Точное двумерное решение для токового сжатия тонкой осесимметричной оболочки; формирование перетяжки в X-пинче

Н.М. Зубарев[1,2], С.А. Чайковский[1]

[1]*Institute of Electrophysics, UD, RAS, Ekaterinburg, Russia*
[2]*Lebedev Physical Institute, RAS, Russia*

XXXI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике,
19-20 декабря 2022 г., Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН

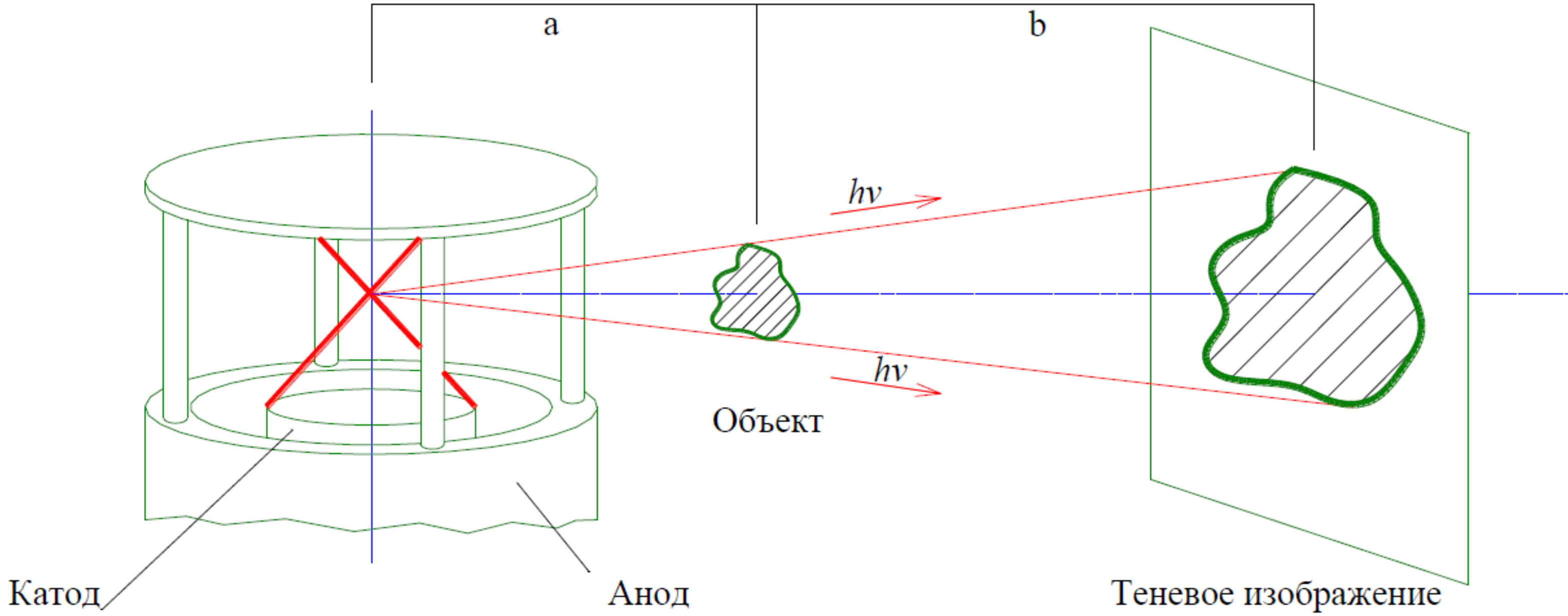


Рисунок: Схема X-пинча, поясняющая методику точечного теневого проецирования.

X-пинч впервые был предложен в Физическом институте им. П.Н. Лебедева (ФИАН) и апробирован в экспериментах в 1982 году [1]. В исходном состоянии X-пинч представляет собой две или более скрещенные тонкие проволочки. При пропускании импульса тока амплитудой от десятков килоампер до мегампер в области перекрестия формируется плотная высокотемпературная плазма, являющаяся мощным источником рентгеновского излучения. Малые размеры «горячей точки» (единицы микрон) и малая длительность импульса излучения (единицы наносекунд) привлекательны для реализации импульсного зондирования в мягком рентгеновском диапазоне спектра [2].

[1]. С.М. Захаров, Г.В. Иваненков, А.А. Коломенский, С.А. Пикуз, А.И. Самохин, И. Улшмид, Письма в ЖТФ, **8** (9), 1060 (1982).

[2]. Г.А. Месяц, Т.А. Шелковенко, Г.В. Иваненков и др. ЖЭТФ, **138** (3), 411 (2010).

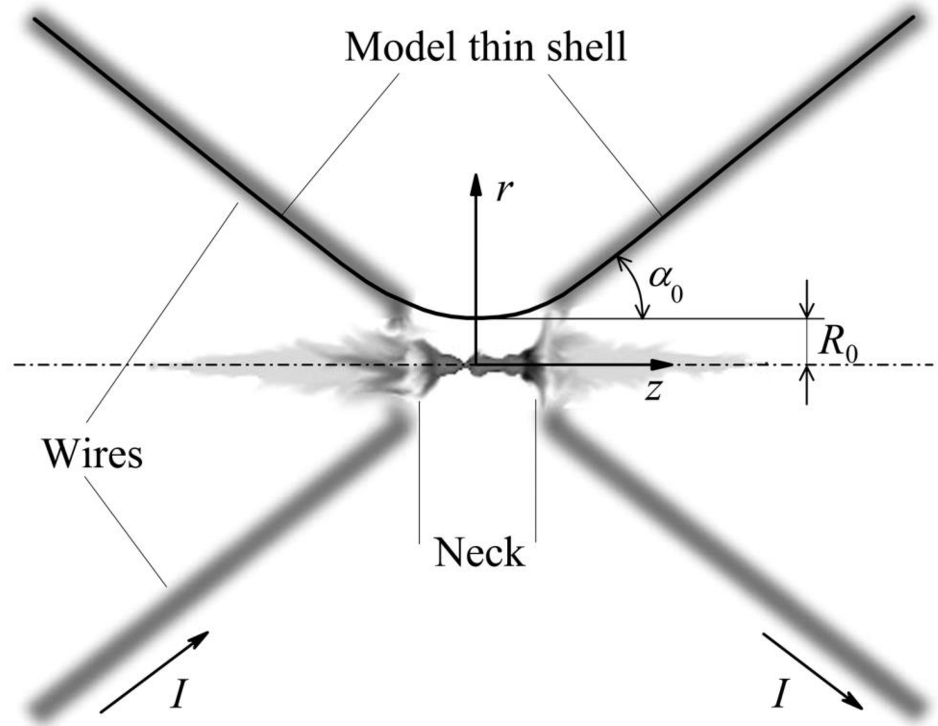


Рисунок: Схематическое изображение плазмы Х-пинча в момент генерации импульса излучения и модельная форма тонкой оболочки.

В динамике Х-пинча можно выделить четыре стадии – электрический взрыв проволочек, разлет плазмы и формирование перетяжки, имплозия перетяжки и формирование «горячей точки». Первая и четвертая стадии по времени занимают до единиц наносекунд при полной длительности процесса в сотни наносекунд [3].

[3]. V.I. Oreshkin, S.A. Chaikovsky, A.P. Artyomov, N.A. Labetskaya, A.V. Fedunin, A.G. Rousskikh, A.S. Zhigalin, Phys. Plasmas., 21 (10), 102711 (2014).

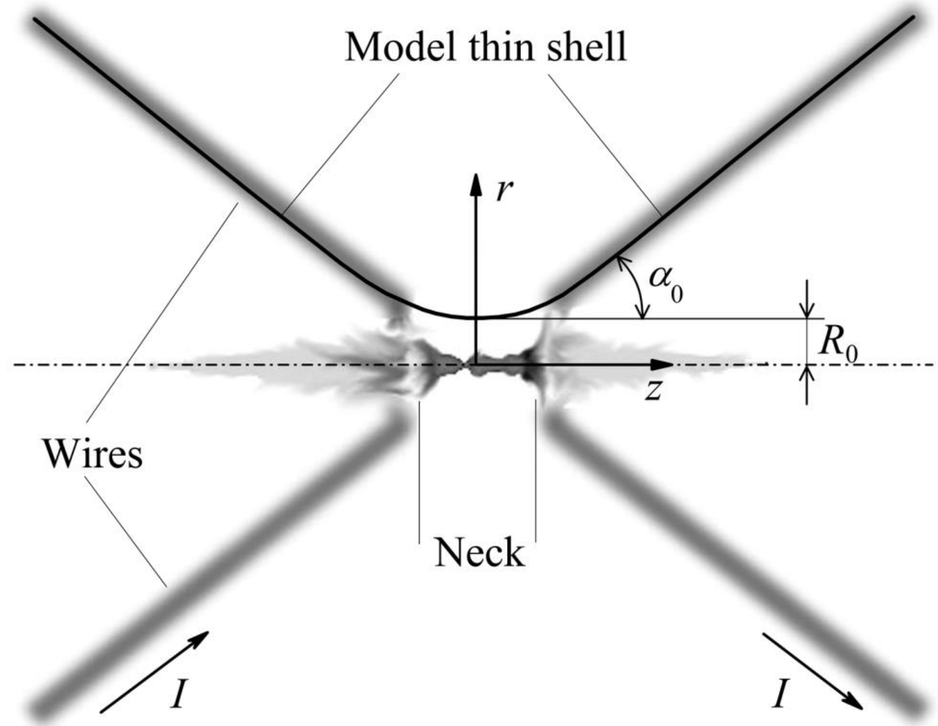


Рисунок: Схематическое изображение плазмы Х-пинча в момент генерации импульса излучения и модельная форма тонкой оболочки.

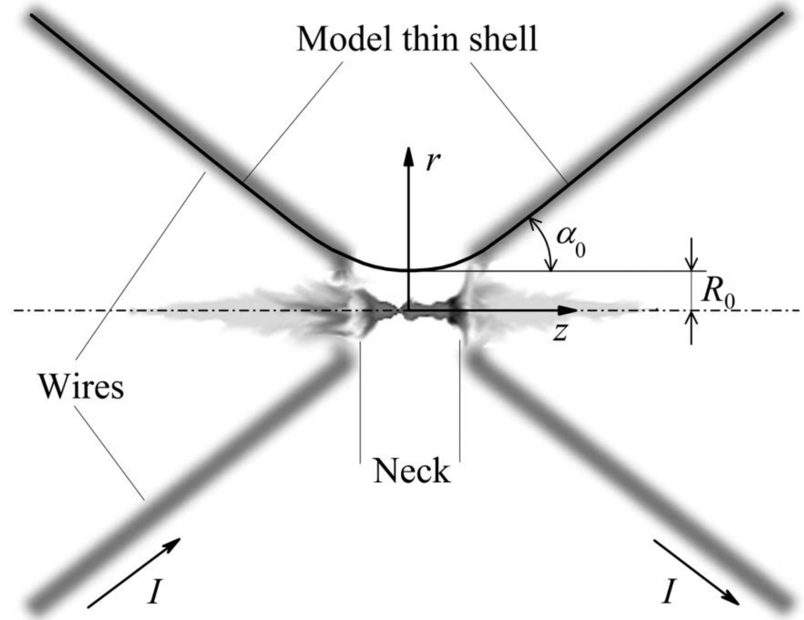
Спецификой динамики Х-пинча является ее принципиальная неодномерность: плазма может истекать из области перетяжки в аксиальном направлении. Поскольку масштаб перетяжки значительно, более чем на порядок, превышает диаметр проволочек, можно рассматривать ее формирование в рамках двумерной модели тонкой полой оболочки типа модели Отта [4].

[4]. E. Ott, Phys. Rev. Lett., **29** (21), 1429 (1972).

Модель тонкой оболочки

Зададим геометрию оболочки парой функций, определяющих ее радиус и продольную координату: $r = R(\xi, t)$, $z = Z(\xi, t)$. Здесь ξ — лагранжева координата, которую удобно выбрать так, чтобы она определяла распределение массы по оболочке (ρ_l – линейная плотность, или погонная масса):

$$\xi = \int_0^z \rho_l(z,t)dz.$$



Движение кольцеобразного элемента оболочки массой $\Delta\xi$ с радиальным и аксиальным размерами ΔR и ΔZ под действием внешнего давления P описывается ньютоновскими уравнениями

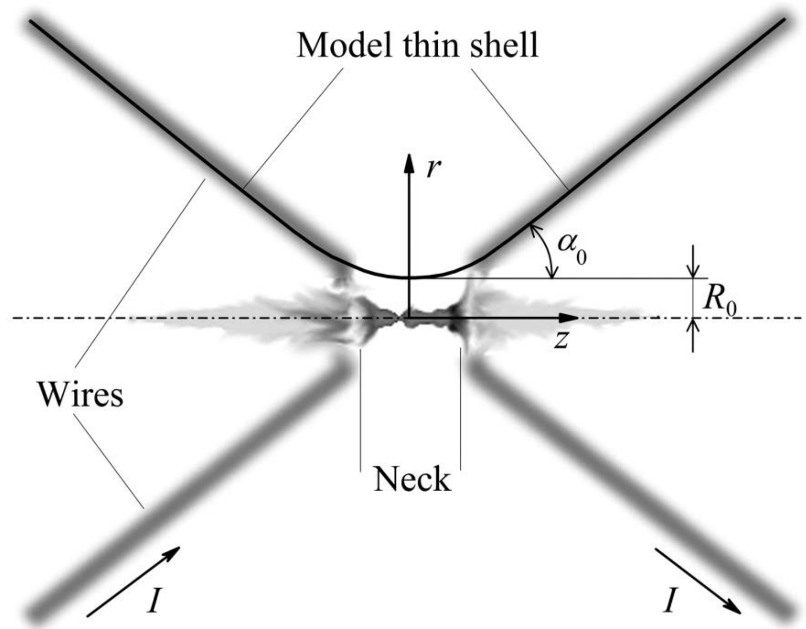
$$\Delta\xi \frac{d^2R}{dt^2} = -\Delta s P\cos\alpha, \qquad \Delta\xi \frac{d^2Z}{dt^2} = \Delta s P\sin\alpha.$$

Здесь $\alpha = \mathrm{arctg}(\Delta R/\Delta Z)$ – угол наклона элемента поверхности к оси z, $\Delta s = 2\pi R\Delta Z\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}$ – площадь его поверхности. Магнитное давление при протекании по оболочке электрического тока I есть $P = \mu_0 I^2/(8\pi^2R^2)$, где μ_0 – магнитная постоянная.

В условиях Х-пинча формирование перетяжки, как правило, происходит на фронте импульса тока, когда можно считать $I \sim t$. Получим после перехода к частным производным

$$\boxed{\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = -\frac{Ct^2}{R}\frac{\partial Z}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{Ct^2}{R}\frac{\partial R}{\partial \xi},}$$

где $C = \mu_0 (dI/dt)^2/4\pi$ – константа. Эта модель является обобщением модели Отта [4].

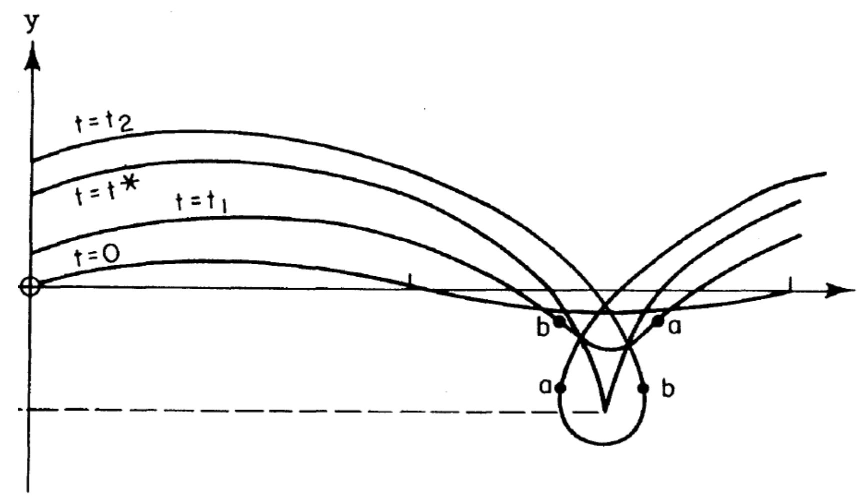


Модель Отта:

$$\partial^2 x/\partial t^2 = -g\,\partial y/\partial \xi_0,$$
$$\partial^2 y/\partial t^2 = g\,\partial x/\partial \xi_0 - g,$$

Ее замечательной особенностью является линейность. Закон дисперсии:

$$\omega^4 = k^2 g^2$$



Формирование особенности за конечное время в модели Отта

Построение точных частных решений

Нетривиальное семейство частных решений модели может быть найдено разделением переменных. Осуществим подстановку

$$R = f(t)F(\xi), \qquad Z = g(t)G(\xi),$$

где f, g, F, G – неизвестные функции. Получим четыре связанных через вспомогательные константы s и q уравнения. Первая пара — относительно переменной t, а вторая пара – относительно ξ:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -Cst^2\frac{g}{f}, \qquad \frac{d^2 g}{dt^2} = Cqt^2,$$

$$\frac{dF}{d\xi} = qFG, \qquad \frac{dG}{d\xi} = sF^2.$$

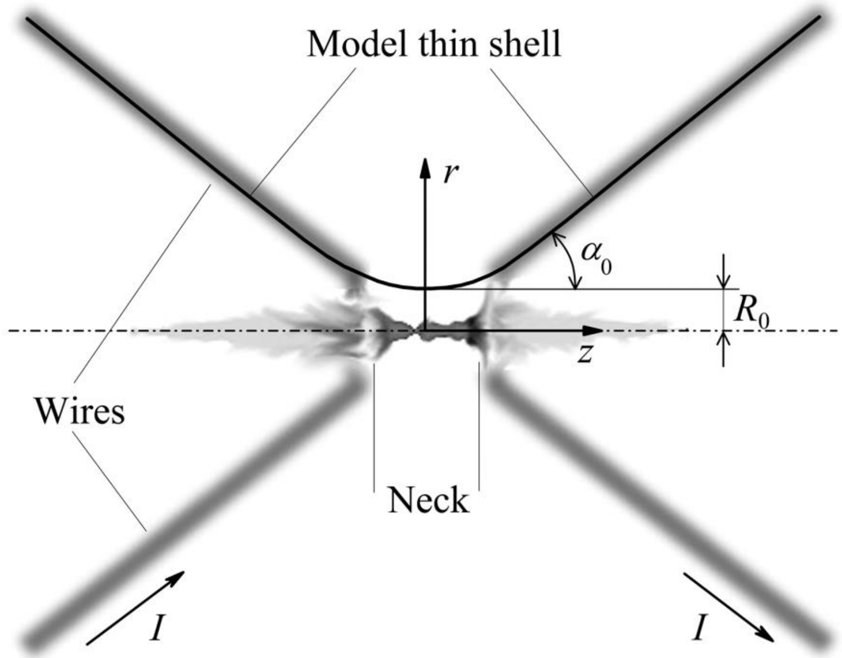
Решение второй пары ОДУ дает:

$$F = \sqrt{h/s}\cos^{-1}\left(\xi\sqrt{hq}\right), \qquad G = \sqrt{h/q}\,\mathrm{tg}\left(\xi\sqrt{hq}\right),$$

где h – постоянная интегрирования (считаем, что $s > 0$, $q > 0$, $h > 0$). Исключая отсюда лагранжеву координату ξ, находим, что оболочка представляет собой однополостный гиперболоид вращения с меняющимися со временем параметрами.

Форма оболочки:

$$\left(\frac{r}{R_{\min}(t)}\right)^2 - \left(\frac{z\,\mathrm{tg}\alpha_0\rho_{\max}(t)}{R_0\rho_0}\right)^2 = 1$$



Близость гиперболоидальной оболочки к геометрии X-пинча позволит нам в дальнейшем использовать получаемые решения для описания формирования перетяжек.

Решению соответствует следующее распределение линейной плотности вдоль z:

$$\rho_l \equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)^{-1} = \frac{R_0^2\rho_0^2\rho_{\max}(t)}{R_0^2\rho_0^2 + \mathrm{tg}^2\alpha_0\rho_{\max}^2(t)z^2},$$

$$R_{\min}(t) = f(t)\sqrt{h/s}, \qquad R_0 = R_{\min}(0), \qquad \rho_{\max}(t) = 1/(hg(t)),$$

$$\rho_0 = \rho_{\max}(0), \qquad \alpha_0 = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{qh}R_0\rho_0\right).$$

Данное распределение линейной плотности имеет колоколообразную форму.

Ширину распределения (аксиальный размер области, в которой $\rho_l > k\rho_{\max}$; k – коэффициент, который мы примем равным 0.8) характеризует комбинация

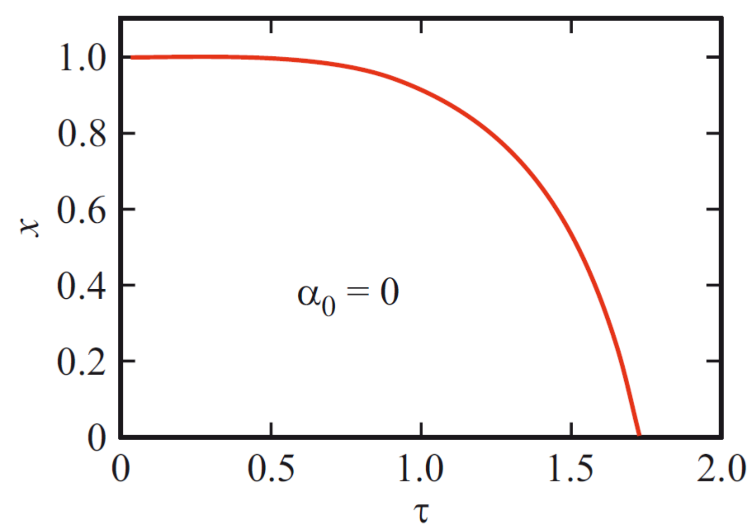
$$L(t) = \frac{2\sqrt{k^{-1}-1}\,R_0\rho_0}{\operatorname{tg}\alpha_0\,\rho_{\max}(t)}.$$

Рассмотрим теперь первую пару ОДУ. Их удобно переписать через функции $R_{\min}$ и $\rho_{\max}$:

$$\frac{d^2R_{\min}}{dt^2} = -\frac{Ct^2}{R_{\min}\rho_{\max}}, \qquad \frac{d^2\rho_{\max}^{-1}}{dt^2} = \frac{Ct^2\operatorname{tg}^2\alpha_0}{R_0^2\rho_0^2},$$

$$R_{\min}\big|_{t=0} = R_0, \qquad \rho_{\max}^{-1}\big|_{t=0} = \rho_0^{-1}, \qquad \left.\frac{dR_{\min}}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\rho_{\max}^{-1}}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Коллапс оболочки:



При $\alpha_0 = 0$ задача сводится к тривиальному случаю одномерного сжатия цилиндрической оболочки радиусом $R(t)$ с постоянной линейной плотностью ρ_0 (т.е. геометрия Z-пинча).

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{Ct^2}{R\rho_0}, \qquad R_{\min}\big|_{t=0} = R_0, \qquad \left.\frac{dR_{\min}}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Второе уравнение системы легко интегрируется. Находим

$$\rho_{\max}^{-1}(t) = \rho_0^{-1} + Ct^4 \operatorname{tg}^2\alpha_0 \Big/ \left(12R_0^2\rho_0^2\right)$$

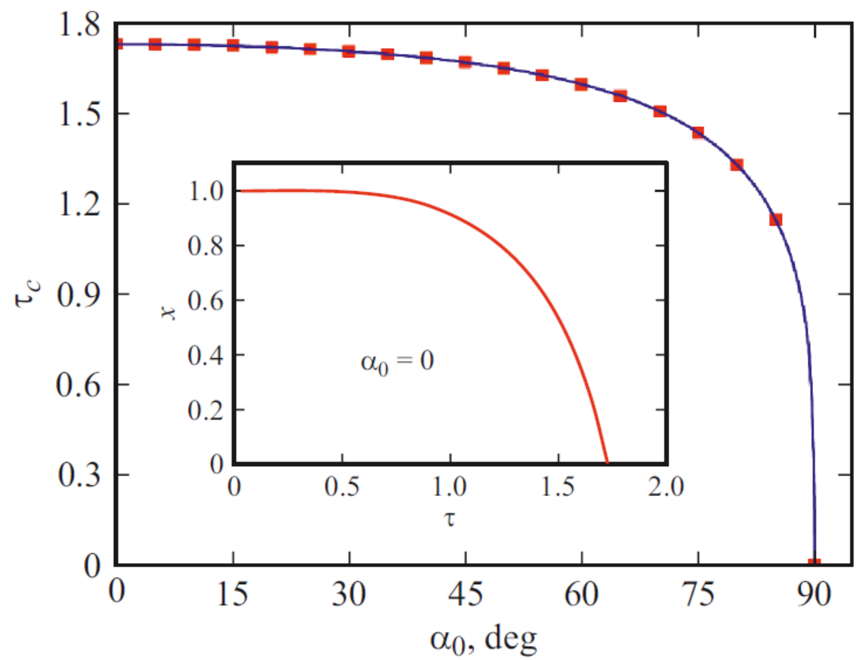
Отсюда видно, что линейная плотность в сечении $z = 0$ падает со временем вследствие вытеснения массы из области формирующейся перетяжки. В итоге система сводится к единственному уравнению с парой начальных условий:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{\tau^2}{x}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha_0}{12}\tau^4\right), \qquad x\big|_{\tau=0} = 1, \qquad \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0,$$

где мы вели безразмерные переменные $x = R_{\min}/R_0$ и $\tau = t\,(R_0^2\rho_0 C^{-1})^{-1/4}$.

Радиус перетяжки уменьшается до нуля за конечное время τ_c: происходит коллапс оболочки. В одномерном случае ($\alpha_0 = 0$) время максимально и составляет $\tau_c = 1.728$. С ростом α_0 оно монотонно падает, что объясняется вытеснением массы из области перетяжки. Справедлива аппроксимация

$$\tau_c(\alpha_0) \approx \tau_0\,(1 + 0.08\alpha_0^2 + 0.009\alpha_0^4)\cos^{1/4}\alpha_0.$$



Рассчитанная зависимость τ_c от угла α_0.

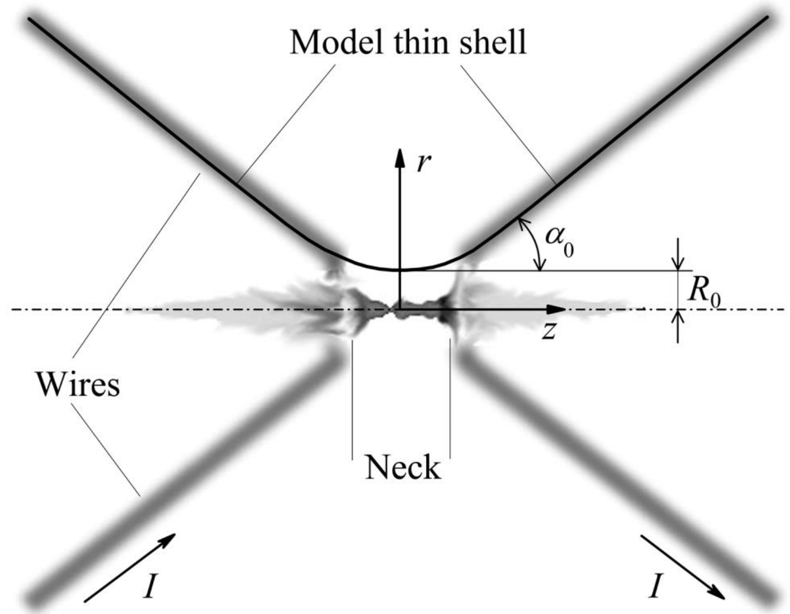
Согласно полученному решению, к моменту $T_c = (R_0^2\rho_0 C^{-1})^{1/4}\tau_c(\alpha_0)$ происходит радиальный коллапс оболочки на всем ее протяжении. Имеем $R|_{t=T_c} = 0$ при любом ξ при том, что исходно (при $t = 0$) радиус оболочки тем больше, чем больше расстояние $|z|$. Это связано с неоднородностью распределения линейной плотности. Она спадает на периферии как $1/z^2$, что позволяет легким "крыльям" оболочки сколлапсировать за то же время, что и тяжелая, но близкая к оси z область оболочки вблизи сечения $z = 0$.

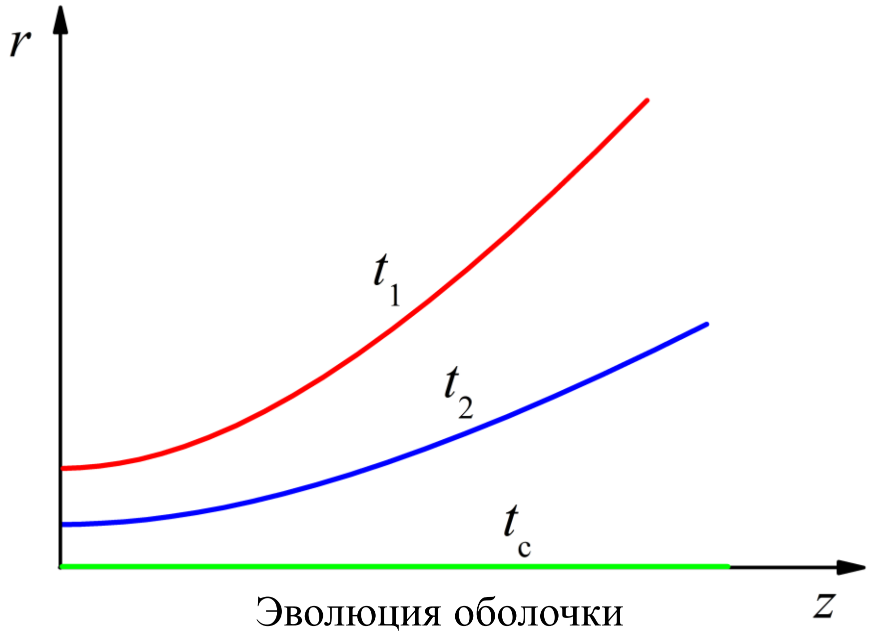
Рассмотрим, каким образом можно использовать полученные результаты применительно к задаче о формировании перетяжки в X-пинче.

Понятно, что для пинча характерно исходно равномерное распределение линейной плотности: в момент $t = 0$ можно взять

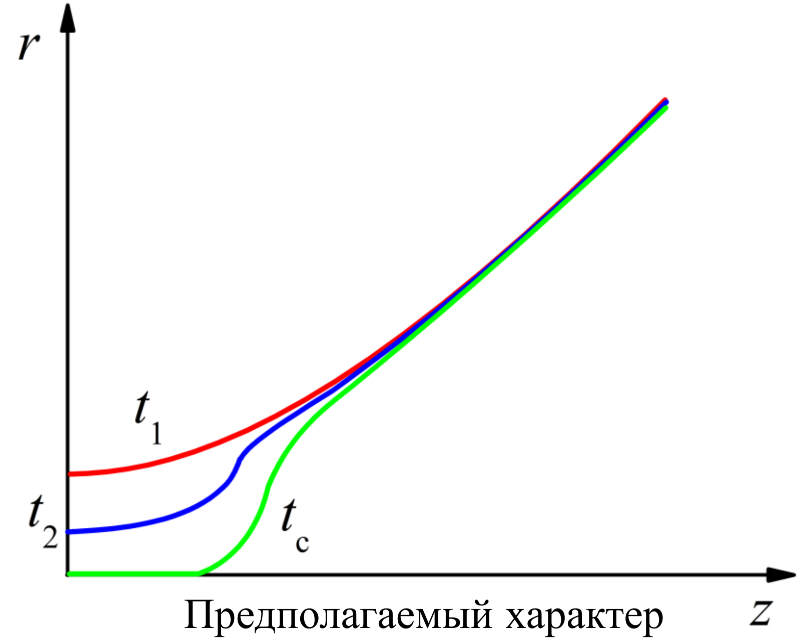
$$\rho_l = N\rho_w/\cos\alpha_0 = \text{const},$$

где ρ_w – погонная масса одной проволочки, N – их число, α_0 – угол наклона (мы отождествляем его с углом гиперболоидальной оболочки). В такой ситуации коллапс будет происходить не одновременно по всей оси системы, а лишь в "узком" месте, где скрещиваются проволочки.

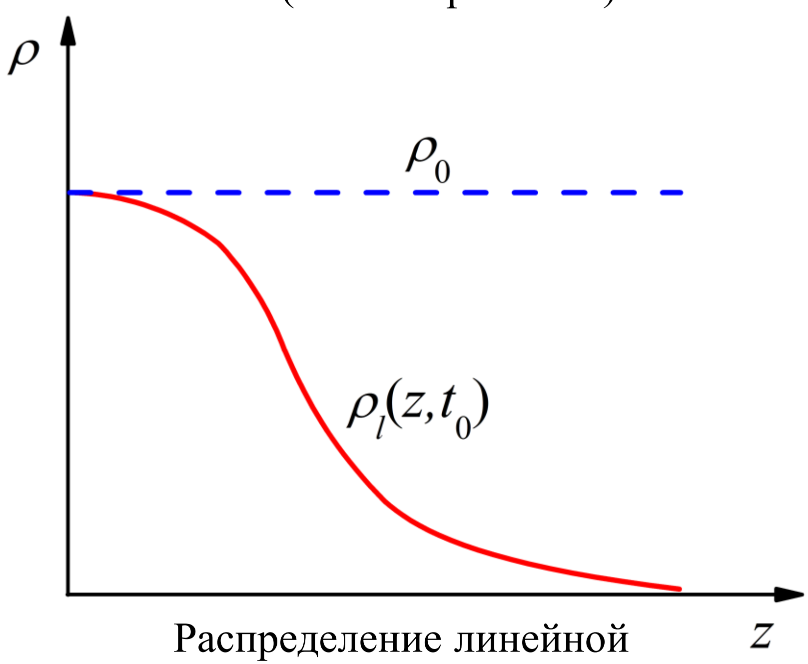




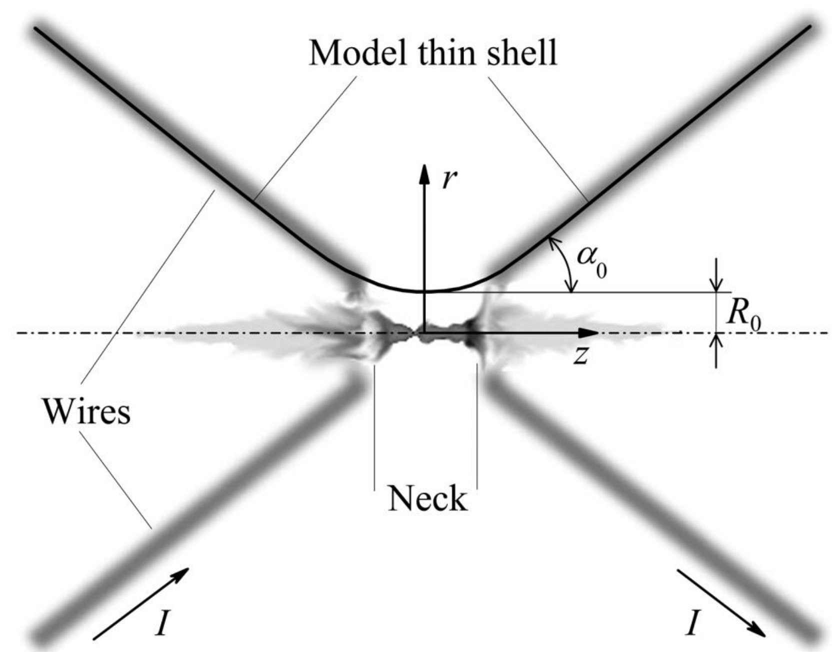
Эволюция оболочки
(частное решение)



Предполагаемый характер
эволюция оболочки



Распределение линейной
плотности (частное решение)

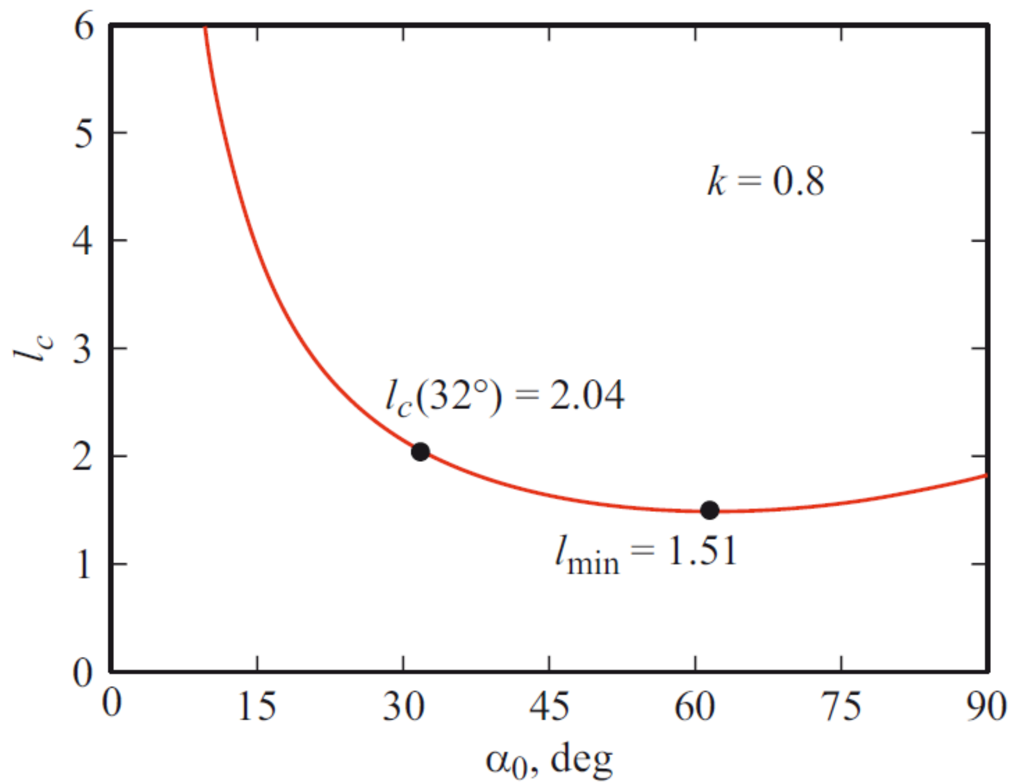


Зададимся вопросом, что произойдет с полученными выше решениями, если при прочих равных взять исходно однородное распределение линейной плотности: $\rho_l(z,0) = \rho_0$. Ответ очевиден: утяжеленные “крылья” не смогут сколлапсировать за время T_c. Сколлапсирует лишь оболочка в окрестности сечения $z = 0$, в которой линейная плотность была близка к ρ_0. Соответствующий масштаб определяется шириной распределения линейной плотности, т.е. экспериментальное значение длины перетяжки $L_{\rm exp}$ можно отождествить с величиной $L_c = L(T_c)$:

$$L_c = l_c R_0,$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{k^{-1}-1}}{\mathrm{tg}\,\alpha_0}\left(1+\frac{\tau_c^4(\alpha_0)\,\mathrm{tg}^2\alpha_0}{12}\right).$$

Соответствующая зависимость – немонотонная. При $\alpha_0 = 62^{\rm o}$ достигается минимум: $L_{\min} = 1.51R_0$. Отметим, что для характерного для экспериментов [3] угла $\alpha_0 = 32^{\rm o}$ будет $L_{\min} = 2.04R_0$.



Время формирования перетяжки применительно к X-пинчу находится подстановкой $\rho_0 = N\rho_w/\cos\alpha_0$. Получим $T_c = (R_0^2 N\rho_w/C\cos\alpha_0)^{1/4}\tau_c(\alpha_0)$. Исключая величину R_0, находим связь между основными параметрами задачи:

$$\boxed{\frac{\mu_0 T_c^4}{4\pi N\rho_w L_c^2}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \approx \frac{\mu_0 T_{\mathrm{exp}}^2 I_{\mathrm{exp}}^2}{64\pi N\rho_w L_{\mathrm{exp}}^2} \approx \frac{\tau_c^4(\alpha_0)}{l_c^2(\alpha_0)\cos\alpha_0}.}$$

Здесь мы учли, что в экспериментах регистрируются длина L_{exp}, момент генерации импульса рентгеновского излучения T_{exp} и соответствующий ему ток $I_{\mathrm{exp}} = (dI/dt)T_{\mathrm{exp}}$. По оценкам [3] можно считать $T_{\mathrm{exp}} = 2T_c$ (длительности процессов формирования перетяжки и ее последующего сжатия с образованием “горячей точки” сопоставимы).

Анализ экспериментальных данных [3] показывает, что найденная связь с приемлемой точностью выполняется для широкого диапазона параметров I_{exp} = 70−200 kA, T_{exp} = 60−220 ns, ρ_0 = 30−550 μg/cm. Как и в [3], зависимость длины перетяжки от линейной плотности достаточно слабая: при увеличении массы в 20 раз длина перетяжки растет лишь в 2 раза.

Заключение

Построены точные двумерные решения, описывающие динамику токового сжатия полой оболочки, представляющей собой однополостный гиперболоид вращения. Решения применимы для интерпретации результатов экспериментов по формированию перетяжек в X-пинчах. В частности, они позволяют связать основные параметры задачи – аксиальный масштаб перетяжки, время ее формирования, геометрические характеристики системы [5].

[5] Н.М. Зубарев, С.А. Чайковский. Точное двумерное решение для токового сжатия тонкой осесимметричной оболочки и формирование перетяжки в X-пинче. Письма в ЖТФ. - 2022. - Т. 48. - № 21. - С. 17-20.

Спасибо
за внимание!