Симметрии и решения трехмерного уравнения Кадомцева - Петвиашвили

О.В. Капцов , Д.О. Капцов

20 декабря 2021 г.

Трехмерный аналог уравнения КП (3dКП):

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \delta(u_{yy} + u_{zz}) = 0, \quad \delta = \pm 1 \qquad (1)$$

возникает в физике плазмы, в механике газожидкостных сред.

Алгебра точечных симметрий

$$Y_1 = -\frac{\delta y}{2} F_t \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\delta y}{12} F_{tt} \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y_2 = -\frac{\delta z}{2} G_t \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\delta z}{12} G_{tt} \frac{\partial}{\partial u}$$

$$Y_3 = H \frac{\partial}{\partial x} + \frac{H_t}{6} \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_5 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z},$$

где F, G, H – произвольные гладкие функции от t. Кроме того, допускается оператор растяжения Y_6.
Оператор Y_3 соответствует обобщенному преобразованию Галилея вдоль оси x:

$$\tilde{x} = x + aH, \qquad \tilde{u} = u + \frac{a}{6} H_t,$$

где a – параметр группы.

Операторы Y_4, Y_5 порождают преобразование переноса по t и вращения. Оператор Y_1 задает преобразование

$$\tilde{y} = y + aF, \qquad \tilde{x} = x - (ay + \frac{a^2}{2}F)F_t, \qquad \tilde{u} = u - \frac{1}{12}(ay + \frac{a^2}{2}F)F_{tt}.$$

Аналогичные преобразования соответствуют оператору Y_2. Кроме того, имеется три дискретных симметрии:

$$S_1 = \{\tilde{t} = -t,\ \tilde{x} = -x\}, \quad S_2 = \{\tilde{y} = -y\}, \quad S_3 = \{\tilde{z} = -z\}.$$

Преобразование Хироты-Бейкера

По аналогии с КП вводим τ-функцию от t, x, y, z

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau. \tag{2}$$

Подставляя (2) в уравнение 3dКП и дважды его интегрируя по x, приходим к следующему билинейному уравнению

$$\tau\tau_{tx} - \tau_t\tau_x + \tau\tau_{xxxx} - 4\tau_x\tau_{xxx} + 3\tau_{xx}^2 + \delta(\tau\tau_{yy} - \tau_y 2 + \tau\tau_{zz} - \tau_z^2) = 0 \tag{3}$$

При $\tau_z = 0$ получается известное билинейное уравнение, соответствующее двумерному уравнению КП.

Двойные волны

Будем искать двойные бегущие волны уравнения (3), т.е. решения вида

$$\tau = g(\phi_1, \phi_2),$$

где $\phi_i = k_i x + n_i y + r_i t + w_i t \ (i = 1, 2), \ k_i, n_i, r_i, w_i \in \mathbb{R}$. Сначала предполагаем, что функция τ является многочленом второго порядка от экспонент:

$$\tau = 1 + s_1 f_1 + s_2 f_2 + s_{20} f_1^2 + s_{12} f_1 f_2 + s_{02} f_2^2, \qquad (4)$$

где $s_1, s_2, s_{20}, s_{12}, s_{02} \in \mathbb{R}, \ f_i = \exp(\phi_i)$. Подставляя (4) в (3), получаем многочлены относительно f_1, f_2. Приравнивания к нулю коэффициенты этого многочлена, приходим к нелинейной алгебраической системе NAS относительно $k_i, n_i, r_i, w_i, s_1, s_2, s_{20}, s_{12}, s_{20}$. Для нахождения решений NAS удобно использовать системы компьютерной алгебры.

Приведем одно из решений системы NAS:

$$s_{12} = s_1 s_2 \frac{3(k_1^2 k_2 - k_1 k_2^2)^2 - \delta(k_1 n_2 - k_2 n_1)^2 - \delta(k_1 r_2 - r_1 k_2)^2}{3(k_1^2 k_2 + k_1 k_2^2)^2 - \delta(k_1 n_2 - k_2 n_1)^2 - \delta(k_1 r_2 - r_1 k_2)^2},$$
$$w_i = \frac{-k_i^4 + \delta(n_i^2 + r_i^2)}{k_i}. \tag{5}$$

Если s_1, s_2, s_{12} – положительные числа, то функция τ порождает двухсолитонное решение уравнения 3dКП.

Пусть при $\delta = 1$ выполняется соотношение

$$3(k_1^2 k_2 - k_2^2 k_1)^2 = (k_1 n_2 - k_2 n_1)^2 + (k_1 r_2 - r_1 k_2)^2$$

Тогда $s_{12} = 0$ в формуле (5). В этом случае (при $s_1 > 0, s_2 > 0$), мы получаем резонансное решение уравнения 3dКП. Такие решения, для двухмерного уравнения КП, были найдены в [Miles]. Такие структуры часто называют резонансом солитонов. На рис.1 представлен график решения при $z = -1,\ t = 0$.

При $\delta = -1$ можно построить гладкие ограниченные решения уравнения 3dКП при комплексных параметрах k_i, n_i. Например, если

$k_1 = 1 + i, k_2 = \bar{k_1},\ n_1 = -1 + 4i, n_2 = \bar{n_1}, s_1 = s_2 = r_1 = r_2 = 1$,

то решения уравнения 3dКП гладкое и ограниченное. Это решение локализовано около плоскости $x - y + z - 3t = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^4$. На рис. 2 представлен график решения при $t = 0, z = -1$.

Билинейное уравнение (3) имеет решение в виде тройных бегущих волн

$$1 + s_1 f_1 + s_2 f_2 + s_3 f_3 + s_{12} f_1 f_2 + s_{13} f_1 f_3 + s_{13} f_1 f_3 + s_{23} f_2 f_3 + s_{123} f_1 f_2 f_3, \tag{6}$$

где $s_1, s_2, s_3, s_{12}, s_{13}, s_{23}, s_{123} \in \mathbb{R},\ f_i = \exp(k_i x + n_i y + r_i z + w_i t)$. При этом должны соблюдаться равенства

$$w_i = \frac{-k_i^4 \pm n_i^2 \pm r_i^2}{k_i}, \qquad s_{123} = s_{12} s_{13} s_{23}, \quad \begin{vmatrix} k_1 & n_1 & r_1 \\ k_2 & n_2 & r_2 \\ k_3 & n_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

кроме того должны удовлетворяться аналоги соотношения (5) для s_{12}, s_{13}, s_{23}.

Перейдем теперь к построению рациональных решений уравнения 3dКП в виде двойных волн. Для этого будем искать решения билинейного уравнения (3) в виде многочлена второго порядка

$$\tau = s_0 + s_1\phi_1 + s_2\phi_2 + s_{20}\phi_1^2 + s_{12}\phi_1\phi_2 + s_{02}\phi_2^2,$$

где $\phi = k_i x + n_i y + r_i z + w_i t$. Подставляя τ в (3), получаем многочлен относительно t, x, y, z. Приравнивая его коэффициенты к нулю, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений NAE. Система NAE имеет много решений, здесь приводятся лишь некоторые из них. Приоритет при выборе решений отдавался наиболее компактным.

Одно из полиномиальных решений уравнения (3) имеет вид

$$\tau = 1 + (k_1 x - \frac{(3k_1^4 - n_1^2)t}{k_1} + n_1 y)^2 + 3k_1^4 z^2.$$

Заметим, что вдоль прямых, заданных пересечением плоскостей $k_1 x + n_1 y = const, z = const$ (в пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z)$) решение соответствующего 3dКП не стремится к нулю при $|x| \to \infty, |y| \to \infty$, но является ограниченным. Подобные решения скорее похожи на солитоны, чем на так называемые лампы.

Следующее решение уравнения (3) имеет вид

$$\tau = 1 + \phi_1^2 + \phi_2^2, \tag{7}$$

При этом параметры n_1, w_1, w_2 задается формулами

$$n_1 = \frac{k_1 n_2 \pm \sqrt{3(k_1^2 + k_2^2)^3 - (k_1 r_2 - k_2 r_1)^2}}{k_2^2}, \qquad w_2 = \frac{n_2^2 + r_2^2 \mp 3(k_1^2 +}{k_2}$$

$$w_1 = \frac{3k_1(k_1^2 + k_2^2) - k_1(3n_2^2 + r_2^2) + 2k_2 r_1 r_2 + 2n_1 k_2 n_2}{k_2^2}.$$

Функция (7) тоже порождает гладкое ограниченное решение уравнения 3dКП, например, при
$k_1 = 2, k_2 = 2, n_2 = 3, r_1 = 0.5, r_2 = 0.2.$

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION