

Когерентные геострофические вихри при конечном числе Россби в ограниченном объёме

Сергей С. Вергелес
Владимир Парфеньев,
Иван Воинцев, Алёна Скоба

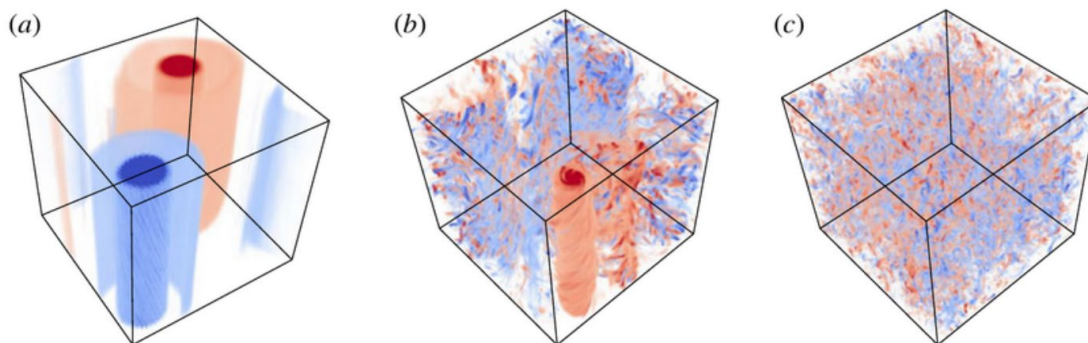
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка
Факультет физики, НИУ ВШЭ

Physics of Fluids 33, 065117 (2021)
Physics of Fluids 33, 115128 (2021)

Геострофическое течение и инерционные волны

Турбулентное течение при быстром вращении: прямой численный счёт

- Быстрое вращение расщепляет полное течение на
 - квази двумерное (медленная динамика) и
 - инерционные волны (3D течение, быстрая динамика).



$$\text{Rossby number} = \frac{\text{inertia force}}{\text{Coriolis force}} = 0.02, 0.5, \infty$$

Глобальное вращение происходит
вокруг вертикальной оси

Число Рейнольдса $Re \sim 100$

Прямое численное моделирование

(Seshasayanan & Alexakis, JFM 2018)

Наиболее идеализированные условия:

- Периодические граничные условия
- Статическая накачка (волновой вектор $k=4$)
распределена однородно в пространстве

Предмет исследования и модель

- Крупномасштабный статистически устойчивый геострофический (столбовой) вихрь с радиусом R .
- Вила, возбуждающая течением, имеет статистику однородную в пространстве. Она производит мощность ϵ на единицу массы
- Масштаб силы $1/k_f$ мал, $k_f R \gg 1$
- Без вращения возбуждалась бы трёх-мерная турбулентность, $Re_f = \frac{\epsilon^{1/3}}{\nu k_f^{4/3}} \gg 1$
- Глобальная угловая скорость вращения Ω_0 , она относительно велика на всех масштабах, λ , число Россби $Ro = \frac{v\lambda/\lambda}{2\Omega_0} \lesssim 1$

Уравнение Навье-Стокса
для несжимаемой
вращающейся жидкости

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} + 2[\boldsymbol{\Omega}_0, \mathbf{v}] = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

инерционный член вязкий член

Сила Кориолиса накачка

Теория: геострофическое течение

Полное поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$,

Рассмотрим течение, однородное вдоль оси вращения.

$$\partial_t U^\alpha - 2\Omega \epsilon^{\alpha\beta} U^\beta + (\mathbf{U} \cdot \nabla) U^\alpha = -\partial_\alpha p + \nu \Delta U^\alpha$$

Для несжимаемого течения планарная скорость параметризуется скаляром, $U^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \Psi$ ($\Psi(x, y)$ — функция тока). Сила Кориолиса является чисто потенциальной:

$$-\partial_\alpha p + 2\Omega \epsilon^{\alpha\beta} v^\beta = -\partial_\alpha (p + 2\Omega \Psi) \equiv -\partial_\alpha \tilde{p}.$$

Если число Россби мало, то эффективное давление \tilde{p} мало по сравнению с физическим, $\tilde{p} \ll p$. Равенство $p \approx -2\Omega \Psi$ называют геострофическим балансом. Уравнение на квази-двумерное течение не содержит в себе информации о вращении:

$$\partial_t U^\alpha + (\mathbf{U} \cdot \nabla) U^\alpha = -\partial_\alpha \tilde{p} + \nu \Delta U^\alpha.$$

Теория: короткая инерционная волна с поле скорости геострофического течения

Полное поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$,

$\mathbf{U}(x, y)$ – геострофическое поле скорости с медленной динамикой,

$\mathbf{u}(x, y, z)$ – трёх-мерное поле скорости (инерционные волны).

Kolokolov et.al., PRF 11, 1608 (1999)

Лагранжева система координат, центр в точке $\mathbf{R}(t)$, скорость движения $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{R})$. В этой системе координат локально геострофическое течение есть $U'^{\alpha} = \Sigma^{\alpha\beta} r^{\beta}$. Линеаризованное уравнение на поле \mathbf{u}

$$(\partial_t - \Sigma^{\alpha\beta} k^{\alpha} \partial_{k^{\beta}}) u_{\mathbf{k}}^i + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}]^i + \Sigma^{i\alpha} u_{\mathbf{k}}^{\alpha} = -\nu \Delta u_{\mathbf{k}}^i - ik^i p + f^i$$

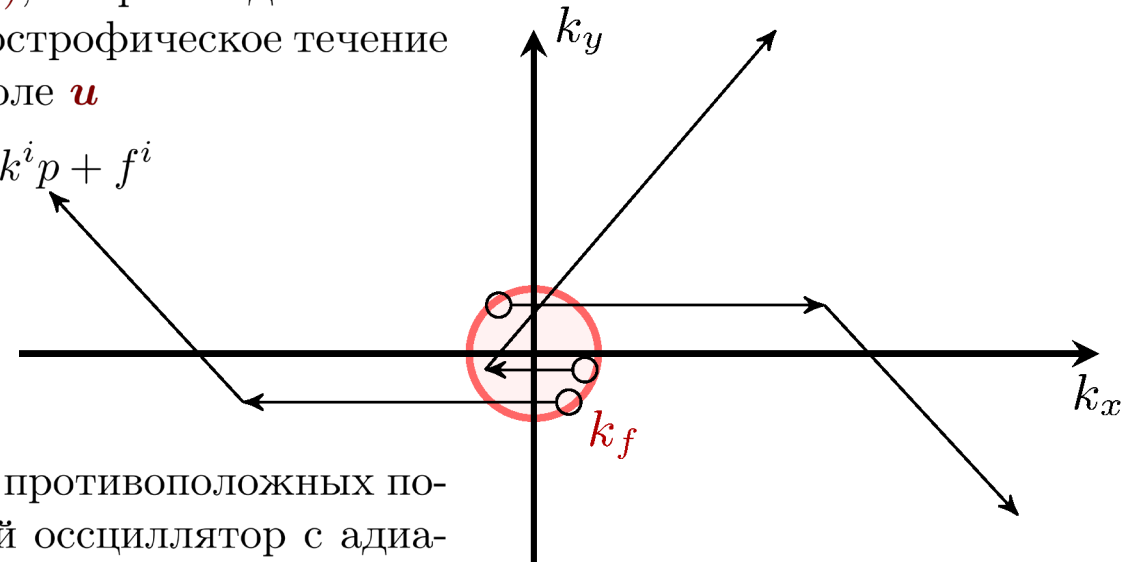
Перенос геострофическим течением приводит к динамике вдоль характеристики $\mathbf{k}'(t)$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k}' = \hat{\Sigma}(t) \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}'(t) = \hat{W}(t) \mathbf{k}, \quad \omega_{\mathbf{k}'} = 2\Omega \frac{k^z}{k'}$$

Если число Россби мало, $\omega_{\mathbf{k}'} \gg \Sigma$, то динамика двух противоположных поляризаций расцеплена и каждая представляет собой осциллятор с адиабатически меняющейся частотой:

$$\frac{E_{\mathbf{k}s}}{\omega_{\mathbf{k}'}} \propto k' |a_{\mathbf{k}'s}|^2 = \text{inv}$$

Энергия от волны передаётся геострофическому течению.



Gallet, JFM 783, 412 (2015)

Gelash et.al., JFM 831 p. 128 (2017)

Разделение когерентного течения и турбулентных пульсаций в вихре

- В цилиндрических координатах $\{r, \varphi, z\}$ разделение имеет вид

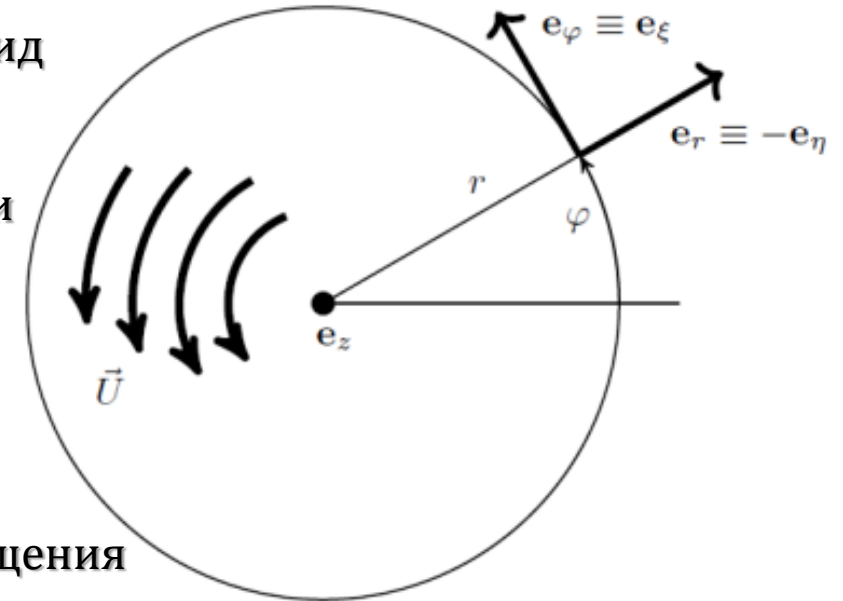
$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{U} = \{0, U, 0\}, \quad \mathbf{u} = \{u^r, u^\varphi, u^z\}.$$

По определению $\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{0}$, где $\langle \dots \rangle$ есть усреднение по времени быстрых (и мелко-масштабных) турбулентных пульсаций

- Уравнение на среднее течение:

$$\partial_t U + \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) (\langle u^\varphi u^r \rangle - \nu \Sigma) = 0, \quad \Sigma(r) = r \partial_r (U(r)/r)$$

локальная сила сдвига Σ есть мера дифференциального вращения



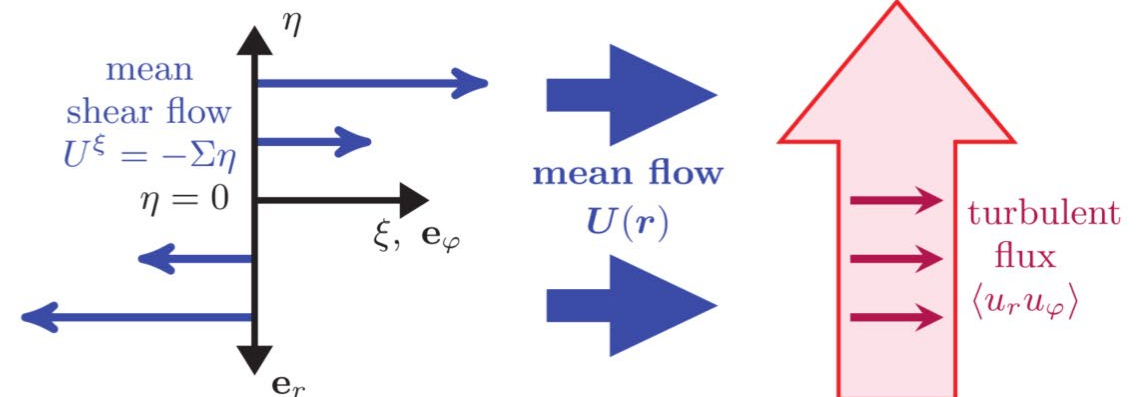
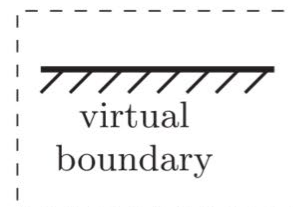
toward the vortex center

Главное уравнение: $\langle u^\varphi u^r \rangle - \nu \Sigma = 0$

- Напряжение Рейнольдса

$$\tau = \langle u^\varphi u^r \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} F,$$

везде в вихре $F > 0$



Отрицательная турбулентная вязкость и баланс энергии

- Главное уравнение: $\langle u^\varphi u^r \rangle \equiv (\epsilon/\Sigma)F = \nu\Sigma$
- Энергетический баланс в статистически стационарном состоянии означает разделение мощности внешней силы на крупно-масштабное и мелко-масштабное течение:

$$\epsilon = \Sigma \langle u^\varphi u^r \rangle + \epsilon q = \epsilon(F + q), \quad \epsilon F = \nu \Sigma^2, \quad q = \frac{\nu}{\epsilon} \langle \partial_k u^i \partial_k u^i \rangle$$

- Поскольку всегда $q > 0$, то $F < 1$
- Если верно $F \sim 1$, тогда $\Sigma \sim \sqrt{\epsilon/\nu}$ (вязкое насыщение конденсата).
- Амплитуда скорости в вихре $U \sim \sqrt{\epsilon/\nu} R_u$, R_u -- радиус вихря.
- Глобальное крупно-масштабное число Россби

$$Ro_R = \frac{\sqrt{\epsilon/\nu}}{2\Omega} = Ro_f \sqrt{Re_f} \lesssim 1, \quad Re_f = \frac{\epsilon^{1/3}}{\nu k_f^{4/3}} \gg 1, \quad Ro_f = \frac{\epsilon^{1/3} k_f^{2/3}}{2\Omega}$$

Gallet, Campagne, Cortet & Moisy (2014) PoF

Сильное вращение, слабая вязкость

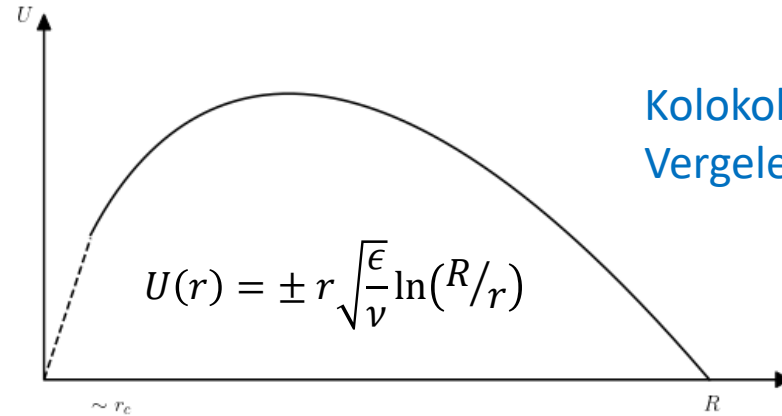
- Подавляющая часть вбрасываемой мощности передаётся конденсату

$$\Sigma \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}$$

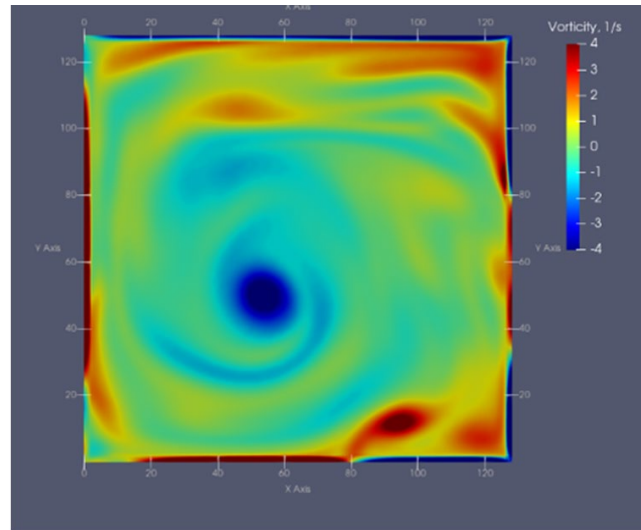
- Аналитическое решение: турбулентные пульсации суть инерционные волны с независимой динамикой.

- Радиальный профиль скорости

$$U(r) = -r \int_r^R dr' \frac{\Sigma(r')}{r'}$$



Kolokolov, Ogorodnikov & Vergeles (2020) PRF



Doludenko, Fortova, Kolokolov, & Lebedev (2021) PoF

FIG. 1. Vorticity field at different times: $t = 20$ (top), $t = 200$ (middle), and $t = 640$ (bottom).

Когерентный геострофический вихрь при умеренно сильном вращении

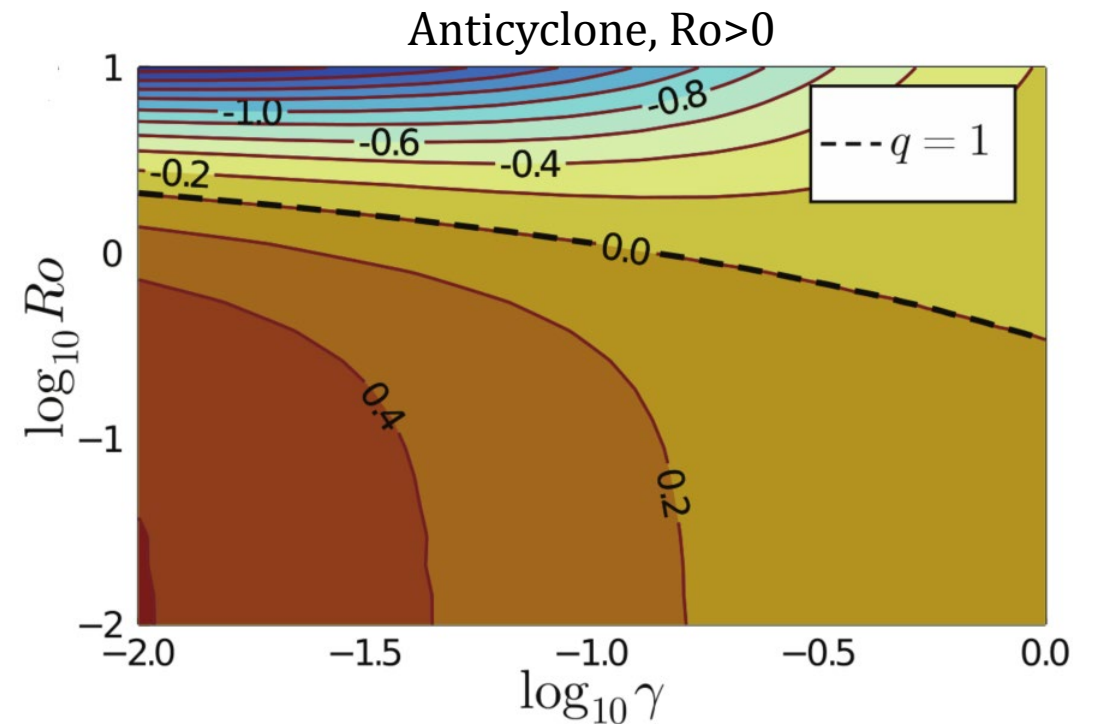
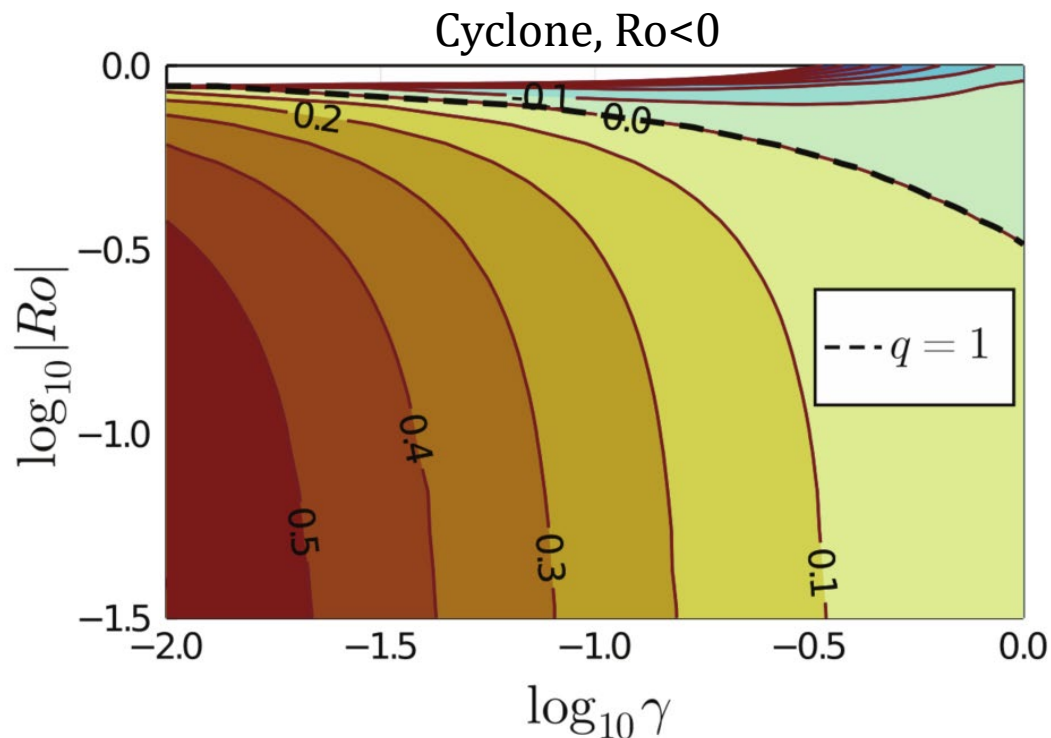
Асимметрия между циклонами и антициклонами

Напряжение Рейнольдса

- Напряжение Рейнольдса

$$\tau = \langle u^\varphi u^r \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} F, \quad F = F(\text{Ro}, \gamma)$$

- Результат численного решения линеаризованного уравнения



Радиальный профиль скорости

- Безразмерные величины: градиент скорости в $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$, сила сдвига $\sigma = \Sigma/\Sigma_0$, локальное вращение $\omega = 2\Omega/\Sigma_0$, $\Omega = (\Omega_0 + U(r)/r)$, расстояние до оси $\rho = r/R$
- Дифференциальное уравнение

$$\text{ODE equation: } \sigma = \rho \partial_\rho \omega / 2$$

оказывается замкнутым после подстановки

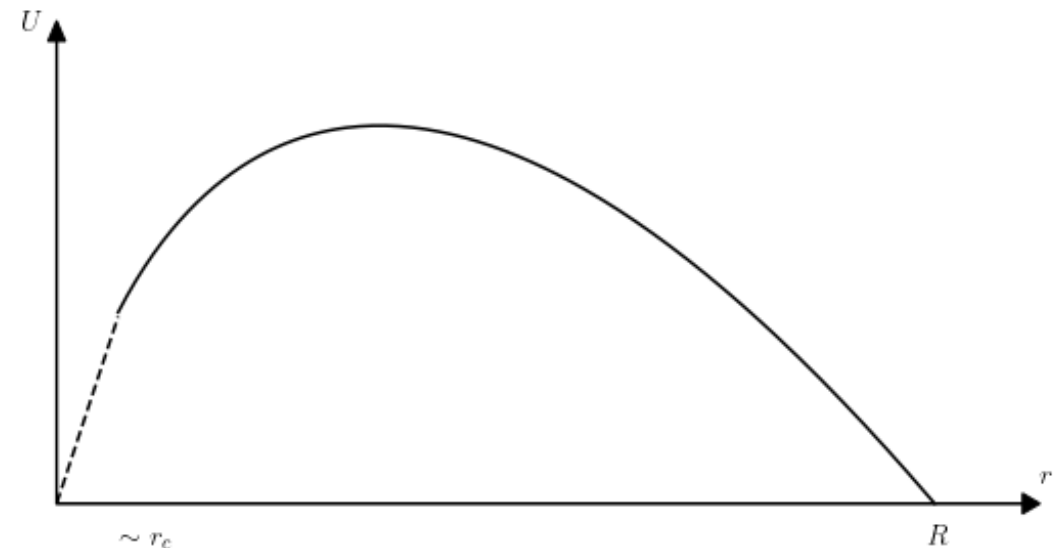
в $\tau - \nu \Sigma = 0$ напряжения $\tau = F\epsilon/\Sigma$, т.е.

$$\sigma = \mp \sqrt{F \left(\frac{\sigma}{\omega}, \frac{2}{Re_f^{3/2} |\sigma|} \right)}$$

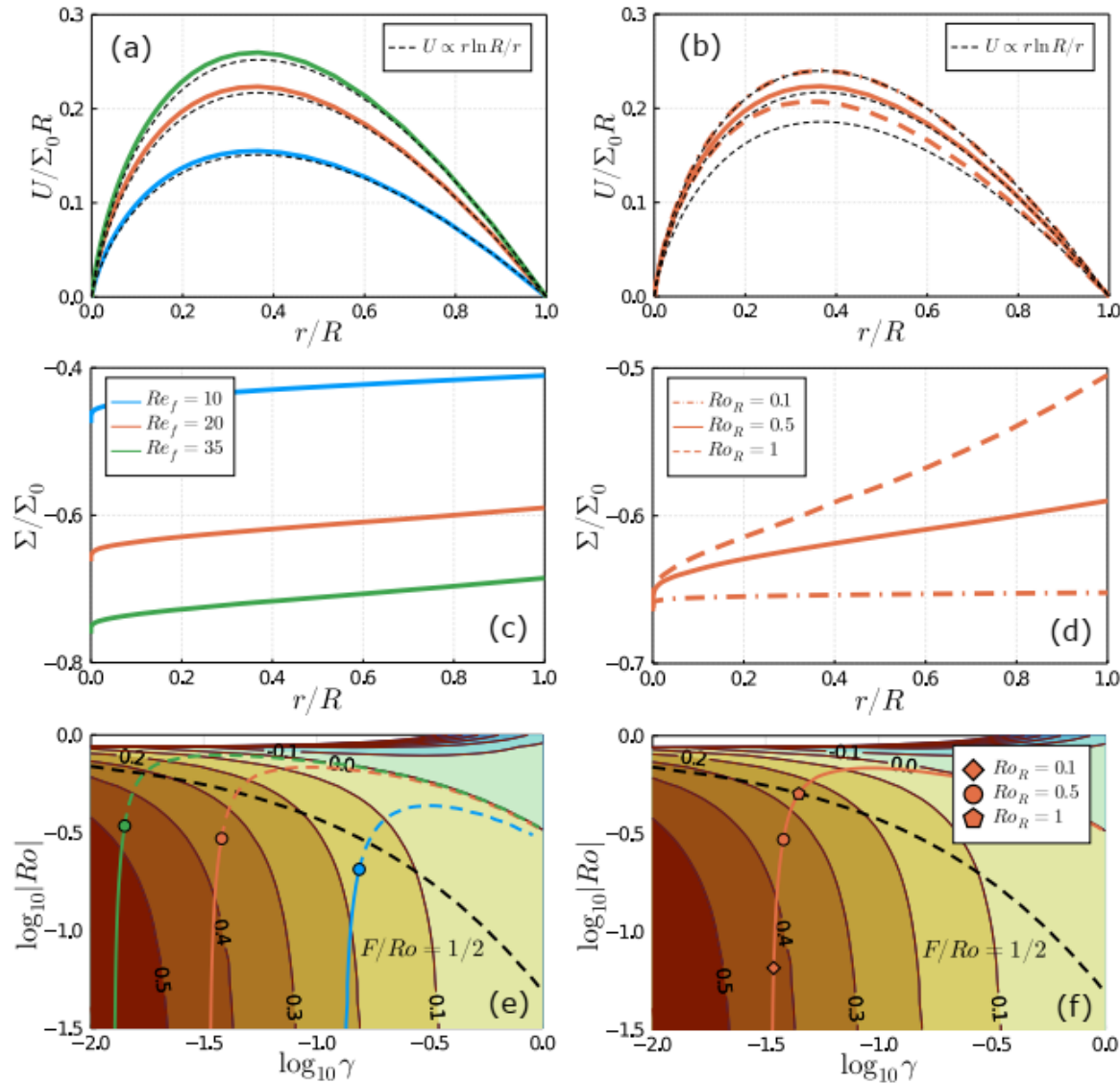
‘минус’ для циклона, ‘плюс’ для антициклона.

- Уравнение зависит только от Re_f
- Граничное условие $U(R) = 0$, т.е.

$$\omega \Big|_{\rho=1} = Ro_R$$



Профиль скорости в циклоне



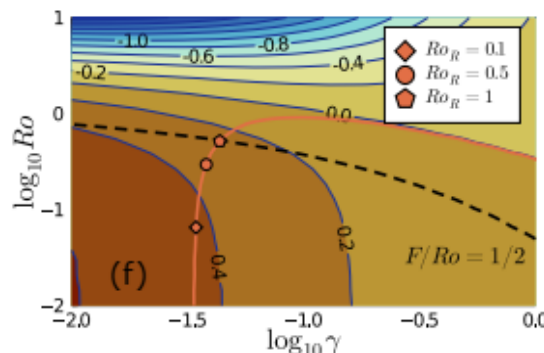
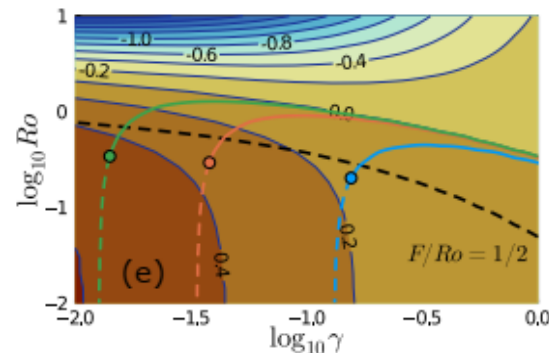
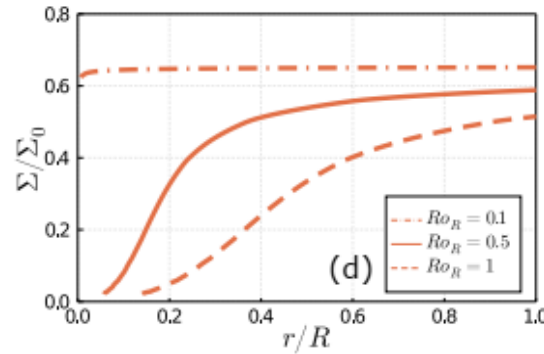
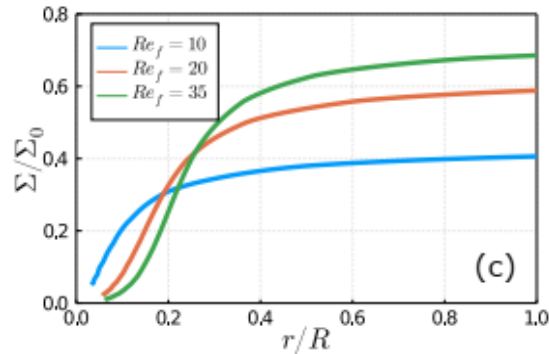
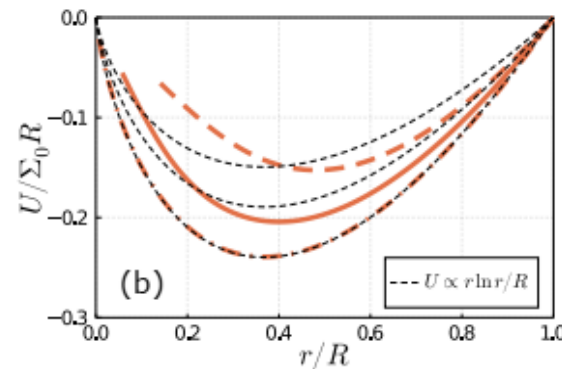
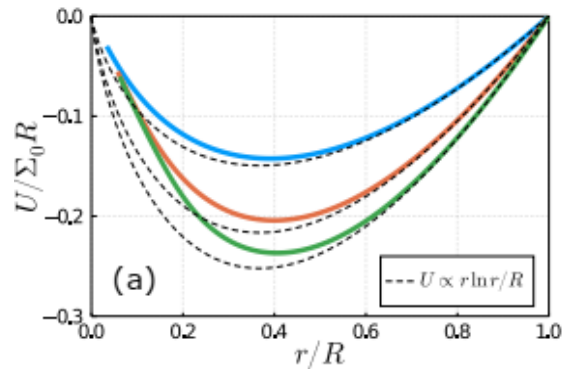
- $\Sigma_0 = \sqrt{\epsilon/\nu}$
- Движение к оси соответствует движению вниз (в область малых чисел Россби) вдоль цветных линий на $Ro - \gamma$ плоскости.
- Граница вихря $r = R$ должна быть ниже пунктирной кривой $F/Ro \sim 1$ на $Ro - \gamma$ плоскости
- Над пунктирной линией 3D-турбулентность разрушает вихрь
- При малых числах Россби $\Sigma = g_\gamma \Sigma_0$, локальное вращение увеличивается вблизи оси,

$$\omega \approx Ro_R + 2g_\gamma \ln(R/r)$$

Циклон внутри себя усиливает вращение

- Радиус сердцевин r_c определяется условием $r_c \sim \nu_g/\Sigma$, групповая скорость инерционных волн $\nu_g \sim \Omega/k_f$.

Профиль скорости в антициклоне



- Над пунктирной привой на $Ro - \gamma$ плоскости 3D-турбулентность разрушает вихрь
- Движение к оси вихря соответствует жвижению вверх (в область БОЛЬШИХ чисел Россби) вдоль цветных линий на $Ro - \gamma$ плоскости.
- Точка $r = R$ должна быть ниже пунктирной кривой $F/Ro \sim 1$ на $Ro - \gamma$ плоскости
- Антициклон уменьшает глобальное вращение внутри себя, особенно вблизи своей оси
- Радиус сердцевины r_c должен располагаться под пунктирной кривой на $Ro - \gamma$ плоскости. Это требование эквивалентно ограничению на максимальный радиус антициклона,

$$R < R_{\max}$$

Для малых чисел Россби, $Ro_R \ll 1$, это ограничение слабо,

$$R_{\max} \sim r_c \exp(2/Ro_R)$$

Эффекты конечного размера

Характерные параметры в эксперименте

Роль трения о дно в эксперименте

- Вязкая объёмная диссипация на единицу площади

$$H\nu(v_\lambda/\lambda)^2 = \nu v_\lambda^2 \cdot \frac{H}{\lambda^2}$$

$H = 1 \text{ m}$ – высота сосуда

λ – текущий горизонтальный масштаб

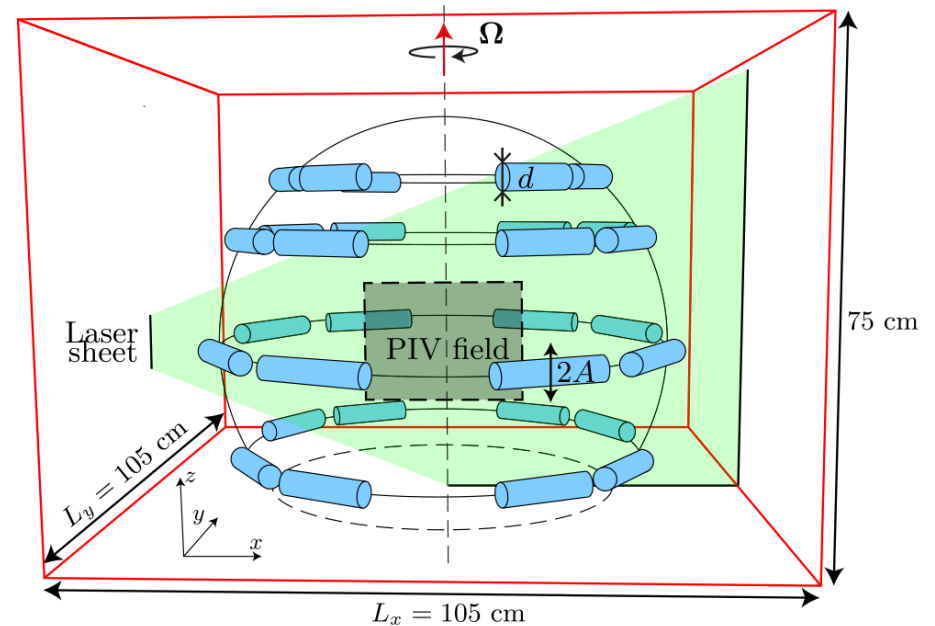
- Толщина слоя Экмана $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega} \sim 0.3 \text{ mm}$
- Вязкая диссипация с слое Экмана на единицу площади

$$\delta_E \nu (v_\lambda/\delta_E)^2 = \nu v_\lambda^2 \cdot \frac{1}{\delta_E}$$

- Вязкий масштаб

$$R_\alpha = \sqrt{H\delta_E} \sim 5 \text{ cm}$$

- Для геострофических когерентных течений с масштабом больше $R > 5 \text{ cm}$, профиль скорости определяется трением о дно



Monsalve, Brunet, Gallet & Cortet, PRL, (2020)

Вторичные течения в ограниченном геострофическом течении

- Толщина слоя Экмана $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega}$
- Число Экмана $E = (\delta_E/H)^2 \ll 1$
- В слое Экмана вклад в скорость

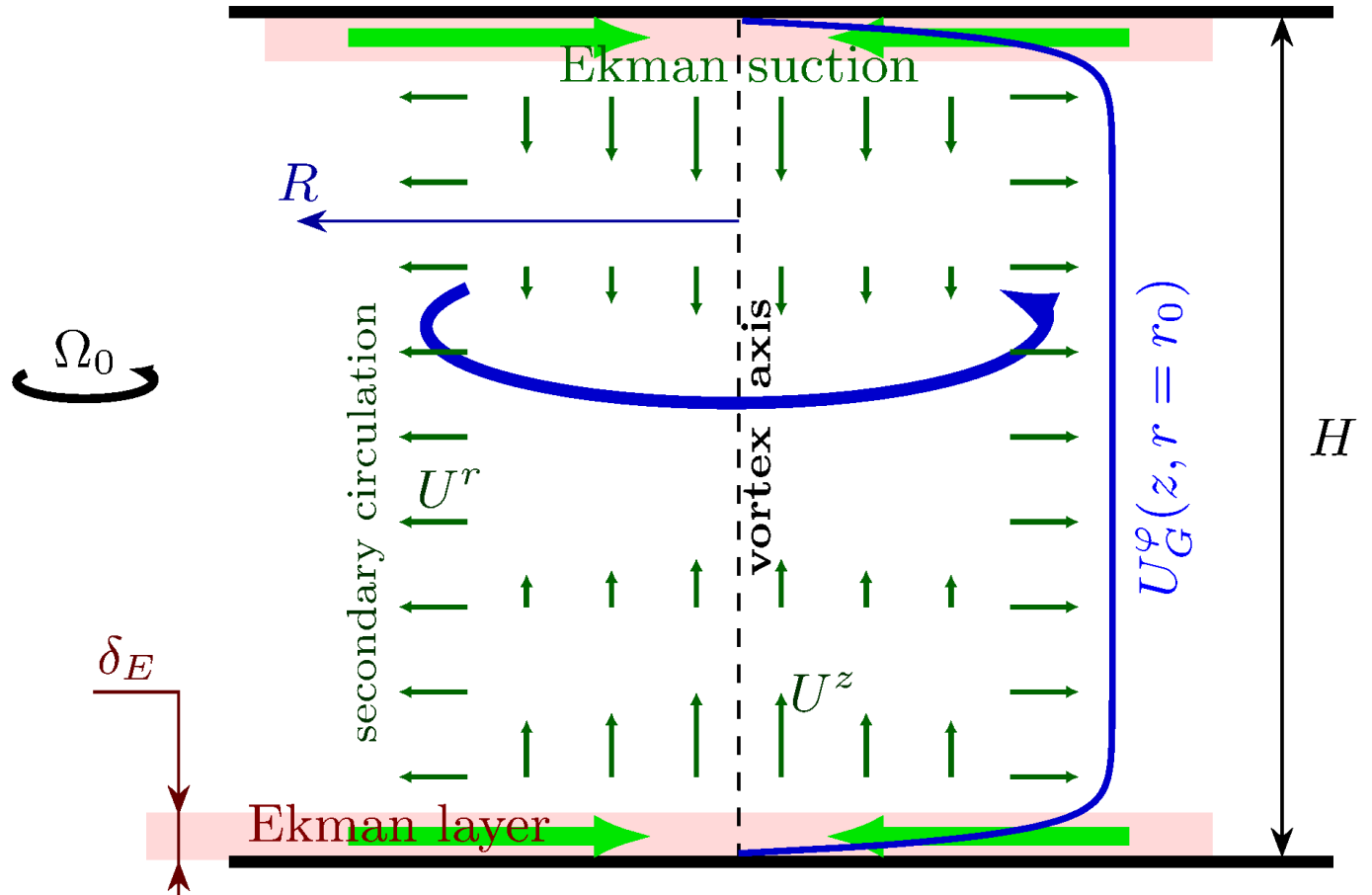
$$U_E^\alpha \sim -\epsilon^{\alpha\beta} U^\beta, \quad \text{div } \vec{U}_E = -\text{rot } \vec{U}$$

- Подсос Экмана (Ekman suction) над слоем Экмана

$$U_E^z = \delta_E \text{rot } \vec{U} / 2$$

- В вихре в объёме $U_E^r = \sqrt{E} U^\varphi$
- Эффективное трение о дно $\alpha = 2\Omega\sqrt{E} = 2\sqrt{\nu\Omega}/H$

$$\partial_t U + \left(\partial_r + \frac{2}{2} \right) (\langle u^\varphi u^r \rangle - \nu \Sigma) = -\alpha U$$



Радиальный профиль скорости в вихре

- Характерное расстояние

$$R_\alpha = \sqrt{\nu/\alpha} \sim H^{1/2} \nu^{1/4} \Omega^{-1/4}$$

- Характерная скорость

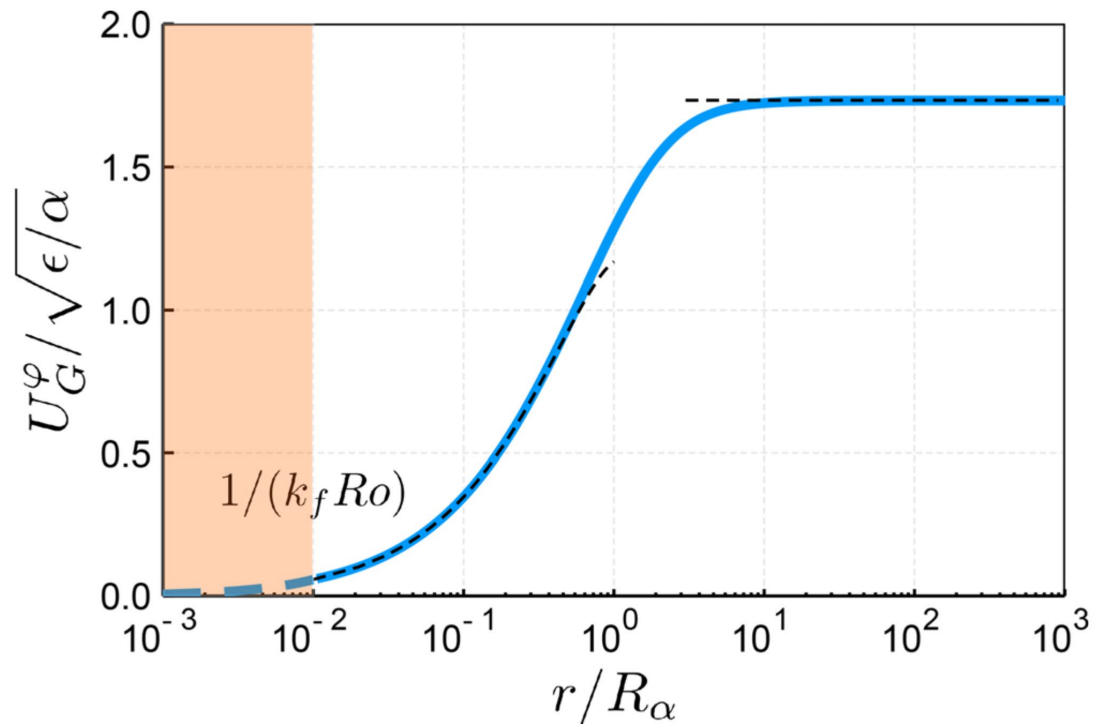
$$U^* = \sqrt{\epsilon/\alpha}$$

- Характерный градиент скорости

$$\Sigma^* = \frac{U^*}{R_\alpha} = \sqrt{\epsilon/\nu}$$

- На малых расстояниях профиль скорости

$$U^\varphi(r) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}} r (1.17 + \ln(R_\alpha/r))$$



Эффективность накачки: низкочастотные инерционные волны

Динамическое уравнение:

$$\partial_t a_{\mathbf{k}s} = -is\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}s} - \nu \mathbf{k}^2 a_{\mathbf{k}s}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = 2\Omega k_z / k = 2\Omega \cos \theta_{\mathbf{k}}.$$

Волны с малыми частотами $\cos \theta_{\mathbf{k}} \sim k^z / k_f \ll 1$

Групповая скорость направлена почти вертикально

$$\mathbf{v}_g \approx \frac{2s\Omega}{k} \mathbf{e}_z.$$

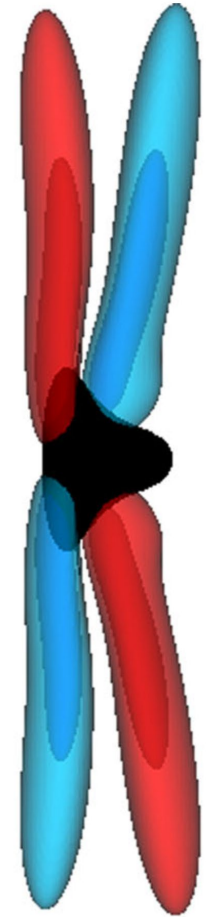
Высота сосуда H .

- $k^z = 0$ — геострофическое (квази-двумерное) мелко-масштабное течение. Если $\alpha > \nu k_f^2$, то передача энергии на крупный масштаб подавлена

[Kolokolov & Lebedev PRE \(2020\)](#)

Случай малой высоты сосуда (слабого геострофического течения):

- $k^z \geq \pi/H > (\Sigma/\Omega)k_f$ — инерционные волны с независимой динамикой в каждой поляризации. Передача энергии происходит, если $\alpha \ll \Sigma$, т.е. $\sqrt{E} \ll Ro$



[Davidson GeophysJInt \(2014\)](#)

Эффективность накачки: высокий сосуд

Групповая скорость направлена почти вертикально

$$\mathbf{v}_g \approx \frac{2s\Omega}{k} \mathbf{e}_z.$$

Случай высокого сосуда (сильного геострофического течения):

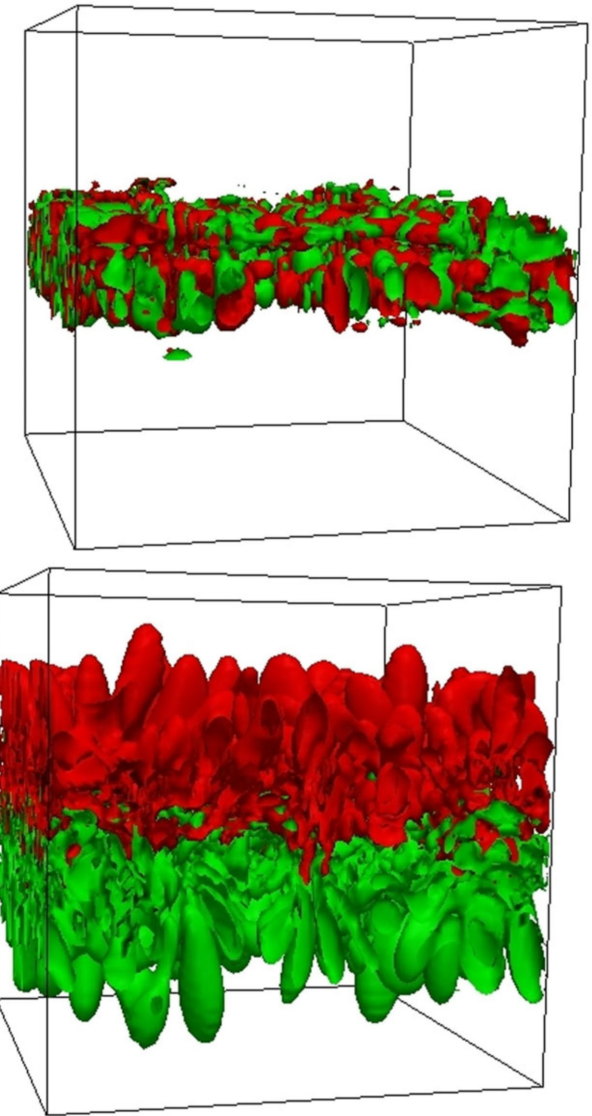
- $k^z \geq \pi/H < (\Sigma/\Omega)k_f$. Существуют $k^z/k_f < \Sigma/\Omega$, что соответствует слабо-неоднородному вдоль оси вращения квази-двумерному течению.

Характерное время передачи энергии крупномасштабному течению

$$\frac{k_f}{\Omega k^z} < \frac{k_f H}{\Omega}. \quad \text{Salhi \& Cambon (1997) JFM}$$

Это есть время, необходимое для распространения возмущения из объёма до границ, поскольку групповая вертикальная скорость та же.

Таким образом, эффективность передачи энергии порядка единицы.



Davidson GeophysJInt (2014)

Результаты

- Рассмотрен эффект конечности числа Россби.
Дана характеристика асимметрии циклон-антициклон.
- Рассмотрено геострофическое когерентное в сосуде с конечной высотой.
Найден радиальный профиль когерентных вихрей.
Установлено влияние конечной высоты на эффективность накачки