Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт имени П.Н. Лебедева
ФИАН
Российской академии наук

Ильин А.С., Копьев А.В., Сирота В.А., Зыбин К.П.

.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И ЭФФЕКТЫ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В ГЛАДКИХ d-МЕРНЫХ ПОТОКАХ.

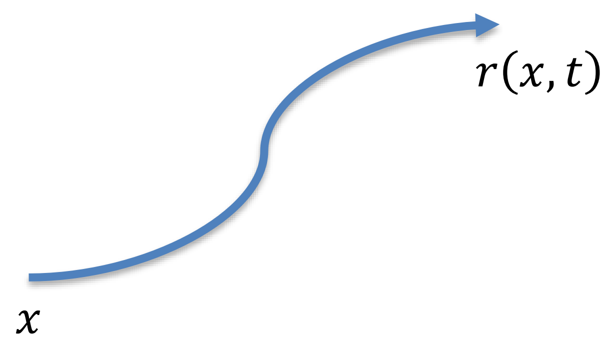
ГЛАДКИЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОТОК

$u(r,t)$- гладкое случайное бездивергентное поле скоростей.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОТОК-ПОТОК ЖИДКИХ ЧАСТИЦ:

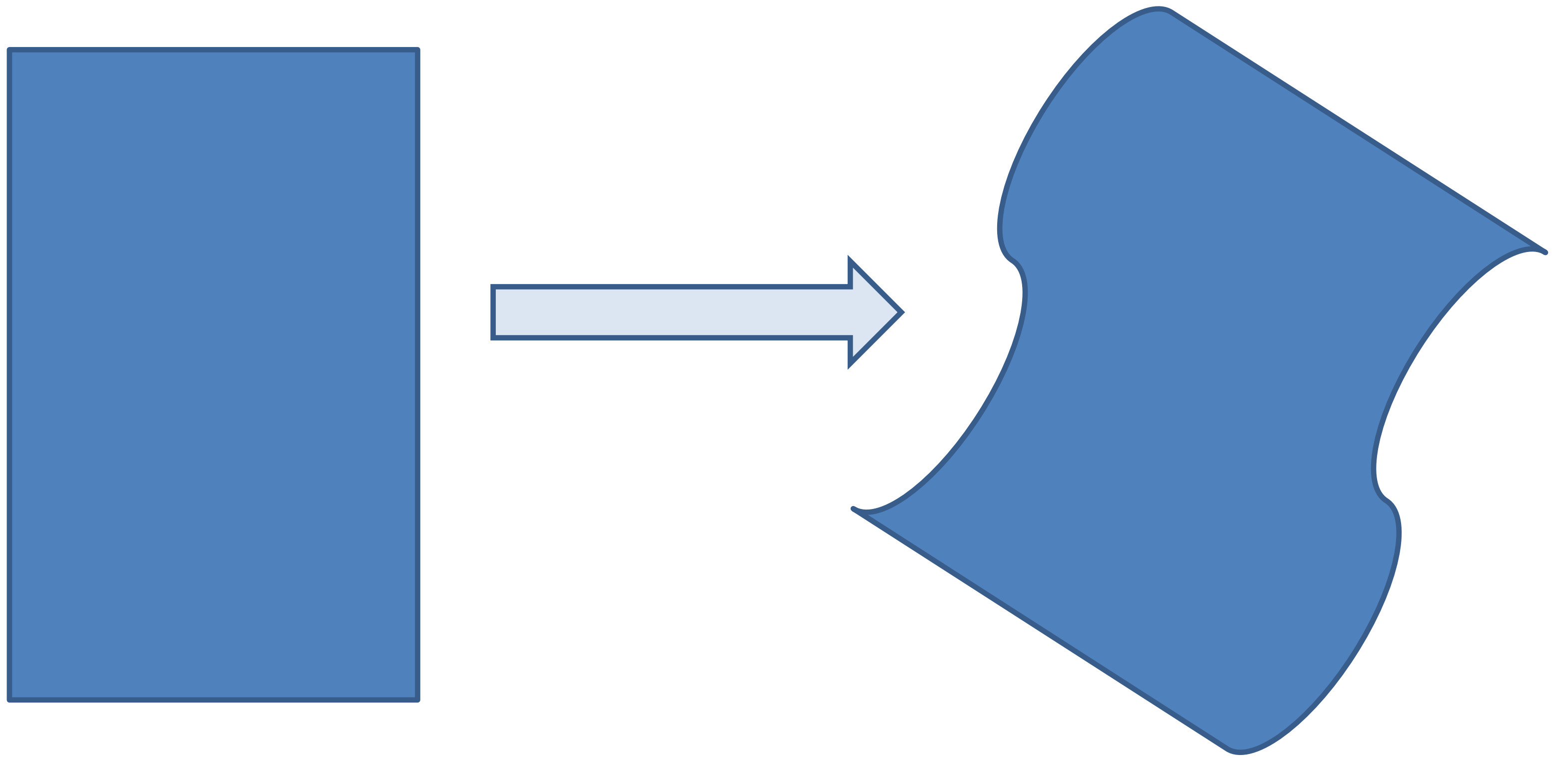
$$\partial_t r(x,t) = u(r(x,t),t), r(x,0) = x$$

$r(x,t)$ -случайные траектории «жидких частиц» с начальной Лагранжевой координатой x.

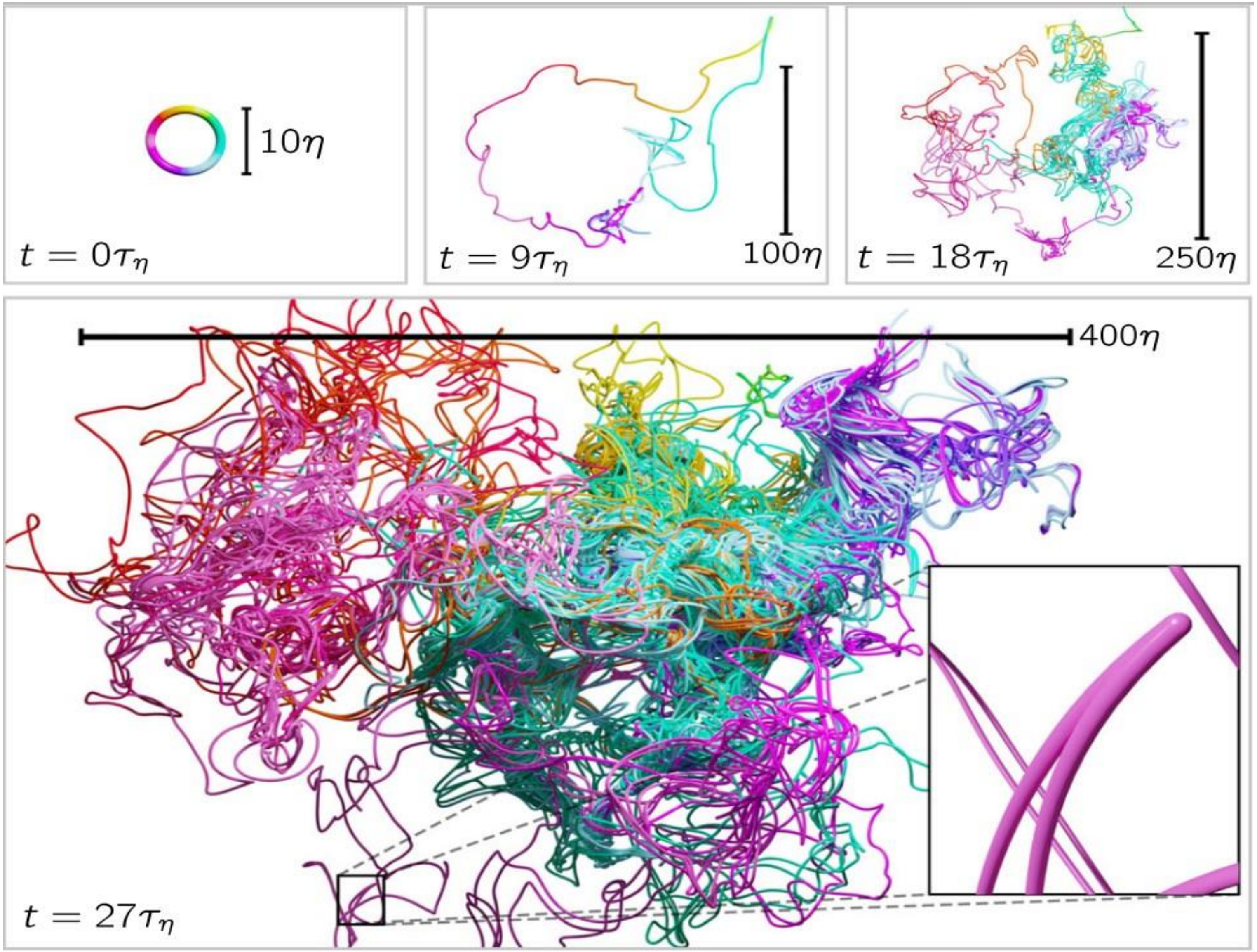


Предмет изучения

ЭВОЛЮЦИЯ ГЛАДКИХ К-МЕРНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ, УВЛЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ



Lukas Bent Kamp, Theodore D. Drivas, Cristian C. Lalescu & Michael Wilczek. NATURE COMMUNICATIONS 2022



ig. 1 **Visualization of material loop evolution.** The initially circular loop

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ

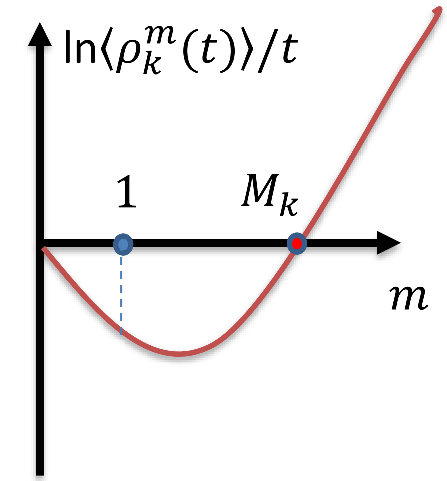
Для описания **перемежаемости** полезно равномерно «раскрасить» начальную гиперповерхность и рассмотреть эволюцию моментов поверхностной плотности «краски»

$$\langle \rho_k^m(t) \rangle \sim \int_{S_k(0)} \rho_k^m dx = \int_{S_k(t)} \rho_k^{m+1} ds.$$

Средняя плотность $\langle \rho_k\ (t) \rangle$ экспоненциально убывает.

Но! Всегда существуют экспоненциально редкие области, в которых плотность **экспоненциально растет.** В результате достаточно высокие моменты также растут!

Более точно, существуют критические показатели M_k>1**,** такие, что моменты $\langle \rho_k^m(t) \rangle$ растут при $m > M_k$ и убывают при $m < M_k$.



ГРАНИЧНЫЕ МОМЕНТЫ $\langle \rho_k^{M_k} \rangle = \text{const}$

НАЗЫВАЮТСЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ДВИЖЕНИЯ

ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО d-МЕРНОГО ПОТОКА

$$M_1 = d$$

$$\langle \rho_1^d \rangle \sim \int\limits_{S_1(t)} \rho_1^{d+1} ds = const$$

H FURSTENBER 1964, Y. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, S. A. Molchanov, and D. D. Sokoloff 1984

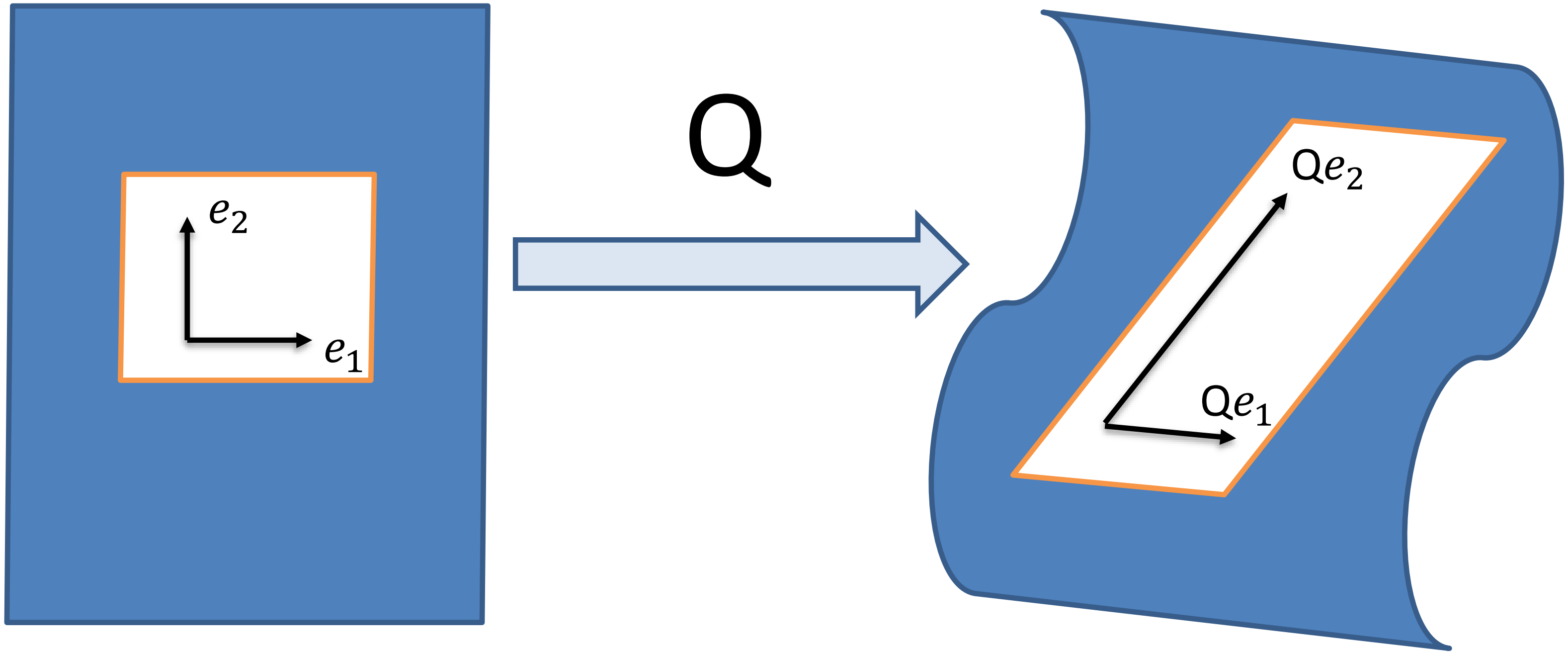
$$M_k = d, \qquad k = 1, \dots, d-1$$

$$\langle \rho_k^d \rangle \sim \int\limits_{S_k(t)} \rho_k^{d+1} ds = const$$

Ильин А.С., Копьев А.В., Сирота В.А., Зыбин К.П. 2022

ОКАЗЫВАЕТСЯ, ЧТО ВСЕГО СУЩЕСТВУЮТ d! УНИВЕРСАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, КОТОРЫЕ ЗАПИСЫВАЮТСЯ В ВИДЕ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ КАРТАНОВСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

ЭВОЛЮЦИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ



$$\frac{\partial}{\partial t} Q(\mathrm{x}, t) = A(\mathrm{x}, t) Q(\mathrm{x}, t)$$

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ

$$A_{ij}(\mathrm{x}, t) \equiv \frac{\partial u_i(r(x,t),t)}{\partial r_j}$$

ТЕНЗОР ГРАДИЕНТОВ- СТАЦИОНАРНЫЙ ИЗОТРОПНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ МАТРИЧНЫЙ ПРОЦЕСС

РАЗЛОЖЕНИЕ ИВАСАВЫ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ

$Q = RDZ$

R-ортогональная матрица,

D- диагональная матрица с положительными компонентами $D_1, \ldots, D_d$,

Z-верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали.

$s_k = \|Qe_1 \wedge \cdots \wedge Qe_k\| = D_1 \ldots D_k$ -Элемент к-мерной площади (картановская дифференциальная форма)

$s_k = \rho_k^{-1}$ -Связь с поверхностной плотностью «краски»

$\lambda_k = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{\ln D_k}{t}, \quad \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$- Lyapunov exponents (LE) (Оселедец 1968).

$$\boxed{\mathrm{w}(m_1, \ldots, m_d) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln\langle (D_1)^{m_1} \ldots (D_d)^{m_d}\rangle}{t}}$$ -generalized Lyapunov exponents (GLE)

ПРИ ЭТОМ ПРОИЗВОДНЫЕ GLE В НУЛЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ LE $\lambda_k = \frac{\partial}{\partial m_k} w(0)$,

А КАЖДЫЙ НОЛЬ $N_1, \ldots, N_d$ GLE ОПРЕДЕЛЯЕТ НЕКОТОРЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ:

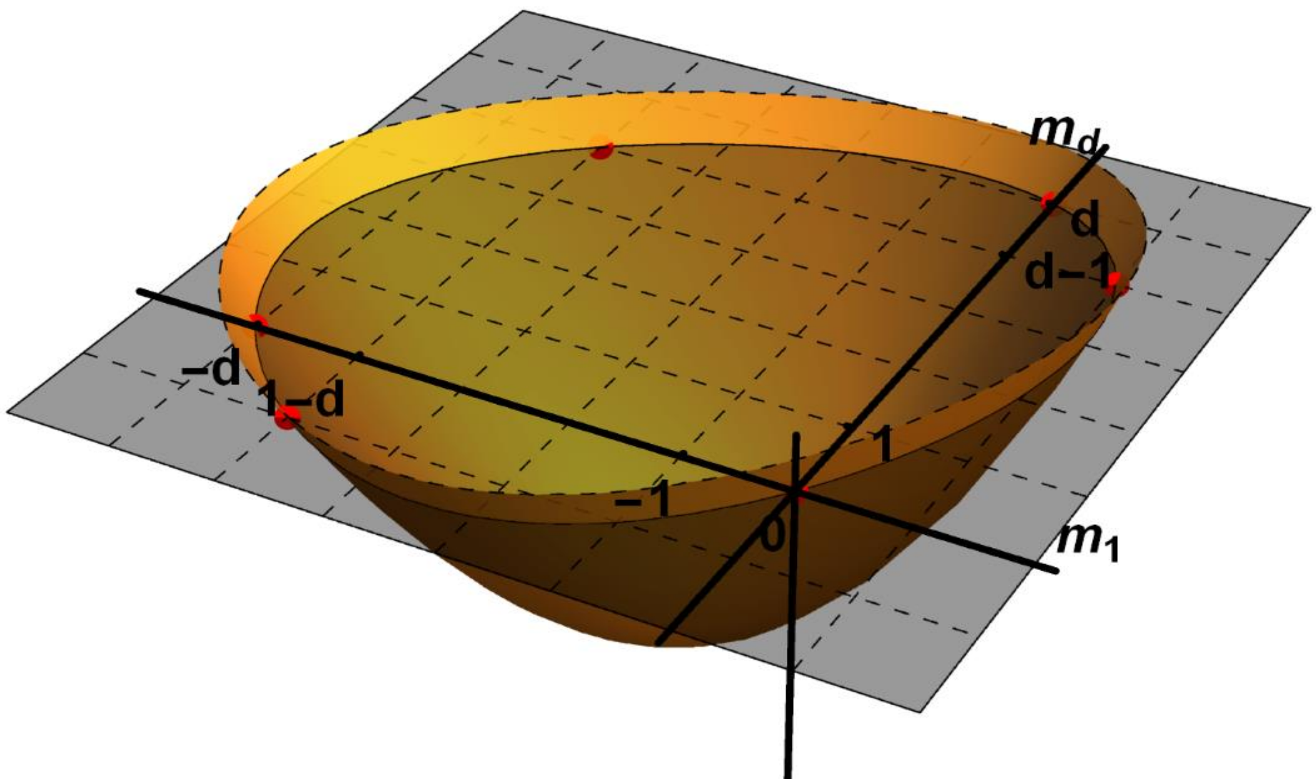
$$\boxed{\langle (D_1)^{N_1} \ldots (D_d)^{N_d}\rangle \sim e^{w(N_1, \ldots, N_d)t} = const}$$

ИТАК, СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ КАРТАНОВЫХ ФОРМ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ВИДОМ GLE.

В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ w $(m_1, \ldots, m_d)$-ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ, ЗАВИСЯЩАЯ ОТ СТАТИСТИКИ ПОТОКА.

ОДНАКО, ОКАЗЫВАЕТСЯ, ЧТО У НЕЕ СУЩЕСТВУЮТ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ НУЛИ $\{N_\mathrm{k}\}$, ОДИНАКОВЫЕ ДЛЯ ВСЕХ ИЗОТРОПНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

m_i=0 (i≠1,d)



УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Ильин А.С., Копьев А.В., Сирота В.А., Зыбин К.П. 2022

КАЖДОЙ ПЕРЕСТАНОВКЕ $\boldsymbol{\pi(k)}$ ИЗ d ЭЛЕМЕНТОВ СООТВЕТСТВУЕТ НУЛЬ GLE $N_{\mathrm{k}} = k - \pi(k)$ И УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ:

$$\boxed{\langle (D_1)^{1-\pi(1)} \ldots (D_d)^{d-\pi(d)} \rangle = const}$$

ТОЖЕ, В ТЕРМИНАХ КАРТАНОВСКИХ ФОРМ $s_k = D_1 \ldots D_k$:

$$\boxed{\langle (s_1)^{\pi(2)-\pi(1)-1} \ldots (s_{d-1})^{\pi(d)-\pi(d-1)-1} \rangle = const.}$$

ТОЖДЕСТВЕННОЙ ПЕРЕСТАНОВКЕ СООТВЕТСТВУТ ТРИВИАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ

$\langle 1 \rangle = const$

ЦИКЛИЧЕСКИМ ПЕРЕСТАНОВКАМ СООТВЕТСТВУЮТ УЖЕ УПОМЯНУТЫЕ d-ТЫЕ МОМЕНТЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

$$\langle s_k^{-d} \rangle = \langle \rho_k^d \rangle \sim \int\limits_{S_k(t)} \rho_k^{d+1} ds = const$$

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТРЕХМЕРНОГО ПОТОКА

Перестановка	Стохастический интеграл
123	$\langle 1 \rangle$
132	$\langle s_1 \; s_2{}^{-2} \rangle$
213	$\langle s_1{}^{-2} \; s_2 \rangle$
231	$\langle s_2{}^{-3} \rangle$
312	$\langle s_1{}^{-3} \rangle$
321	$\langle s_1{}^{-2} \; s_2{}^{-2} \rangle$

Material surfaces in stochastic flows: integrals of motion and intermittency A.S. Il'yn, A.V. Kopyev, V.A. Sirota, K.P. Zybin 2022