

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

**Физический  
институт**



*имени  
П.Н.Лебедева*

Российской академии наук

**Ф И А Н**



**А.В. Копьев, А.С. Ильин,  
В.А. Сирота, К.П. Зыбин**

ОТФ им. И.Е. Тамма  
ФИАН им. П.Н. Лебедева

**Спектр магнитной энергии, создаваемый турбулентным динамо:  
эффект статистической необратимости по времени**

Москва, декабрь 2021 г.

# Спектр магнитной энергии, создаваемый турбулентным динамо: эффект статистической необратимости по времени

- Модель Казанцева-Крайчнана
- VЗ-модель
- Обобщенное уравнение Казанцева
- Динамика спектра в модели
- Обсуждение

# Модель Казанцева-Крайчнана

$$\langle v_i(\mathbf{R}, t) v_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle = D_{ij}(\mathbf{r}) \delta(\tau)$$

[Казанцев, 1967]  
[Kraichnan, 1967]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \frac{1}{2} (D_{ij}(0) - D_{ij}(r)) \frac{r_i r_j}{r^2} = \\ &= \frac{1}{4} \int d\tau \langle \delta_L v(\mathbf{r}, 0) \delta_L v(\mathbf{r}, \tau) \rangle \end{aligned}$$

[Кичатинов, 1985]

$$\langle B_i(\mathbf{R}, t) B_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle = G(r, t) \delta_{ij} + \frac{1}{2} r G'(r, t) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial G(r, t)}{\partial t} = 2\sigma G'' + 2\left(\sigma' + \frac{4}{r}\sigma\right)G' + 2\left(\sigma'' + \frac{4}{r}\sigma'\right) + 2\kappa\left(G'' + \frac{4}{r}G'\right)$$

# Модель Казанцева-Крайчнана

$$\text{Pr}_m = \frac{\nu}{\kappa} \gg 1$$

$$\frac{\partial G(r, t)}{\partial t} = 2\sigma G'' + 2\left(\sigma' + \frac{4}{r}\sigma\right)G' + 2\left(\sigma'' + \frac{4}{r}\sigma'\right)G + 2\kappa\left(G'' + \frac{4}{r}G'\right)$$

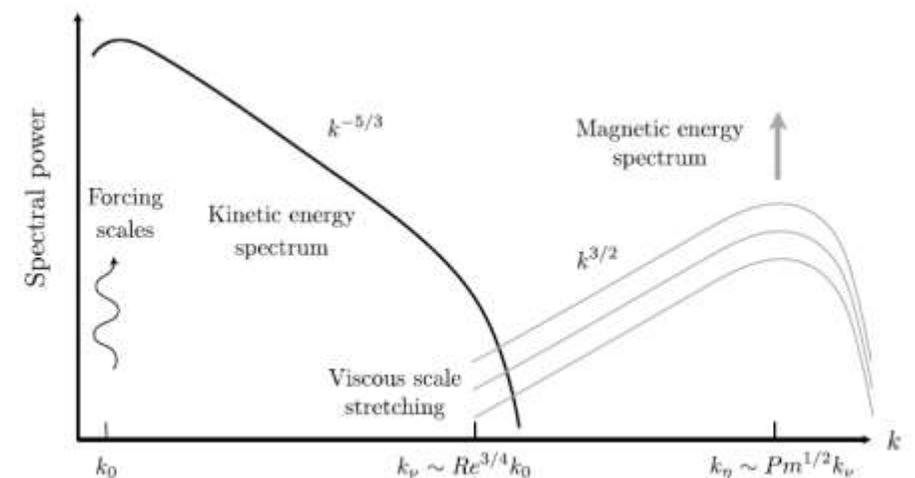
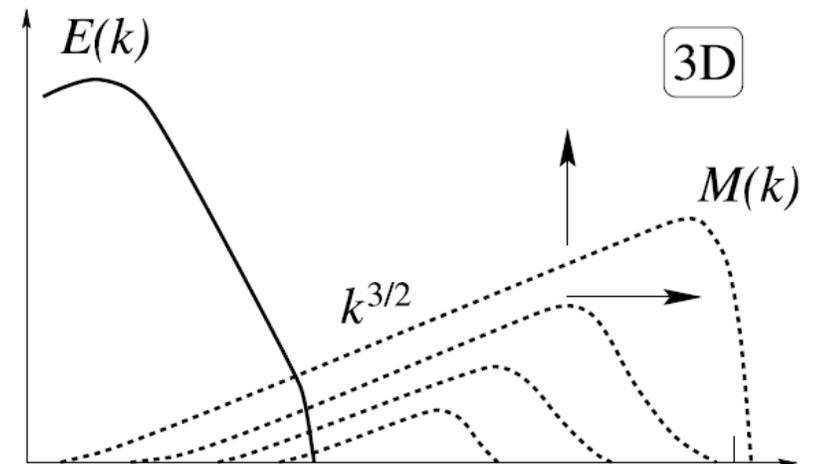
Бэтчелоров режим  $\sigma(r) = \frac{D}{3} r^2$

$$\frac{\partial G(r, t)}{\partial t} = \frac{2}{3} D \left( r^2 G'' + 6rG' + 10G \right) + 2\kappa \left( G'' + \frac{4}{r} G' \right)$$

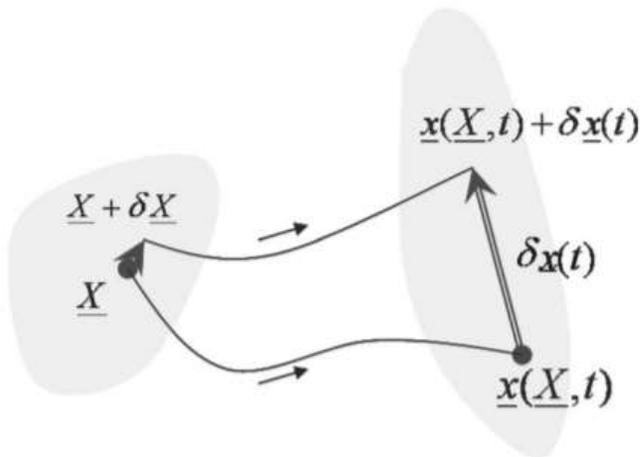
$$G(r, t) = 2 \int_0^\infty \left( -\frac{\cos kr}{(kr)^2} + \frac{\sin kr}{(kr)^3} \right) M(k, t) dk$$

$$\frac{\partial M(k, t)}{\partial t} = \frac{2}{3} D \left( k^2 M'' - 2kM' + 6M \right) - 2\kappa k^2 M$$

Колмогоровский и казанцевский спектры (кинематический режим)



# Режим Бэтчелора

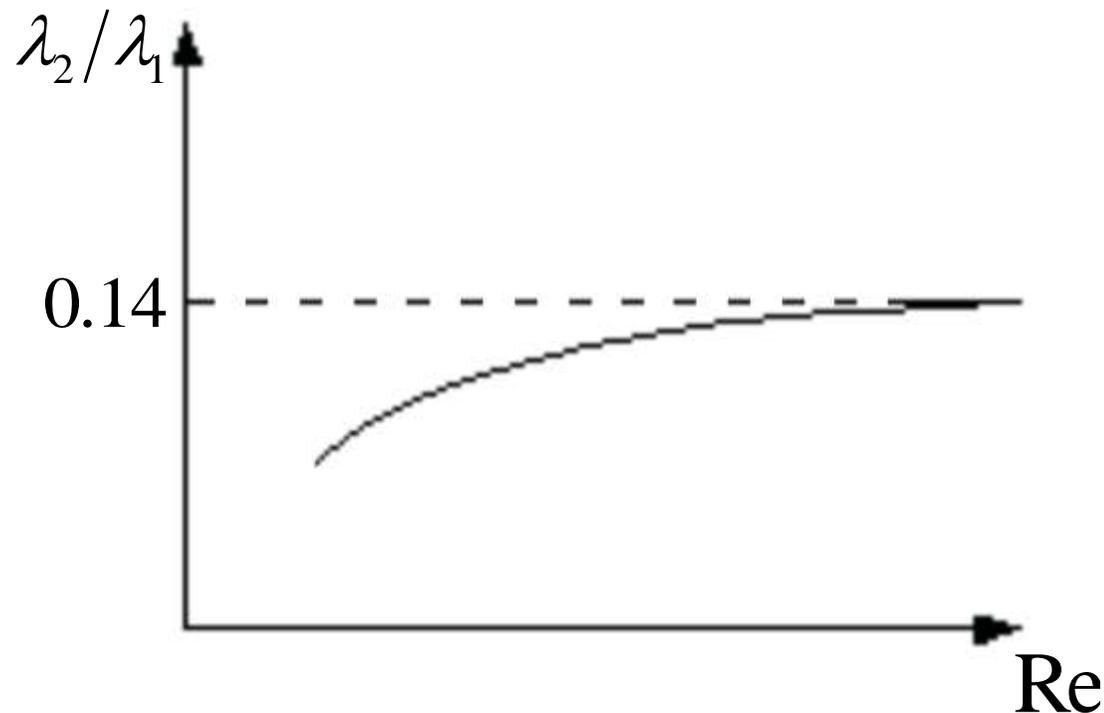


$$\langle \ln \delta x(t) \rangle \propto \lambda_1 t > 0$$

$$\langle \ln \delta S(t) \rangle \propto (\lambda_1 + \lambda_2) t > 0$$

$$\delta V(t) = \text{Const}$$

$\lambda_1, \lambda_2$  - ляпуновские экспоненты



Жидкая частица, находящаяся в **стохастическом линейном поле** вращается и экспоненциально быстро вытягивается

Для гидродинамической турбулентности ( $\text{Re} \gg 1$ )  $\lambda_2 / \lambda_1 \cong 0.14$

*Girimaji & Pope, 1990 (DNS)*

*Luthi, Tsinober & Kinzelbach, 2004 (EXP)*

# V3-модель

Асимптотически точное  $t \gg t_c$  описание процесса динамо с конечным корреляционным временем  $t_c$  и малым отклонением от негауссовости [Ильин, Sirota, Zybin, 2016]

$$\langle v_i(\mathbf{R}, t) v_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle = D_{ij}(\mathbf{r}) \delta(\tau)$$

$$\langle v_i(\mathbf{R}, t) v_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}', t + \tau) v_k(\mathbf{R} + \mathbf{r}'', t + \tau') \rangle = F_{ijk}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \overline{\delta(\tau) \delta(\tau')}$$

Все остальные связанные корреляторы кладутся равными нулю

# V3-модель

Асимптотически точное  $t \gg t_c$  описание процесса динамо с конечным корреляционным временем  $t_c$  и малым отклонением от негауссовости [И'ун, Sirota, Zybin, 2016]

$$\langle v_i(\mathbf{R}, t) v_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle = D_{ij}(\mathbf{r}) \delta(\tau)$$

$$\langle v_i(\mathbf{R}, t) v_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}', t + \tau) v_k(\mathbf{R} + \mathbf{r}'', t + \tau') \rangle = F_{ijk}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \overline{\delta(\tau) \delta(\tau')}$$

Все остальные связанные корреляторы кладутся равными нулю

Однородность, изотропия, несжимаемость

$$D_{ij}(a) = D_{ij}(0) - \frac{2}{3} D \left( 2a^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right) \quad [\text{ЛЛ VI}]$$

$$F_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{18} F \left( (2a^2 - 15b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) a_j \delta_{ik} + (2b^2 - 15a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) b_k \delta_{ij} \right. \\ \left. + (20b^2 - 5a^2 - 16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) a_i \delta_{jk} + (20a^2 - 5b^2 - 16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) b_i \delta_{jk} - (5a^2 + b^2 - 26\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) a_k \delta_{ij} - (5b^2 + a^2 - 26\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) b_j \delta_{ik} \right. \\ \left. + 4a_i a_j a_k + 4b_i b_j b_k + 12a_i a_j b_k + 12b_i a_j b_k - 2a_i b_j a_k - 2b_i b_j a_k - 16a_i b_j b_k - 16b_i a_j a_k \right)$$

[Kopyev & Zybin, 2018]

# V3-модель

Асимптотически точное  $t \gg t_c$  описание процесса динамо с конечным корреляционным временем  $t_c$  и малым отклонением от негауссовости [Ил'юн, Sirota, Zybin, 2016]

$$\langle v_i(\mathbf{R}, t) v_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle = D_{ij}(\mathbf{r}) \delta(\tau)$$

$$\langle v_i(\mathbf{R}, t) v_j(\mathbf{R} + \mathbf{r}', t + \tau) v_k(\mathbf{R} + \mathbf{r}'', t + \tau') \rangle = F_{ijk}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \overline{\delta(\tau) \delta(\tau')}$$

Все остальные связанные корреляторы кладутся равными нулю

[Girimaji & Pope, 1990] (DNS)

[Luthi et al, 2004] (EXP)

$$\lambda_2 / \lambda_1 \cong 0.14$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2F}{2D - F}$$

$$f \equiv F/D \cong 0.13$$

[Ил'юн, Sirota, Zybin, 2016]

Однородность, изотропия, несжимаемость

$$D_{ij}(a) = D_{ij}(0) - \frac{2}{3} D (2a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \quad [\text{лл VI}]$$

$$F_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{18} F \left( (2a^2 - 15b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) a_j \delta_{ik} + (2b^2 - 15a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) b_k \delta_{ij} + (20b^2 - 5a^2 - 16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) a_i \delta_{jk} + (20a^2 - 5b^2 - 16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) b_i \delta_{jk} - (5a^2 + b^2 - 26\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) a_k \delta_{ij} - (5b^2 + a^2 - 26\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) b_j \delta_{ik} + 4a_i a_j a_k + 4b_i b_j b_k + 12a_i a_j b_k + 12b_i a_j b_k - 2a_i b_j a_k - 2b_i b_j a_k - 16a_i b_j b_k - 16b_i a_j a_k \right)$$

[Kopyev & Zybin, 2018]

## Обобщенное уравнение Казанцева

$$\frac{\partial G(r,t)}{\partial t} = \frac{2}{3} D(r^2 G'' + 6rG' + 10G) + \frac{1}{9} F(2r^3 G''' + 21r^2 G'' + 14rG' - 70G) + 2\kappa \left( G'' + \frac{4}{r} G' \right)$$

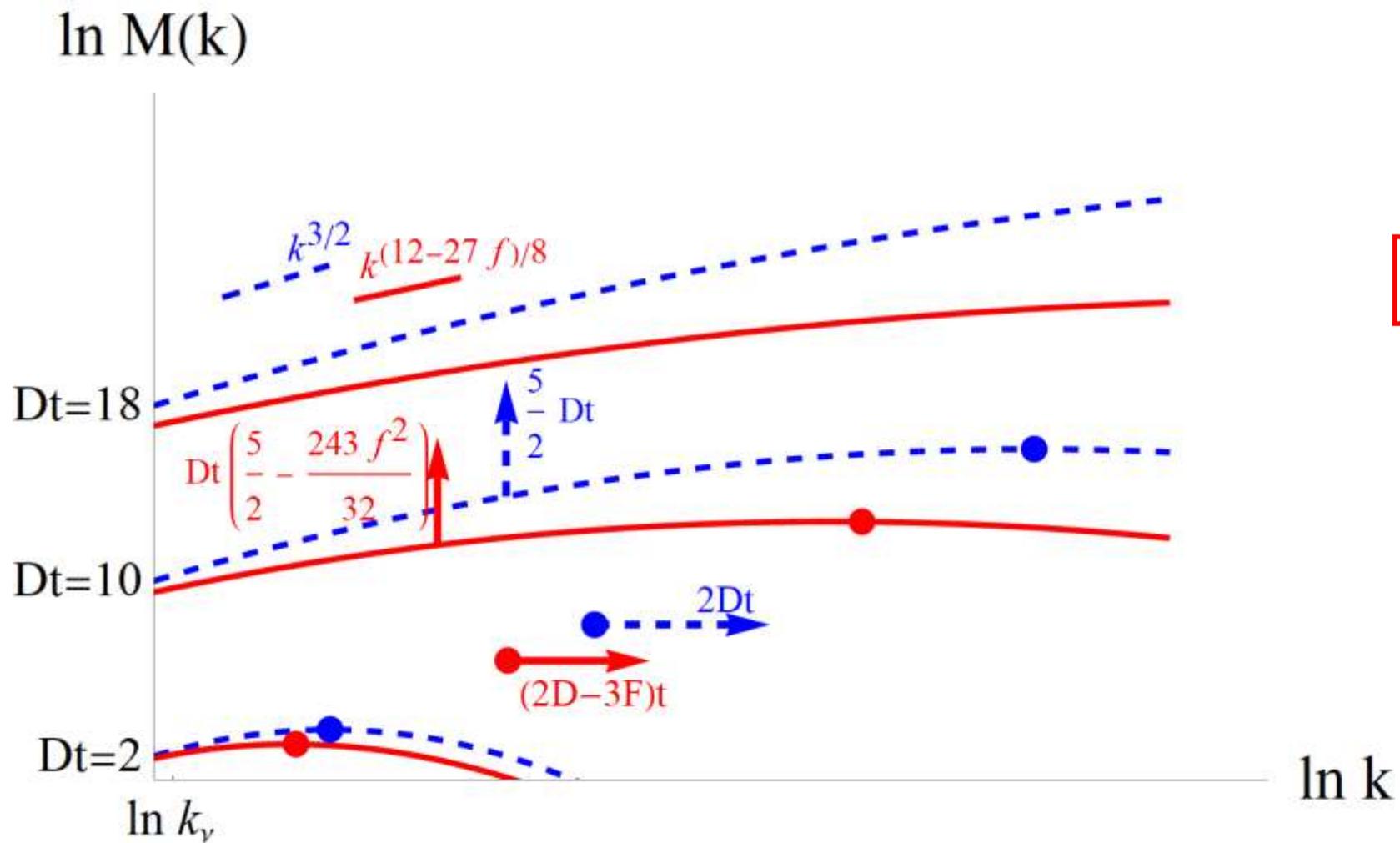
$$G(r,t) = 2 \int_0^\infty \left( -\frac{\cos kr}{(kr)^2} + \frac{\sin kr}{(kr)^3} \right) M(k,t) dk$$

$$\frac{\partial M(k,t)}{\partial t} = \frac{2}{3} D(k^2 M'' - 2kM' + 6M) + \frac{1}{9} F(-2k^3 M''' + 3k^2 M'' + 34kM' - 54M) - 2\kappa k^2 M$$

$$\zeta = \ln k \quad t \ll \ln \text{Pr}_m / D \Rightarrow \kappa \mapsto 0$$

$$M(\zeta, t) \propto \int d\eta \exp \left[ -i\eta(\zeta - \zeta_0) + \frac{2}{3} D(-\eta^2 + 3i\eta + 6) + \frac{1}{9} F(-2i\eta^3 - 9\eta^2 - 27i\eta - 54) \right]$$

# Динамика спектра



$$f = 0$$

$$f = 0,13$$

# Обсуждение

$$M(k, t) \propto e^{\left(\frac{5}{2} - \frac{243}{32} f^2\right) Dt} \left(k/k_0\right)^{\frac{3}{2} - \frac{27}{8} f} \approx e^{2,37 Dt} \left(k/k_0\right)^{1,06}$$

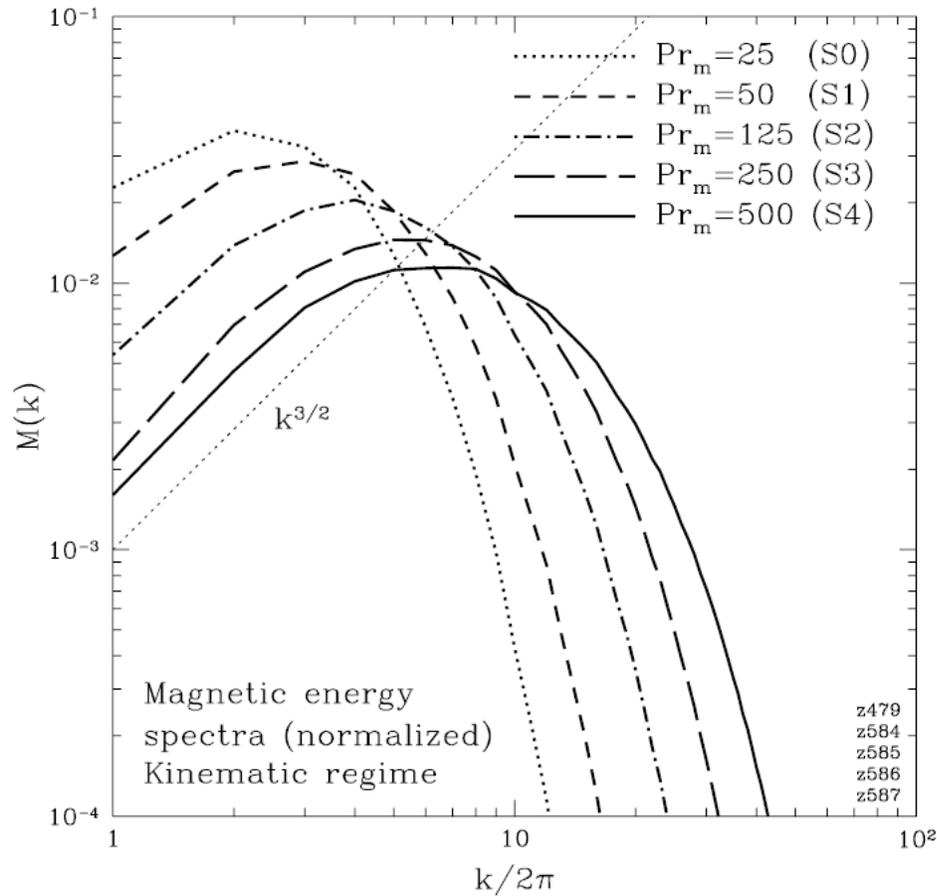


TABLE I  
INDEX OF RUNS

Run	$\nu$	$\eta$	$Pr_m$	Grid	Re	$\langle u^2 \rangle$	$\langle B^2 \rangle$
S0-kin.....	$5 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-3}$	25	$64^3$	2.0	0.39	Decays
S1-kin.....	$5 \times 10^{-2}$	$10^{-3}$	50	$128^3$	2.0	0.39	Grows
S2-kin.....	$5 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-4}$	125	$128^3$	2.0	0.39	Grows
S3-kin.....	$5 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-4}$	250	$128^3$	2.1	0.43	Grows
S4-kin.....	$5 \times 10^{-2}$	$10^{-4}$	500	$256^3$	2.0	0.41	Grows

$f \neq 0,13!$

Необходимо  
 $Re_\lambda \approx 38 \Rightarrow Re \approx 400$

[Schekochihin, 2004]

**DNS**

FIG. 4. (b) Magnetic energy spectra (normalized by the total magnetic energy and averaged) during the kinematic stage. Note that for run S0 dynamo is resistively suppressed.

# Обсуждение

Спасибо!

$$M(k, t) \propto e^{\left(\frac{5}{2} - \frac{243}{32} f^2\right) Dt} \left(k/k_0\right)^{\frac{3}{2} - \frac{27}{8} f} \approx e^{2,37 Dt} \left(k/k_0\right)^{1,06}$$

- Проверка путем применения прямого численного моделирования высокого разрешения. При это число Рейнольдса на масштабе Тейлора необходимо довести до 40
- Исследование зависимости показателя спектра от числа Рейнольдса
- Проверка путем применения оболочечных моделей с достижением очень высоких чисел Прандтля и Рейнольдса
- Применение модели для построения моделей нелинейного динамо

Non-Gaussian generalization of the Kazantsev-Kraichnan model for turbulent dynamo

A.V. KOPYEV,<sup>1</sup> A.M. KISELEV,<sup>1</sup> A.S. IL'YN,<sup>1,2</sup> V.A. SIROTA,<sup>1</sup> AND K.P. ZYBIN<sup>1,2</sup>

arXiv:2112.05738v1

Submitted to ApJ

Magnetic energy spectrum produced by turbulent dynamo: effect of time irreversibility

A.V. KOPYEV,<sup>1</sup> A.S. IL'YN,<sup>1,2</sup> V.A. SIROTA,<sup>1</sup> AND K.P. ZYBIN<sup>1,2</sup>

arXiv:2112.05736v1

Submitted to ApJL



# Модель Казанцева-Крайчнана

$$\frac{\partial G(r,t)}{\partial t} = 2\sigma G'' + 2\left(\sigma' + \frac{4}{r}\sigma\right)G' + 2\left(\sigma'' + \frac{4}{r}\sigma'\right) + 2\kappa\left(G'' + \frac{4}{r}G'\right) \Rightarrow G(r,t) \propto e^{\gamma t}$$

- Условие генерации Казанцева

$$\sigma(r) = \text{Const } r^\xi \Rightarrow \begin{array}{ll} \xi > 1 & \text{поле экспоненциально растет } (\gamma > 0) \\ \xi \leq 1 & \text{поле степенным образом затухает} \end{array}$$

- Бэтчелоров режим

$$\sigma(r) = \frac{D}{3} r^2 \Rightarrow \gamma = \frac{5}{2} D \quad (D = v_v / 2r_v) \quad \text{Pr}_m = \frac{v}{\kappa}$$

- Модель с инерционным интервалом

$$\sigma(r) = \begin{cases} \frac{D}{3} r^2 & , r < r_v \\ \text{Const}_1 \cdot r^\xi & , L > r > r_v \\ \text{Const}_2 & , r > L \end{cases} \quad \text{Pr}_m \gg 1 \Rightarrow \gamma = \frac{5}{2} D - O\left(\frac{1}{\ln^2 \text{Pr}_m}\right)$$

[Novikov et al, 1983]  
[Schekochihin et al, 2002]  
[Kleeorin et al, 2002]

# Проблема обобщения модели

## Конечность времени корреляции

Эффект памяти не позволяет написать замкнутые дифференциальные уравнения

$$\langle v_p B_q B'_r \rangle = \int d\mathbf{r}_1 dt_1 \langle v_p(\mathbf{r}, t) v_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \left\langle \frac{\delta(B_q(\mathbf{r}, t) B_r(\mathbf{r}', t))}{\delta v_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1)} \right\rangle$$

Негауссовость

(наличие ненулевых старших связанных корреляторов)

Учет невозможен в рамках дельта коррелированного приближения

$$\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \langle \xi^2 \rangle \tau_\varepsilon \delta_\varepsilon(\tau)$$

$$\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \xi(t + \tau') \rangle = \langle \xi^3 \rangle \tau_\varepsilon^2 \delta_\varepsilon(\tau) \delta_\varepsilon(\tau')$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_\varepsilon \rightarrow 0 \\ \langle \xi^2 \rangle \tau_\varepsilon - \text{fix} \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \xi^3 \rangle \tau_\varepsilon^2 \rightarrow 0$$

# Эффективный дельта-процесс

Идея

$\dot{x} = \xi x$      $\xi(t)$  - однородный гауссов случайный процесс (не дельта-коррелированный),  $x(t)$  - отклик

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D(\tau)$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \xi d\tau}$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2 \langle \xi x^2 \rangle = 2 \int dt' \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \left\langle \frac{\delta x^2(t)}{\delta \xi(t')} \right\rangle = 4 \int dt' D(t-t') \left\langle x(t) \frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t')} \right\rangle$$

$$\frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t')} = x_0 \mathbf{I}_{[0,t]}(t') e^{\int_0^t \xi d\tau} = \mathbf{I}_{[0,t]}(t') x(t)$$

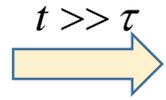
$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 4 \left( \int_0^t dt' D(t') \right) \langle x^2(t) \rangle$$

# Эффективный дельта-процесс

Идея

$\dot{x} = \xi x$      $\xi(t)$  - однородный гауссов случайный процесс (не дельта-коррелированный),  $x(t)$  - отклик

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D(\tau)$$



$$\langle \xi_{eff}(t)\xi_{eff}(t+\tau) \rangle = \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt' D(t') \right) \delta_{\varepsilon}(\tau)$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \xi d\tau}$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2 \langle \xi x^2 \rangle = 2 \int dt' \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \left\langle \frac{\delta x^2(t)}{\delta \xi(t')} \right\rangle = 4 \int dt' D(t-t') \left\langle x(t) \frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t')} \right\rangle$$

$$\frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t')} = x_0 \mathbf{I}_{[0,t]}(t') e^{\int_0^t \xi d\tau} = \mathbf{I}_{[0,t]}(t') x(t)$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 4 \left( \int_0^t dt' D(t') \right) \langle x^2(t) \rangle$$

# Эффективный дельта-процесс

## Негауссовы поправки

$\dot{x} = \xi x$      $\xi(t)$  - однородный **негауссов** случайный процесс

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D(\tau)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau)\xi(t+\tau') \rangle = F(\tau, \tau')$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2 \langle \xi x^2 \rangle = 2 \sum_n \int dt_1 \dots dt_n \langle \xi(t)\xi(t_1) \dots \xi(t_n) \rangle_c \left\langle \frac{\delta^n x^2}{\delta \xi(t_1) \dots \delta \xi(t_n)} \right\rangle$$

При  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \left( 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' D(t') + \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' F(t', t'') \right) \langle x^2(t) \rangle$$

# Эффективный дельта-процесс

Трудности “многомерия”

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T} \exp \left[ \int_0^t \mathbf{A}(t') dt' \right] \mathbf{B}_0 \equiv \left( \prod_0^t (\mathbf{E} + \mathbf{A}(t') dt') \right) \mathbf{B}_0$$

$$\frac{\delta \mathbf{B}(t)}{\delta \mathbf{A}(t')} \neq \mathbf{B}(t) \text{ при } t' \neq t - 0$$

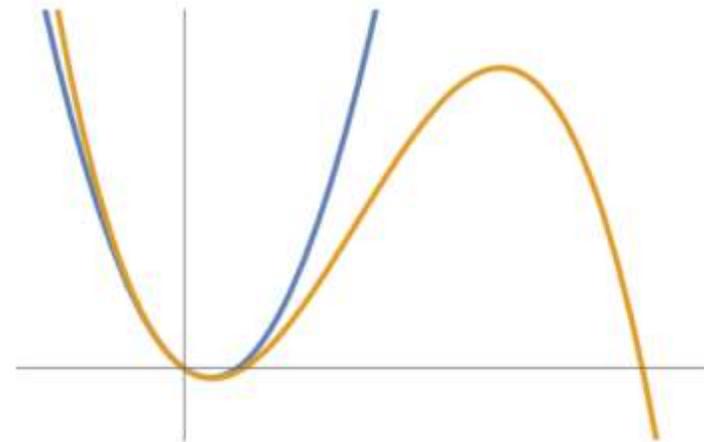
Матричное уравнение специфической заменой можно свести к диагональному виду, для которого справедливы приведенные выше рассуждения [И'ун, Sirota, Zybin, 2016]

**В режиме Бэтчелора негауссовый процесс с конечным корреляционным временем можно заменить эффективным дельта-процессом!**

# Динамика спектра

$$M(\zeta, t) \propto \int d\eta \exp \left[ -i\eta(\zeta - \zeta_0) + \frac{2}{3}D(-\eta^2 + 3i\eta + 6) + \frac{1}{9}F(-2i\eta^3 - 9\eta^2 - 27i\eta - 54) \right]$$

$$-i\delta\zeta + D \left( -\frac{4}{3}\eta^* + 2i \right) + F \left( -\frac{2}{3}i\eta^{*2} - 2\eta^* - 3i \right)$$



$$M(k, t) \propto e^{\left(\frac{5}{2} - \frac{243}{32}f^2\right)Dt} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{\frac{3}{2} - \frac{27}{8}f} \mu_{id} \left(\frac{k}{k_0}, t\right), \quad k < k_0 e^{\frac{D}{f^2}t}$$

$$\mu_{id}(y, t) = \exp \left[ - \left( 1 - \frac{27}{8}f^2 \right) \frac{3 \ln^2 y}{8Dt} + \frac{3f \ln^3 y}{32 (Dt)^2} - \frac{27f^2 \ln^4 y}{512 (Dt)^3} \right]$$