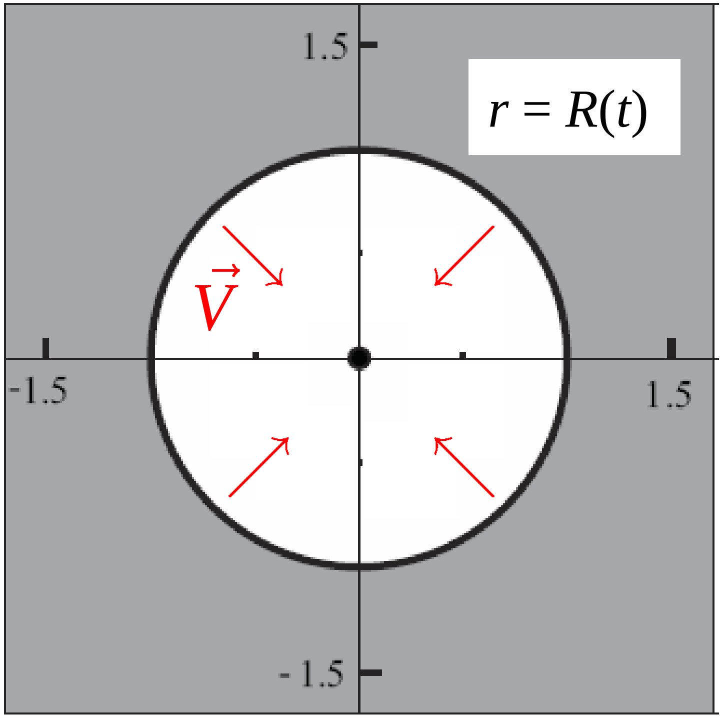
Полученные решения можно интерпретировать как описывающие нелинейные возмущения автомодельных течений:

$$\boxed{U = z / t}$$

$$\boxed{U = t / z}$$

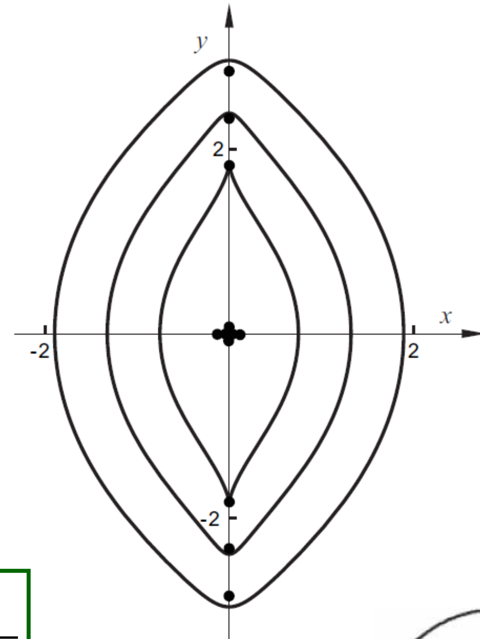


V.E. Zakharov, Report “Are Equations of Deep Water with a Free Surface Integrable?”, Russian-French Workshop on Mathematical Hydrodynamics, LIH SB RAS & NSU, Novosibirsk, Russia (2016).



Class II: Evolution of 2D cavity in a fluid

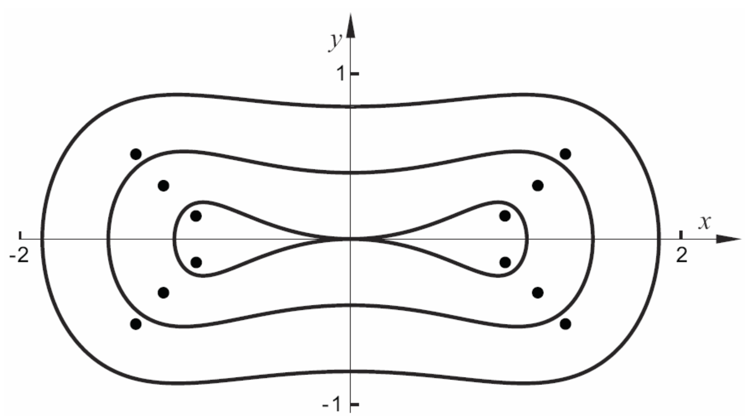
$$z = F(U) + \frac{t}{U}$$

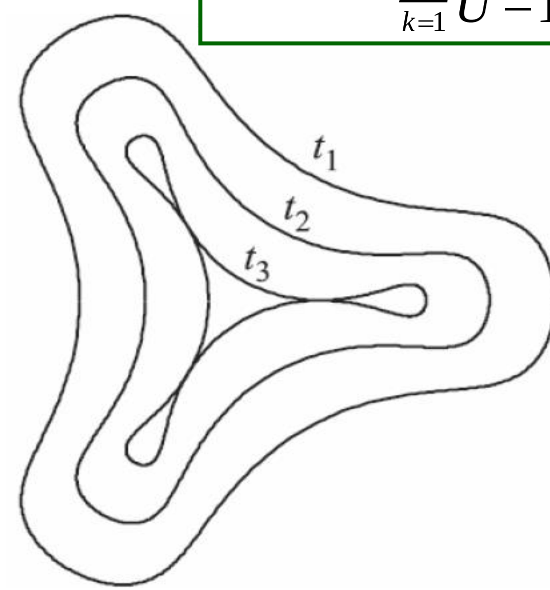


$$F(U) = \frac{1}{U+2i} + \frac{1}{U-2i}$$

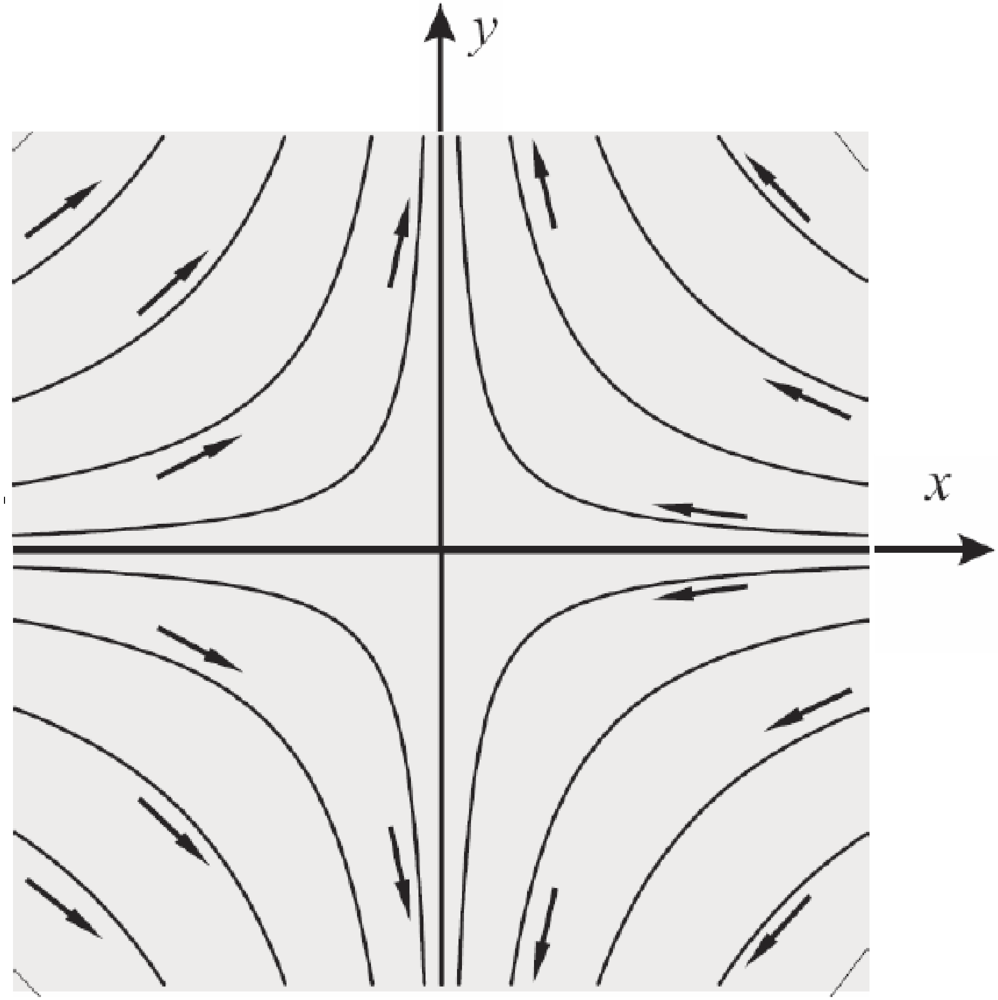
$$F(U) = -\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{U - 1.5\exp(2ik\pi/3)}$$

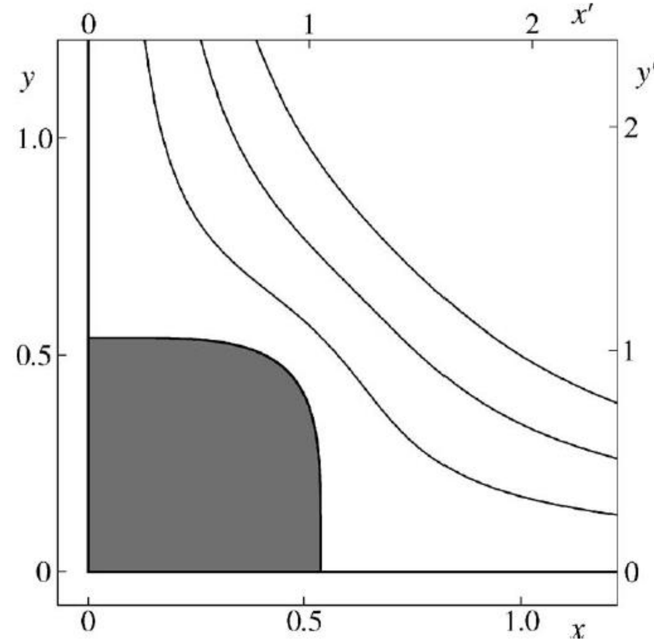
$$F(U) = -\frac{1}{U+2i} - \frac{1}{U-2i}$$





Class I: Evolution of 2D cavity in a fluid





N.M. Zubarev and O.V. Zubareva, Exact solutions for shapes of two-dimensional bubbles in a corner flow, Physics of Fluids 19, 102110 (2007).

Схлопывание пузыря (без стенок)

Рассмотрим течение со следующим начальным распределением скоростей:

$$U(z,-1) = -z - \frac{1}{z}.$$

Решение уравнения Хопфа дает

$$\boxed{z = \left(t + \frac{1}{2}\right)U \pm \frac{1}{2}\sqrt{U^2 - 4}.}$$

Особенностью этого класса решений является отсутствие вертикальной скорости на свободной границе:

$$v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_t.$$

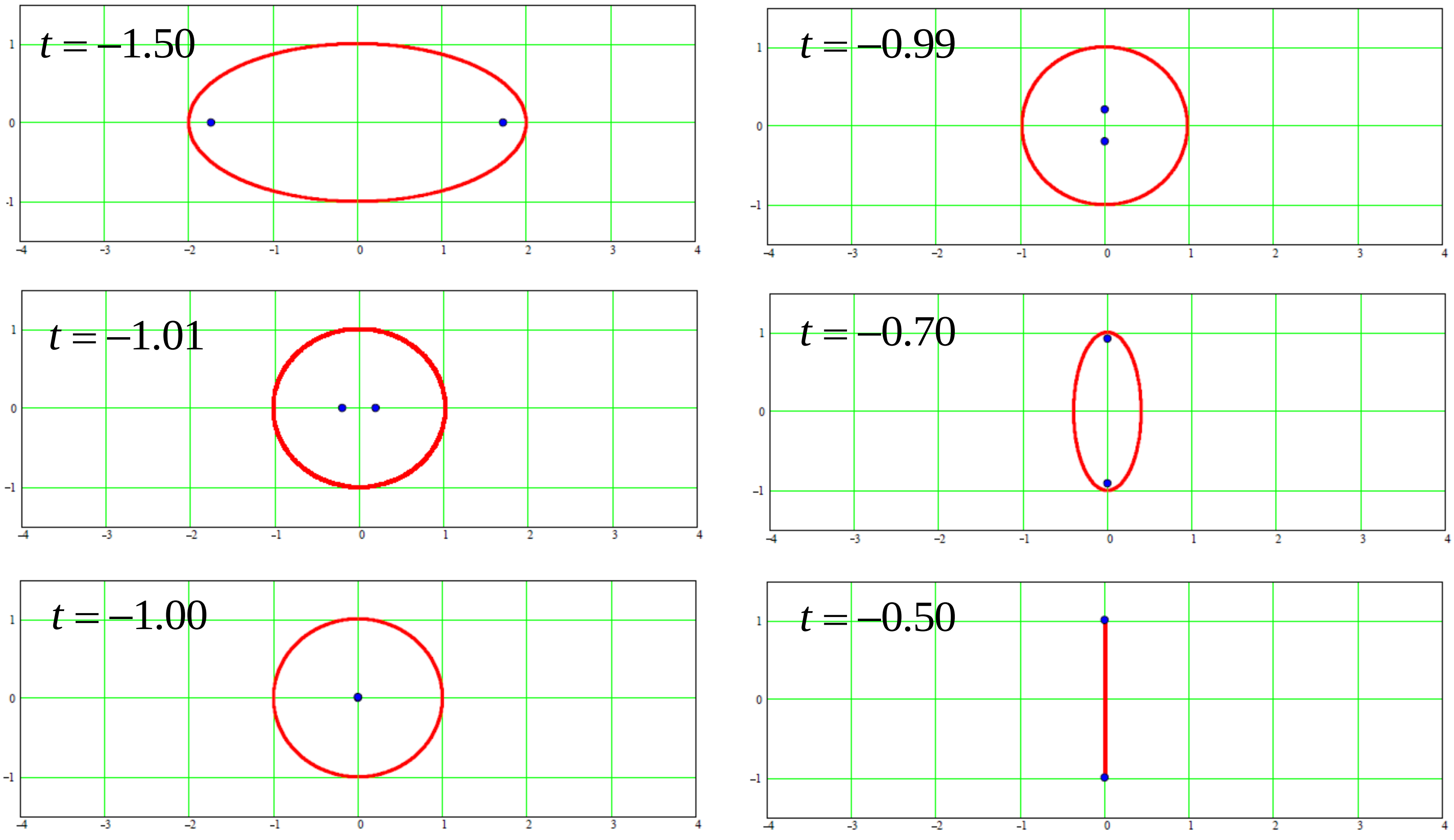
Тогда форма границы находится из условия $U = u$. Это – деформируемый течением эллиптический пузырь:

$$\boxed{\frac{x^2}{(1+2t)^2} + y^2 = 1}$$

Он схлопывается в отрезок в момент $t = -0.5$.

Особые точки поля скоростей даются условием $\dfrac{\partial z}{\partial U} = 0.$

Находим их положение: $z_{1,2}(t) = \pm 2\dfrac{t^2 + t}{\sqrt{t^2 + t}}.$



Схлопывание пузыря (со стенками)

Пусть теперь жидкость помещена между двумя вертикальными стенками, сближающимися с постоянными скоростями V. В начале координат имеется пузырь в вертикальным размером $2R$. Считаем, что решение симметричны относительно осей x и y, так что задачу достаточно рассматривать в области $x < 0$ и $y < 0$, в которой $0 < u < V$ и $v < 0$.

Точное решение (a – геометрический параметр):

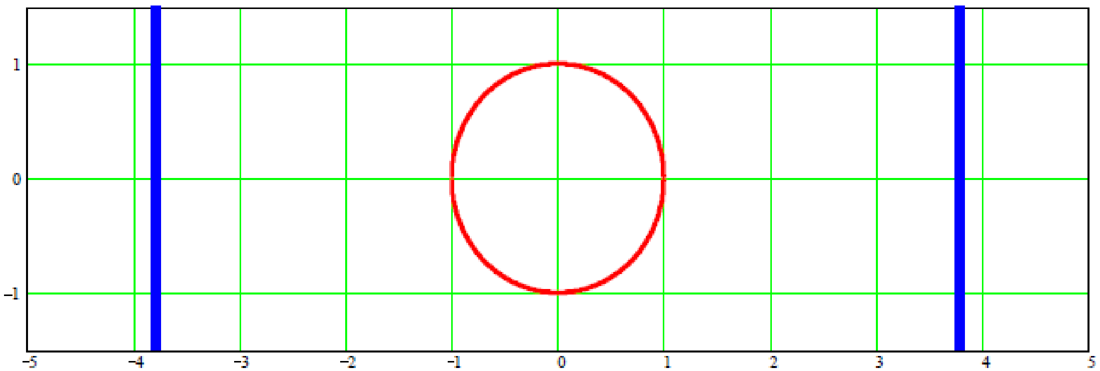
$$Z = Ut - R\,\frac{\operatorname{asin}\sqrt{\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi U}{2V}\right) - a}{1-a}}}{\operatorname{asinh}\sqrt{\dfrac{a}{1-a}}}.$$

Оно является периодическим обобщением рассмотренного ранее решения для одиночного пузыря,

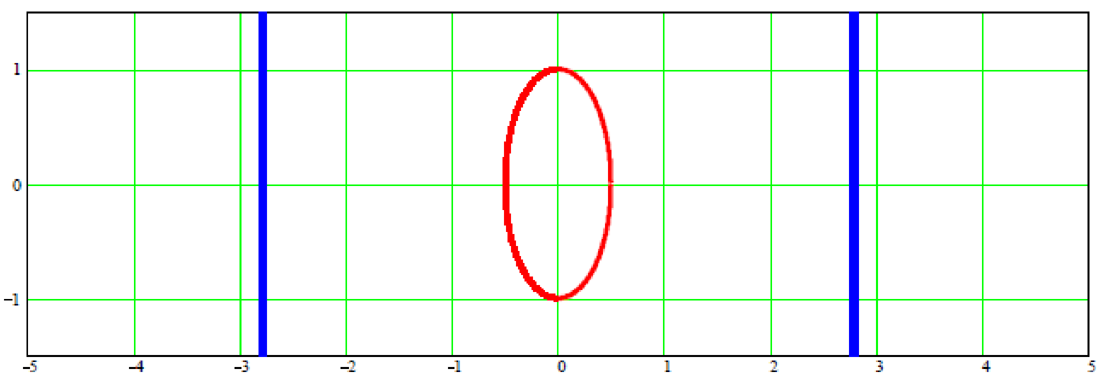
$$z = \left(t + \frac{1}{2}\right)U \pm \frac{1}{2}\sqrt{U^2 - 4}.$$

$V = 1 \qquad R = 1 \qquad a = 0.5$

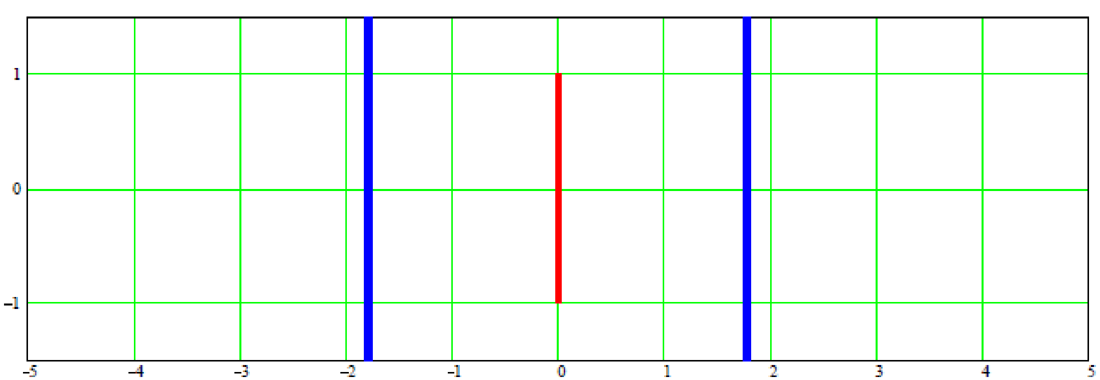
$t = -2$



$t = -1$

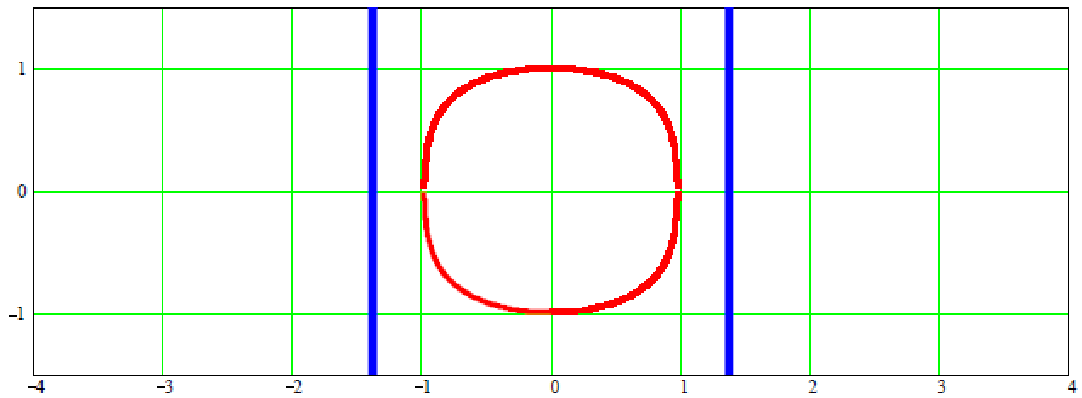


$t = 0$

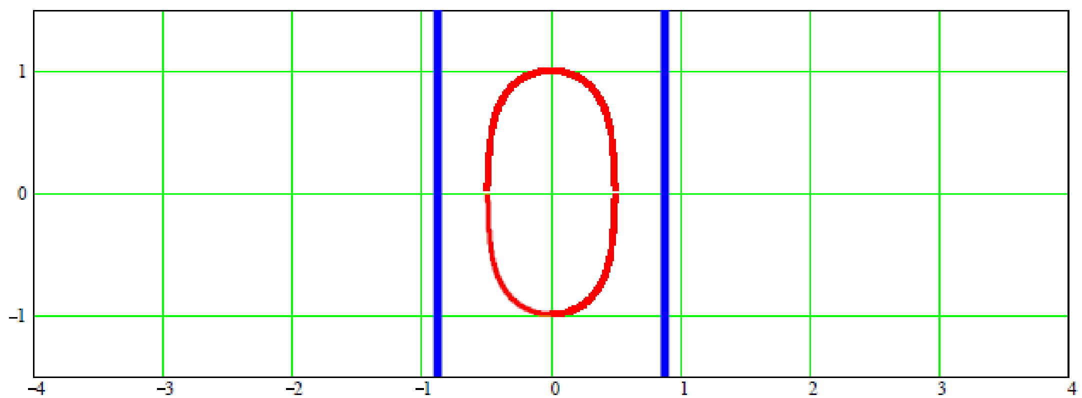


$V = 1 \qquad R = 1 \qquad a = 0.999$

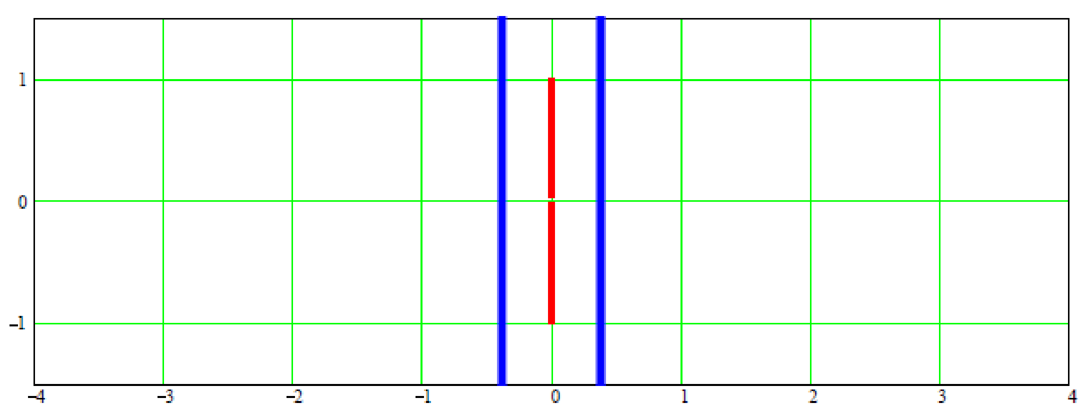
$t = -1$



$t = -0.5$



$t = 0$



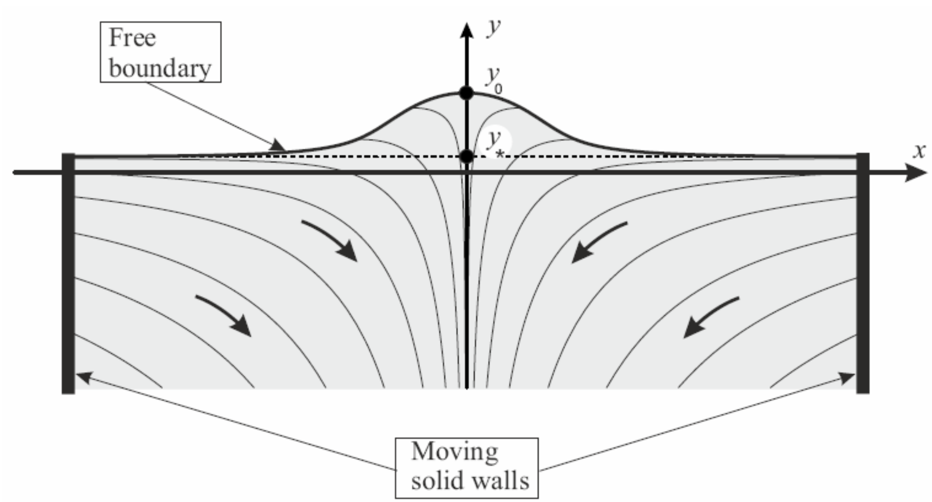
Пусть теперь жидкость в невозмущенном состоянии занимает полуполосу (свободная граница – плоская).

We can present F in the form of $2V$-periodic function (V is the wall velocity):

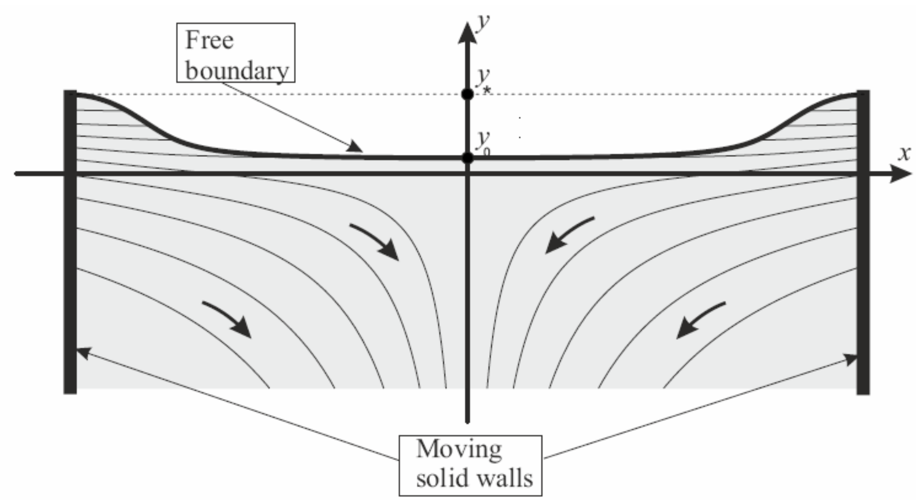
$$\boxed{F(U) = \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} h_n exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi n(U+V)}{V}\right)}$$

Это выражение обеспечивает выполнение граничных условий на стенках, которые в терминах функции F имеют вид: $\operatorname{Re} F\,|_{u=\pm V} = 0.$

Formation of a drop:



Formation of a cusp or a bubble:

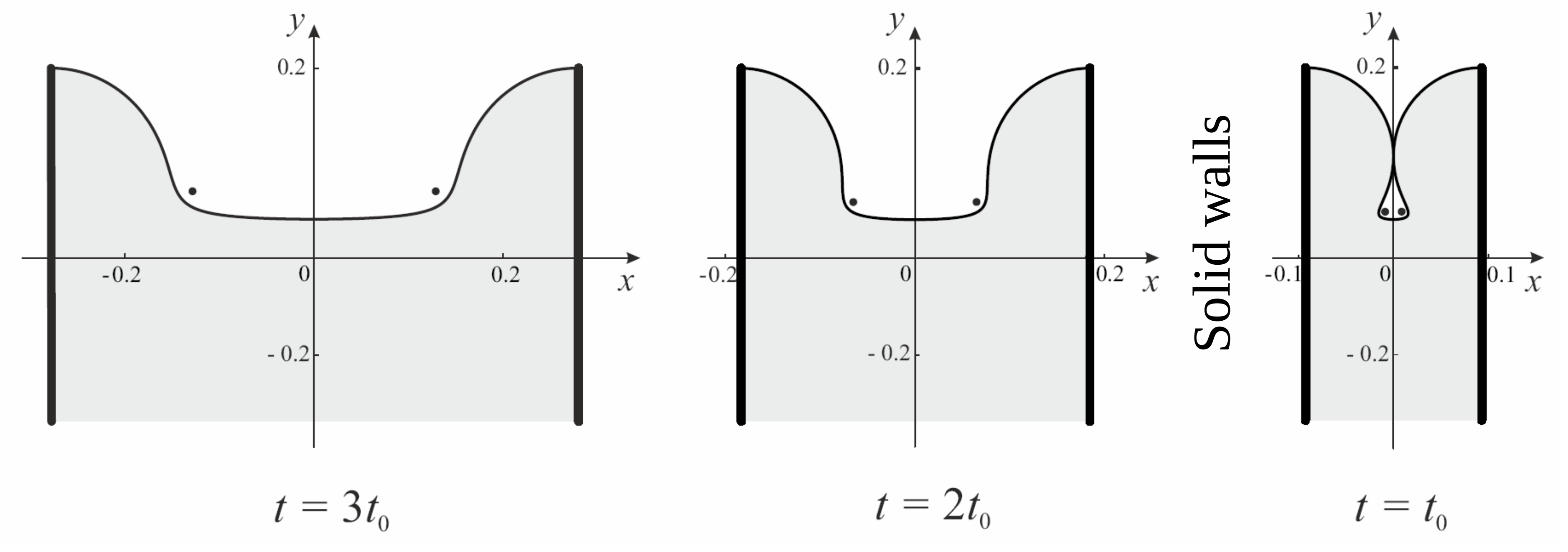


Fluid with the free surface placed between two approaching vertical walls

Formation of a bubble

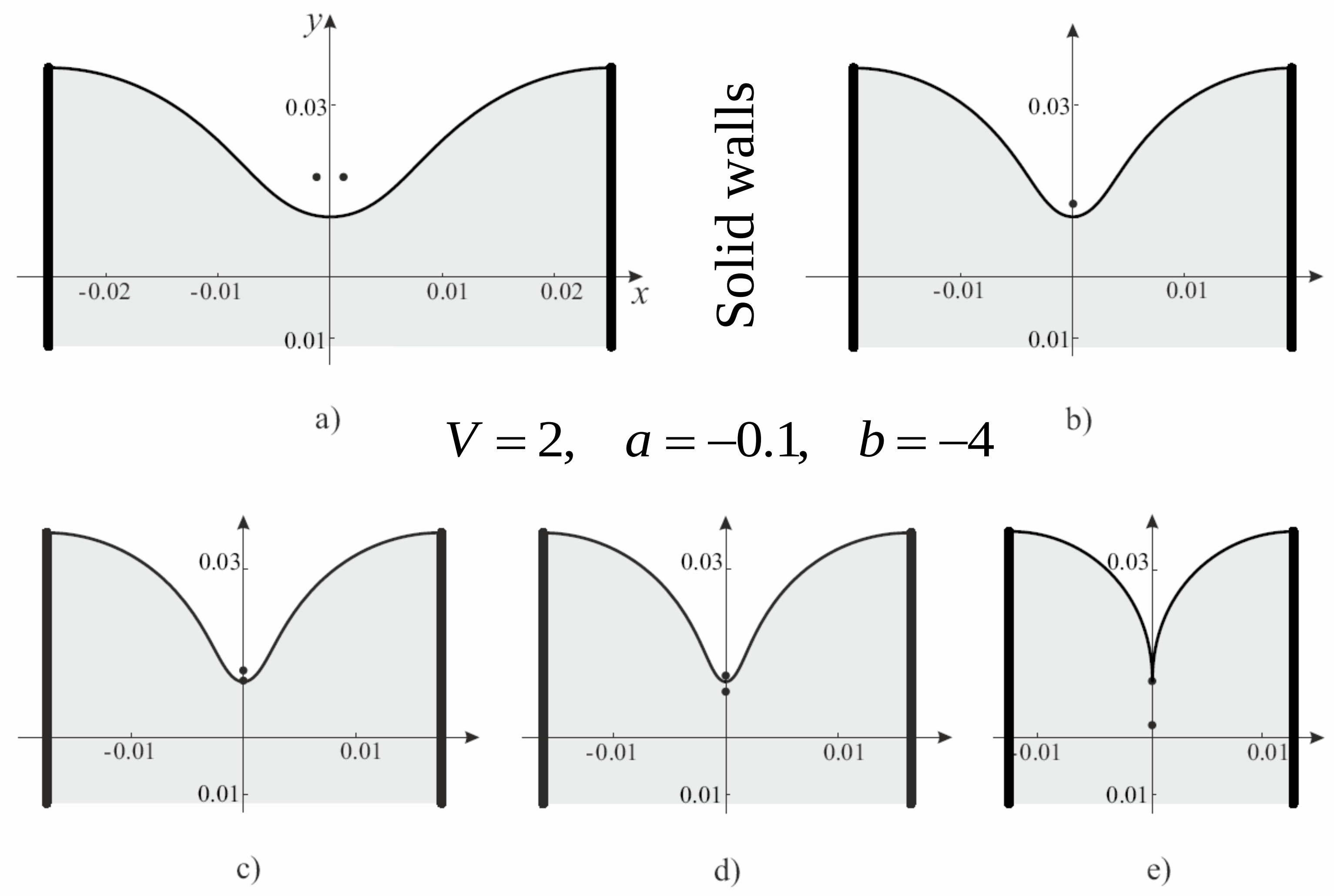
$$V = 2, \quad a = -0.1, \quad b < -1.5$$

$$\boxed{\begin{gathered} z = F(U) + tU, \\ F(U) = \frac{ia}{b - \exp\left(i\pi U / V\right)} \end{gathered}}$$



Formation of a cusp

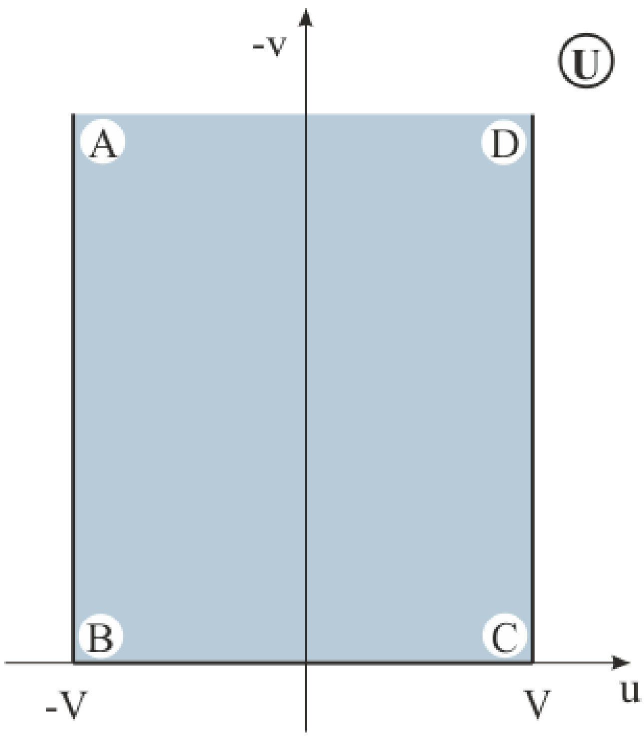
$$\boxed{z = F(U) + tU, \qquad F(U) = \frac{ia}{b - \exp(i\pi U/V)}}$$



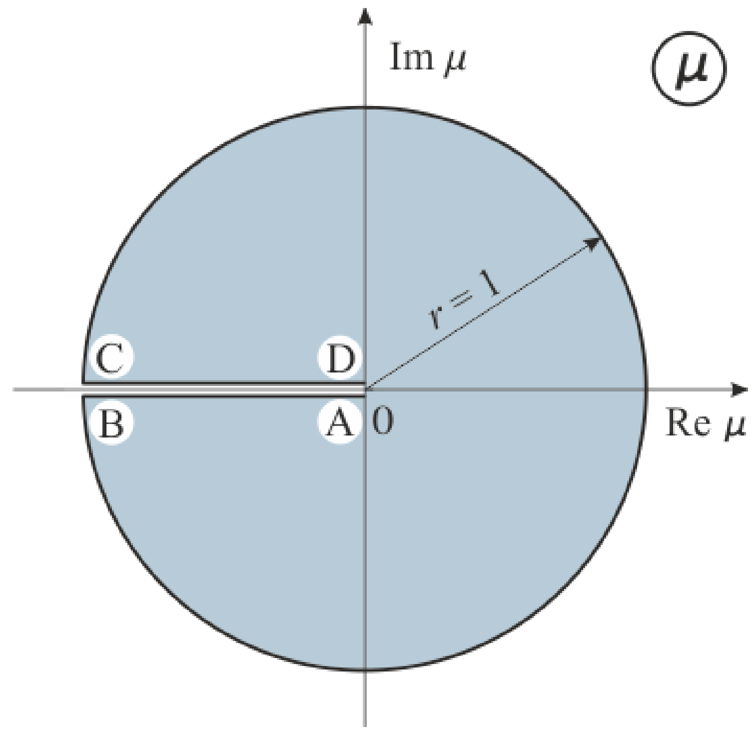
$$V = 2, \quad a = -0.1, \quad b = -4$$

Auxiliary plane μ :

$$\boxed{\mu = \exp\left(i\pi U / V\right)}$$

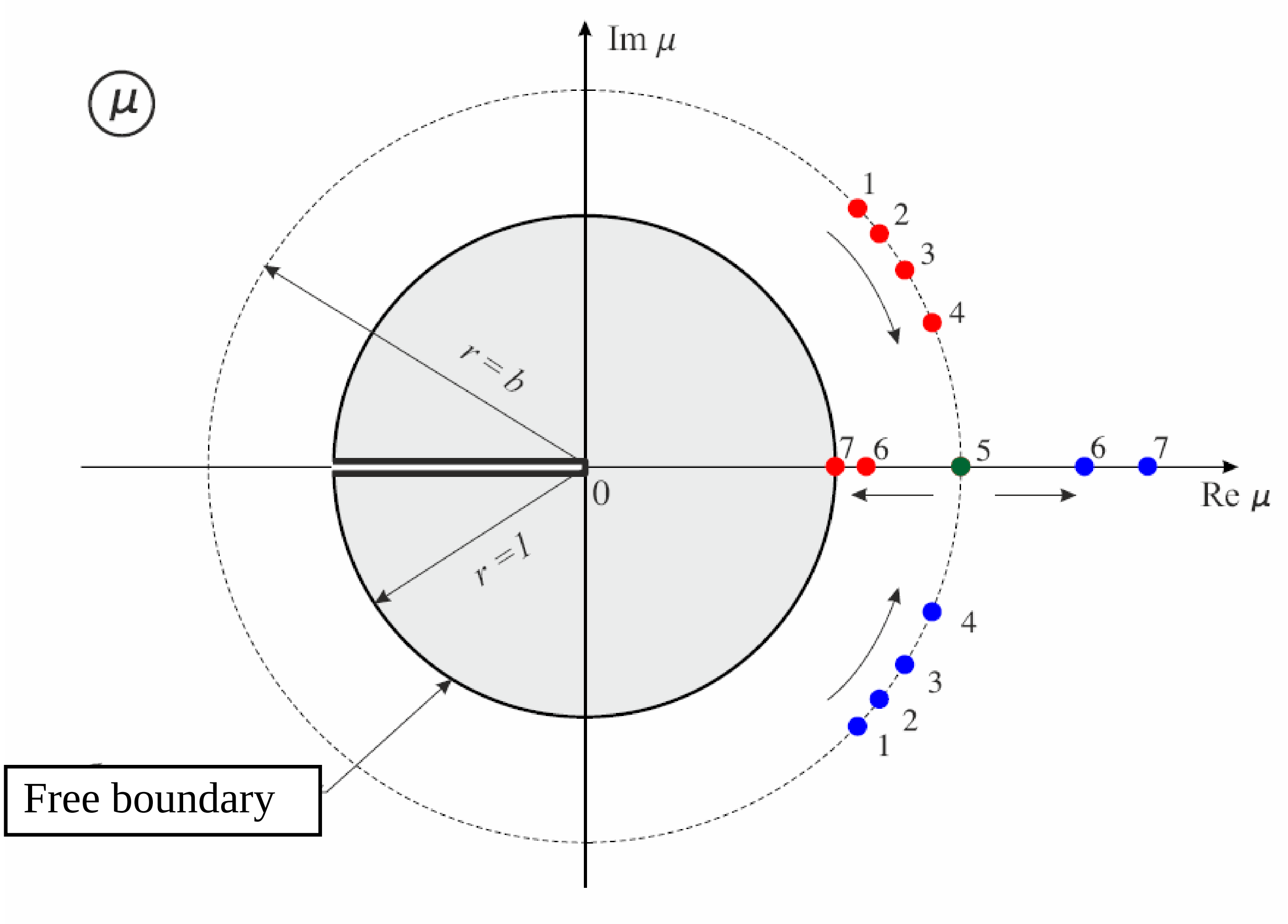


(a)



(b)

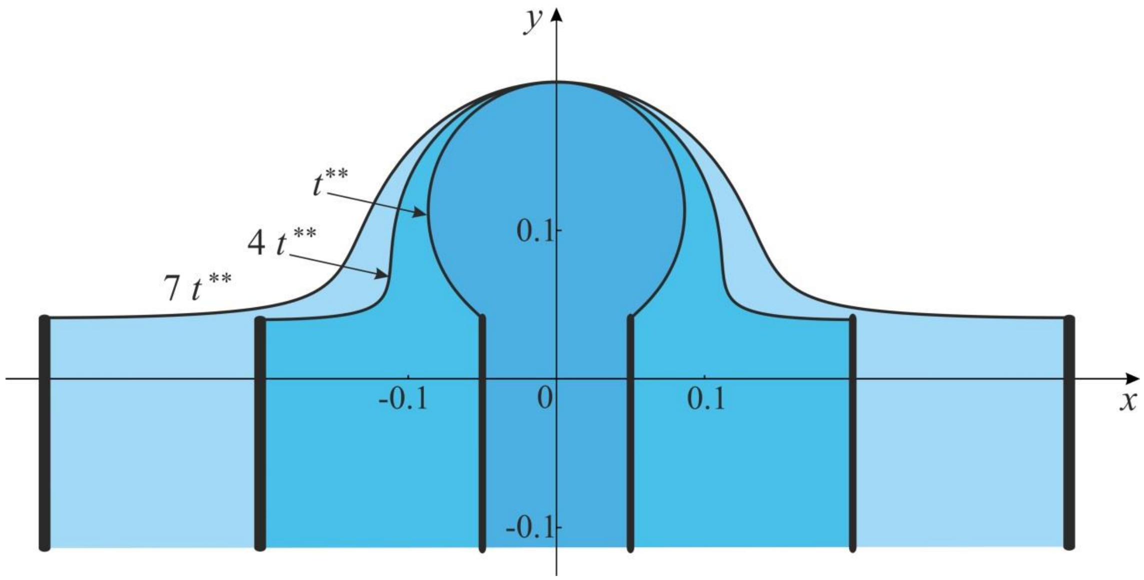
Formation of a cusp



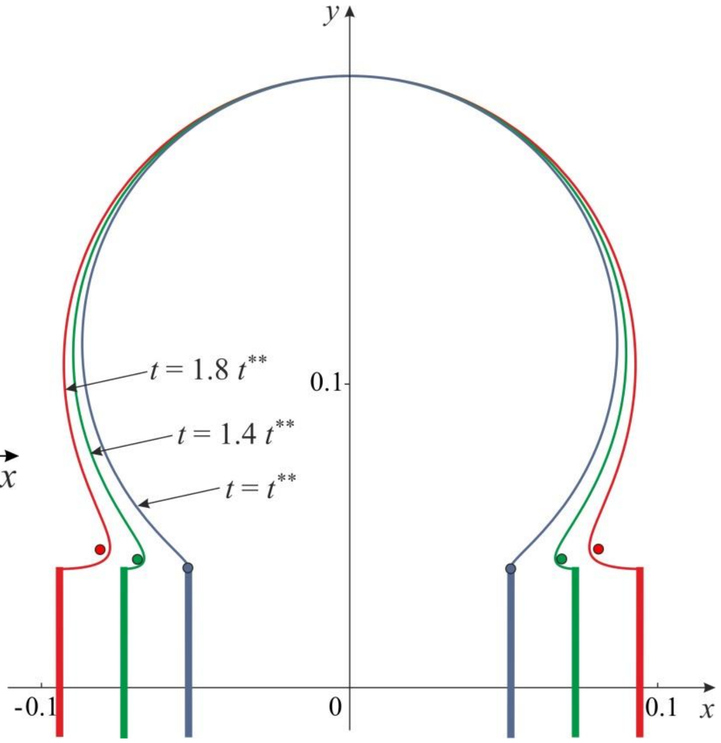
Formation of a drop

$$z = F(U) + tU, \qquad F(U) = \frac{ia}{b - \exp(i\pi U / V)}$$

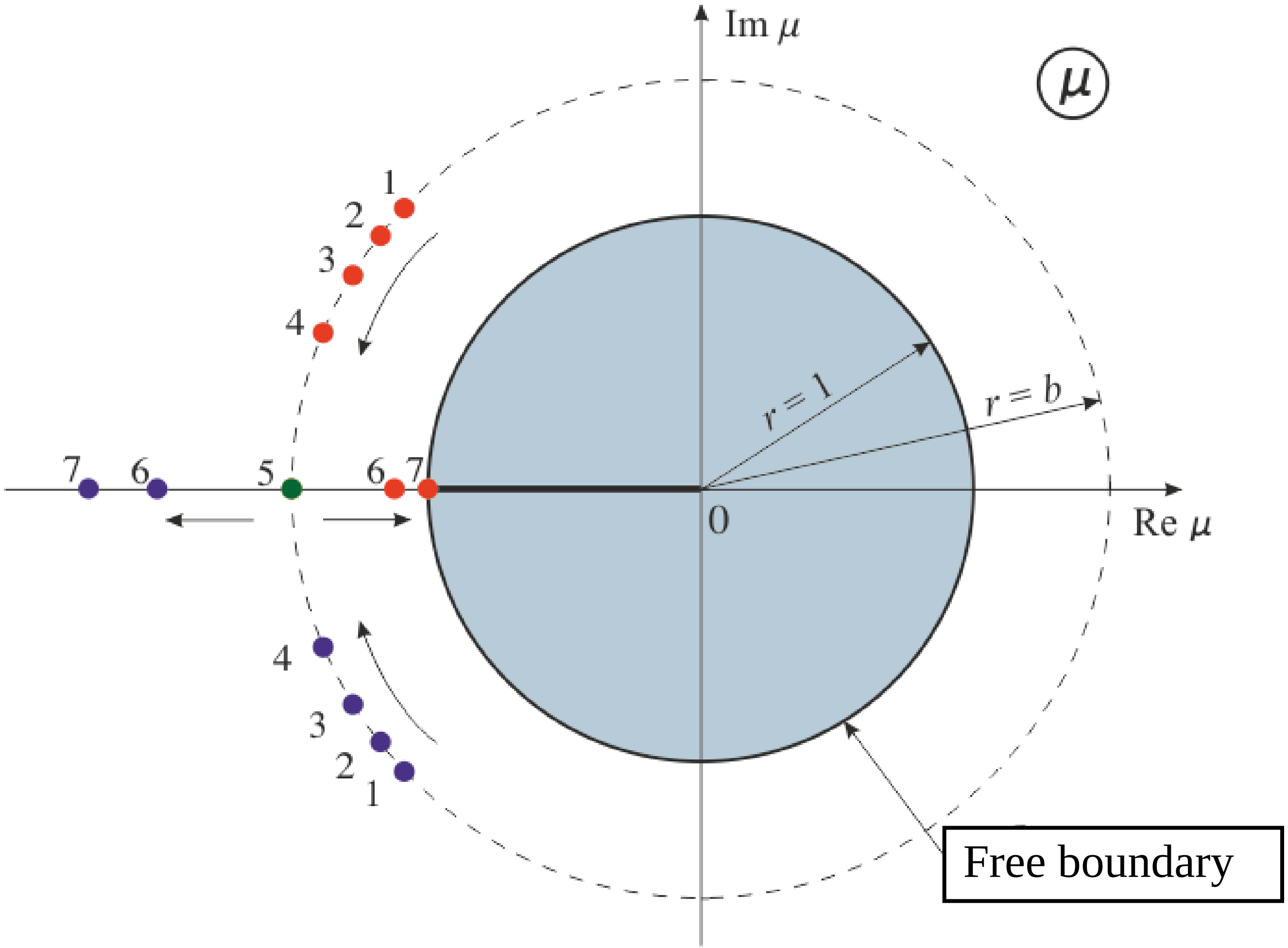
Решение существует ограниченное время. Оно разрушается за счет выхода особенностей на границу жидкости (и, одновременно, на стенки) в момент $t = t^{**} = -\pi a / (V(1+b)^2)$.



$V = 2, \quad a = 0.1, \quad b = 1.5$



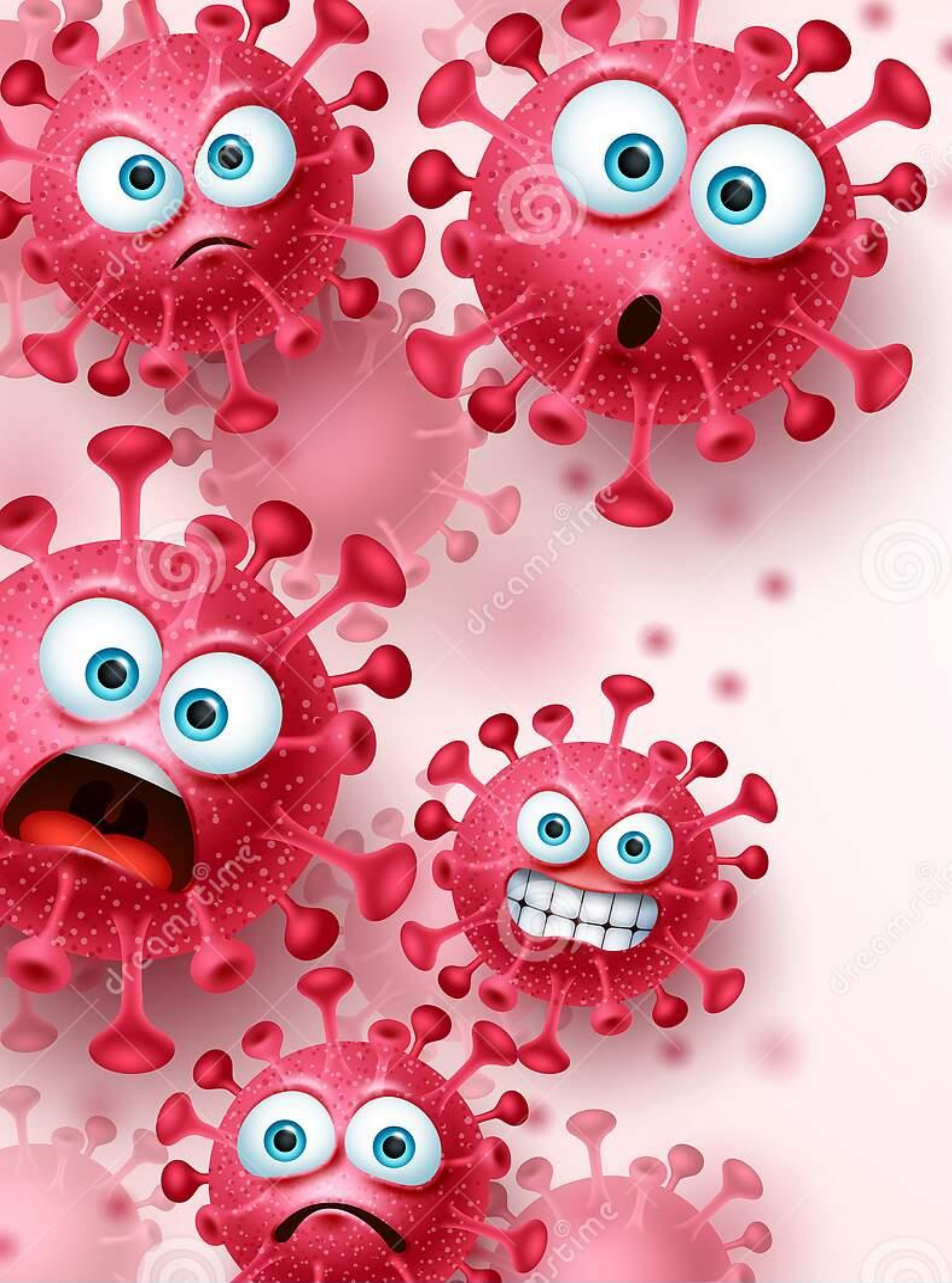
Formation of a drop



Заключение

Представлены точные решения классической задачи о плоском нестационарном потенциальном течении несжимаемой жидкости со свободной границей. Жидкость ограничена с боков двумя твердыми вертикальными стенками, сближающимися с постоянной скоростью. Решения найдены для ситуации, когда капиллярность и гравитационные силы отсутствуют, а движение жидкости полностью обусловлено движением стенок. В решениях уравнений движения неизбежно возникают сингулярности за конечное время: это время ограничено сверху моментом столкновения стенок. Приводятся и анализируются решения, описывающие коллапс пузыря. Также рассмотрены примеры точных решений, соответствующие формированию пузырей, точек заострения и капель на свободной границе жидкости [*].

[*] Е.Н. Журавлева, Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева, Е.А. Карабут, Точные решения задачи о динамике жидкости со свободной поверхностью, помещенной между двумя сближающимися вертикальными стенками. Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2021. – Т. 501. – С. 42-47.



Будьте здоровы!