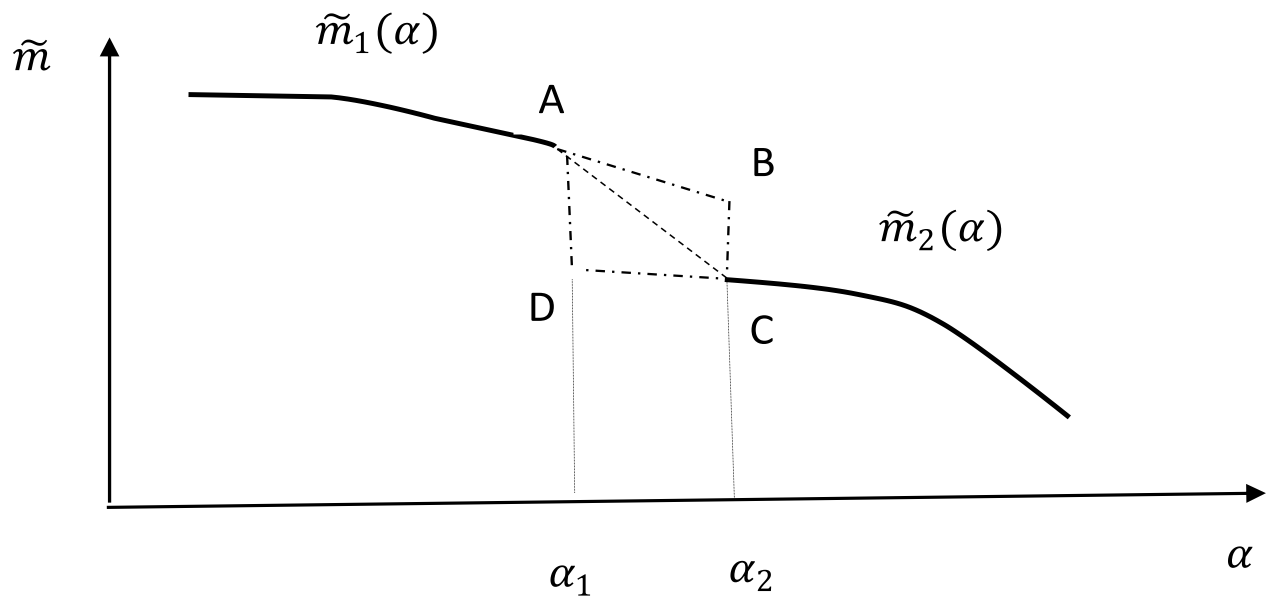
ПАО «РКК «Энергия», МФТИ, г. Королёв.

# МЕТОД ОПИСАНИЯ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Хатунцева Ольга Николаевна

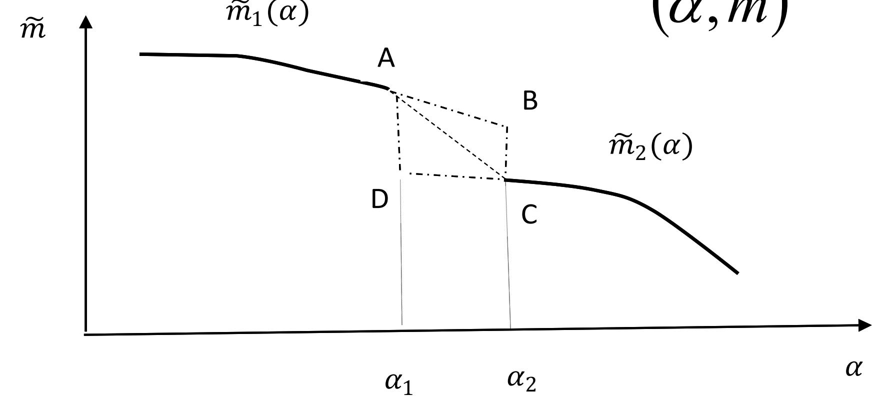
*ol-khatun@yndex.ru*

Метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, описывающие их, скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных. В этих областях функции могут вести себя случайным образом, не меняя, однако, свои значения и значения своих производных на границах областей.

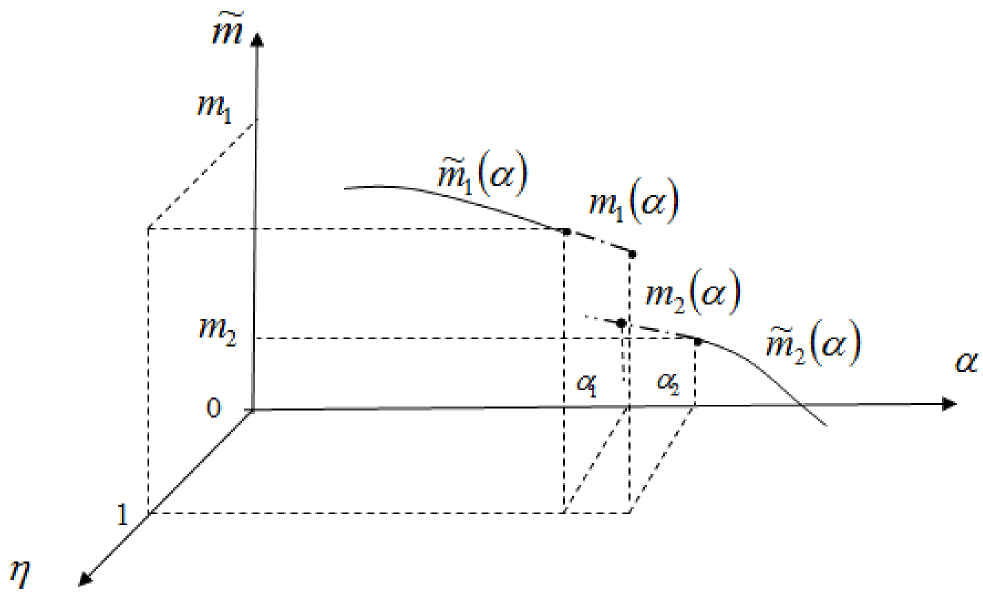


## ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ПРОЦЕССОВ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩИХ СКАЧКООБРАЗНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

$$(\alpha, m)$$




$$(\alpha, m) \rightarrow (\alpha, m; \eta)$$

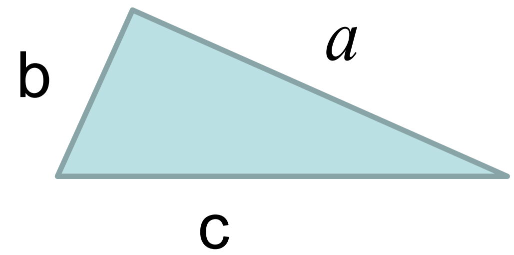



*Схематичное изображение функции с разрывом первого рода на плоскости и в расширенном пространстве переменных:*

$$(\alpha, m; \eta), \quad 0 \le \eta \le 1$$

## ***СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СКАЛЯРОВ, ФУНКЦИЙ И ОПРЕРАТОРОВ, ВЫПОЛНЯЮЩИХСЯ, НЕЗАВИСИМО ОТ ПРОЦЕССОВ, В КОТОРЫХ ОНИ ПОЛУЧЕНЫ:***

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА




$$a < b + c$$

НЕРАВЕНСТВО КОШИ-БУНЯКОВСКОГО

$$\left| \int_X f(x)\overline{g}(x)\mu(dx) \right|^2 \le \left( \int_X |f(x)|^2 \mu(dx) \right) \cdot \left( \int_X |g(x)|^2 \mu(dx) \right)$$

СООТНОШЕНИЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

$$\Delta_\psi^{\hat{k}} \Delta_\psi^{\hat{\eta}} \ge \frac{1}{2} \left| \left( \left[ \hat{k}; \hat{\eta} \right] \psi, \psi \right) \right|$$

*Операторы: $\hat{k}$ и $\hat{\eta}$, действующие в гильбертовом пространстве,- эрмитовые.*

$$(\alpha, m) \to (\alpha, m; \eta); \qquad 0 \le \eta \le 1$$

$$\eta = \begin{cases} 1, & npu \quad x < \alpha_2 \\ 0, & npu \quad x \ge \alpha_2 \end{cases}$$

$$m(\alpha;\eta) = m_2(\alpha) + \eta\left(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)\right)$$

$$\partial m(\alpha;\eta)/\partial\alpha = dm_2(\alpha)/d\alpha + \eta\left(dm_1(\alpha)/d\alpha - dm_2(\alpha)/d\alpha\right)$$

$$\left\langle m^2 \right\rangle = \frac{1}{\Delta\alpha}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha)d\alpha = \frac{\alpha}{\Delta\alpha} m^2(\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{2}{\Delta\alpha}\int_{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}^{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}} \alpha m dm$$

Учитывая непрерывность функции только в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\alpha}d\alpha = -\left(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)\right)\delta(\alpha - \alpha_2)d\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle m^2 \right\rangle = \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2\left(m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha}\Delta\alpha\right) - \frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2$$

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha \Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1 \quad \begin{cases} M^2 = m^2 / \langle m^2 \rangle \\ \varphi = \alpha / \Delta\alpha \\ \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

$$\hat{k} = i\, d/d\varphi, \quad \hat{\eta} = i\eta \qquad \left[\hat{k}; \hat{\eta}\right] M = M\delta(\varphi - \varphi_2)$$

Соотношение Гайзенберга:

$$\Delta_M^k \Delta_M^\eta \geq \frac{1}{2} \left| \left( \left[\hat{k}; \hat{\eta}\right] M, M \right) \right|$$

$$\Delta_M^k = \left[ \left( \hat{k}^2 M, M \right) - \left( \hat{k} M, M \right)^2 \right]^{1/2}; \quad \Delta_M^\eta = \left[ \left( \hat{\eta}^2 M, M \right) - \left( \hat{\eta} M, M \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\left(\hat{k}\,M, M\right) = i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,\frac{dM}{d\varphi}d\varphi = -i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,\frac{\partial M}{\partial \eta}\,\delta(\varphi-\varphi_2)d\varphi =$$

$$= -\frac{i}{2}M\left(M_1 - M_2\right)\Big|_{\varphi=\varphi_2} = -\frac{i}{2}M_2\left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - M_2\right)$$

$$\left(\hat{k}^{\,2} M, M\right) = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,\frac{d^2 M}{d\varphi^2}d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)\delta(\varphi-\varphi_2)d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}M\,\frac{d}{d\varphi}\left(M_1 - M_2\right)\Bigg|_{\varphi=\varphi_2} = \frac{1}{2}M_2\left(\frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi}\right)$$

$$\left(\hat{\eta} M, M\right) = i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta d\varphi = i\varphi\eta M^2\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi +$$

$$+ 2i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi\eta M \left(M_1 - M_2\right)\delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -iM_1^2\varphi_1 + \frac{i}{2} M_2^2 \varphi_2$$

$$\left(\hat{\eta}^2 M, M\right) = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta^2 d\varphi = -\varphi\eta^2 M^2\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi\eta M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi -$$

$$-2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi\eta^2 M \left(M_1 - M_2\right)\delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = M_1^2 \varphi_1$$

$$\Delta_M^k = \left( \frac{1}{2} M_2 \left( \frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi} \right) + \frac{1}{4} M_2^2 \left( M_1 - M_2 + \frac{dM_1}{d\varphi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_M^\eta = \left( M_1^2 \varphi_1 + \left( \frac{1}{2} M_2^2 \varphi_2 - M_1^2 \varphi_1 \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\left| \left( \left[ \hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) \right| = \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \frac{d\eta}{d\varphi} d\varphi \right| = \frac{1}{2} M^2 \Big|_{\varphi = \varphi_2} = \frac{1}{2} M_2^2$$

Алгебраические соотношения, связывающие значения функций и их производные на двух “ветвях” функции с разрывом первого рода

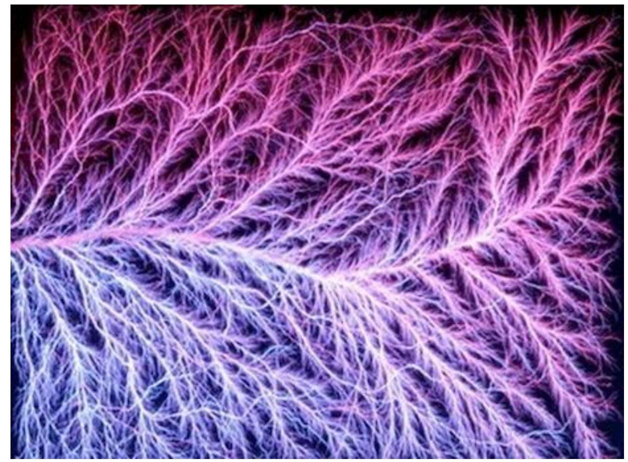
$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)^2 m_2^4 - 4\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(1-\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)m_1^2 m_2\left(m_1+\frac{dm_1}{d\alpha}\Delta\alpha - m_2\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2\frac{dm_1}{d\alpha}\Delta\alpha\right)+m_1^2\right)^2 \qquad (1)$$

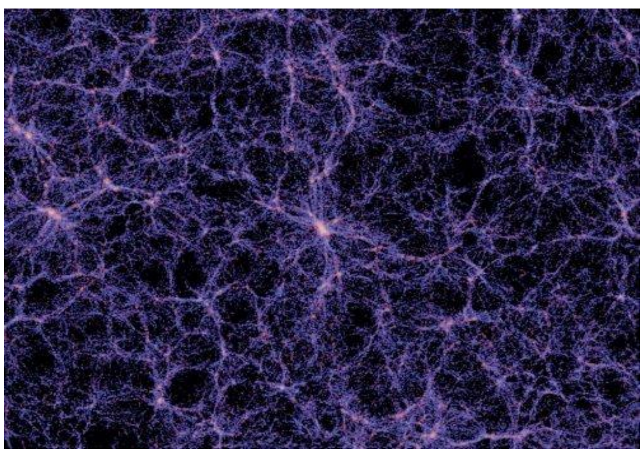
$$(\Delta\alpha)^2\left(\frac{dm_1}{d\alpha}\right)^2 + 2\Delta\alpha\frac{dm_1}{d\alpha}\left(m_1 - m_2 + \alpha_2\left(\frac{dm_1}{d\alpha}-\frac{dm_2}{d\alpha}\right)\right)+$$

$$+2m_1\left(\alpha_2+\frac{m_1}{m_2}(\Delta\alpha-\alpha_2)\right)\left(\frac{dm_1}{d\alpha}-\frac{dm_2}{d\alpha}\right)+m_1(m_1-2m_2)\geq 0 \qquad (2)$$

$$m_1(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} = m_1, \quad m_2(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_2} = m_2, \quad \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_1} = \frac{dm_1}{d\alpha}, \quad \frac{dm_2(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_2} = \frac{dm_2}{d\alpha}.$$

# МЕТОД ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В РАСШИРЕННОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

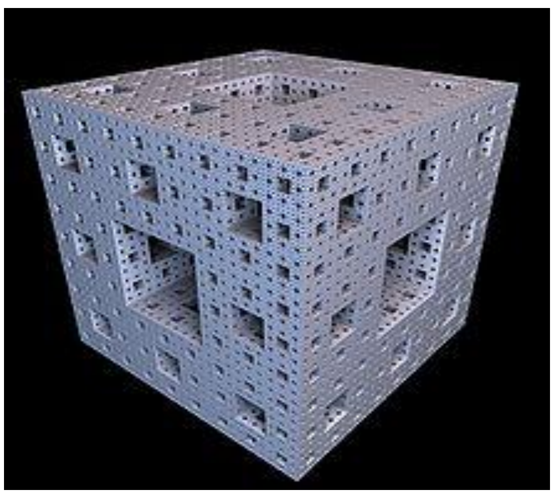


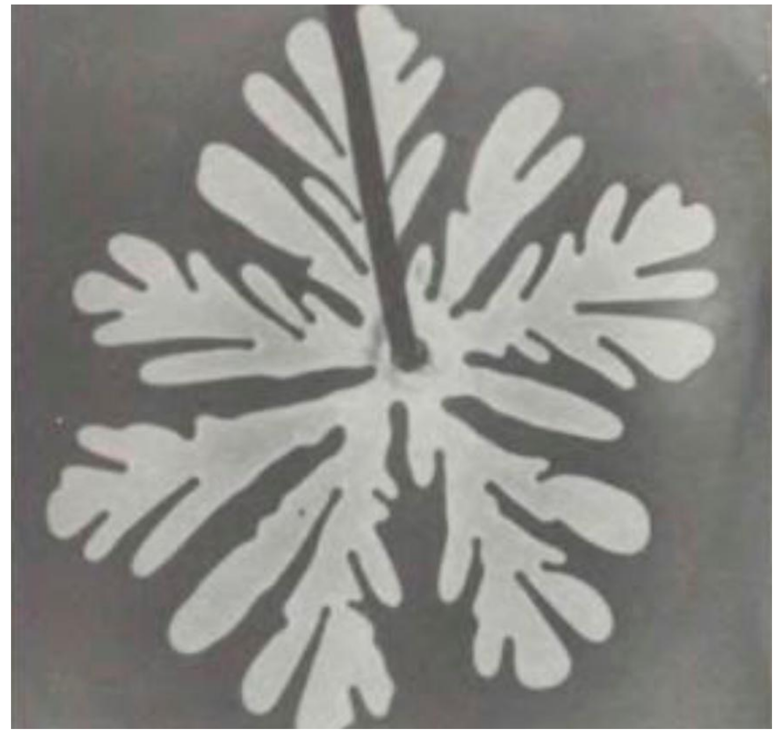


## *Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задаче образования вязких “пальцев” при вытеснении менее вязкой жидкостью более вязкую на основе метода «разрывных функций»*

$$V = aR^{D} + b$$

$$\left\langle \frac{dV}{dR} \right\rangle = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dV}{dR} dR$$





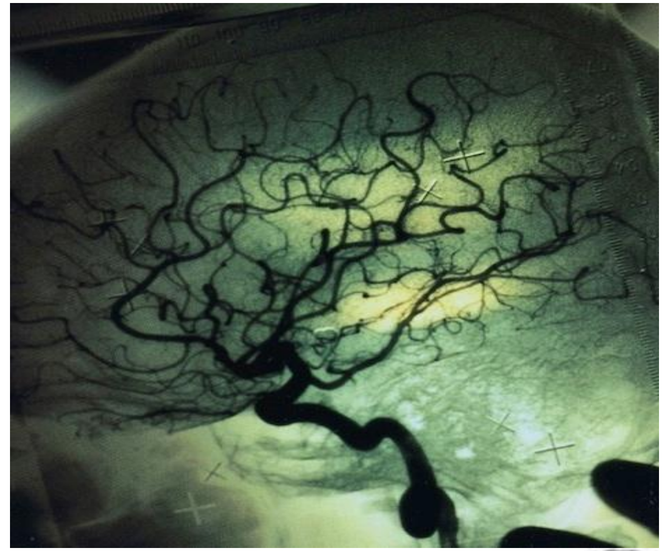
Использование приближения “идеального” фрактала, позволяющего производить перенормировку параметров

*Аналитически найденное значение размерности фрактальной структуры в задаче образования вязких "пальцев"*

$$D \approx 2.7$$

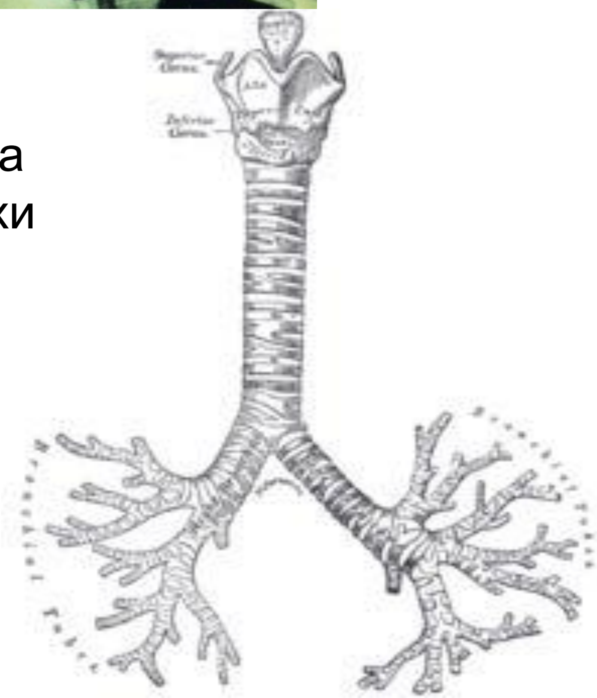
$$V(R) \approx \frac{4}{3}\pi R_0^3 + 0.08 R_0^3 \left( \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2.7} - 1 \right), \qquad R \ge R_0$$

# *Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задаче о росте дендритов*



Кровеносная система мозга (томография)

Вид спереди на трахею и бронхи



*с. https://ru.wikipedia.org/wiki/Фрактал*

$$V = aR^D + b \qquad \left\langle \frac{dV}{dR} \right\rangle = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} aDR^{D-1} dR$$

Использование приближения «идеального» фрактала для дендритов невозможно.

В зоне неустойчивости, где происходит переход от трехмерного объекта, к объекту с фрактальной структурой размерности используется приближение «тонкого слоя»

$$D \approx 1.55$$

$$V(R) \approx 48.58 S R_0 \left(R / R_0\right)^{1.55} - 47.58 S R_0$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, являющиеся их характеристиками, скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных.

С использованием этого метода теоретически исследованы параметры фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими “пальцами” и дендритов.

Метод был также применен при определении критических значений числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля, плоской задачи Куэтта, плоской задачи Пуазейля. Получено хорошее соответствие с имеющимися экспериментальными данными.

1. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов. “Сибирский журнал вычислительной математики” Т12, N2, 2009 г, стр.231-241.

   *Khatuntseva O.N. Theoretical determination of the dimension of simply connected fractal objects in problems of formation of viscous “fingers” and growth of dendrites. “Numerical Analysis and Applications”. Volume 2, Issue 2, 2009 pp.187-195*

2. Хатунцева О.Н. О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=96567

3. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=102091

4. Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=109382

15. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98854

16. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=102091

17. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=105673

18. Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=109382

*СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ*