Формализм псевдокумулянтов для описания динамики отклонений от распределения Лоренца в задачах статистической физики

Д.С. Голдобин

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

Фин.: бюджетная тема № 121112200078-7

Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике, Москва — 19.12.2022

Распределение Лоренца

Распределение Лоренца: примеры

$$L(y) = \frac{\pi^{-1}\Delta}{\Delta^2 + (y - y_0)^2}$$

- Примеры
  - Lamb, *Theory of an Optical Maser*, Phys. Rev. **134**, A1429 (1964)
  - Использование теоремы о вычетах

$$f(z(y), y \mid Z) = 0, \quad Z = \int L(y) z(y)\,\mathrm{d}y = \\ = z(y_0 \pm i\Delta)$$

$$f\Big(z(y_0 \pm i\Delta), y_0 \pm i\Delta \mid z(y_0 \pm i\Delta)\Big) = 0$$

Якубович, *О динамике процессов в средах с неоднородным уширением линии рабочего вещества*, ЖЭТФ **55**, 304 (1968)

Распределение Лоренца

Распределение Лоренца: примеры

$$L(y) = \frac{\pi^{-1}\Delta}{\Delta^2 + (y - y_0)^2}$$

- Примеры
  - Lamb, *Theory of an Optical Maser*, Phys. Rev. **134**, A1429 (1964)
  - Использование теоремы о вычетах

    Якубович, *О динамике процессов в средах с неоднородным уширением линии рабочего вещества*, ЖЭТФ **55**, 304 (1968)
- Локализация Андерсона
  - Модель Ллойда в 3D (Р.Л. для неоднородности потенциала)

    Lloyd, *Exactly solvable model of electronic states in a three-dimensional disordered Hamiltonian: non-existence of localized states*, J. Phys. C: Solid State Phys. **2**, 1717 (1969)
- Ott–Antonsen theory [Chaos **18**, 037113 (2008); **19**, 023117 (2009)]

$$w_{\mathrm{wL}}(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^{-1}\Delta}{\Delta^2 + (\varphi - \varphi_0 - 2n\pi)^2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1 - e^{-2\Delta}}{1 - e^{-\Delta}\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

+ Montbrió, Pazó, Roxin, Phys. Rev. X **5**, 021028 (2015)

“Проблемы” с распределением Лоренца

- Моменты (и кумулянты) расходятся $\left\langle y^{n\geq 1}\right\rangle = \infty$

Характеристическая функция:

$$F(k) = \left\langle e^{ikV}\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{(ik)^n}{n!}, \quad M_n \equiv \left\langle V^n\right\rangle$$

$\ln$(характ. ф-ция) = генерирующая ф-ция кумулянтов

$$\Phi(k) = \ln F(k) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{(ik)^n}{n!}$$

“*кумулянты*”:

$$K_1 = \left\langle V\right\rangle, \quad K_2 = \left\langle V^2\right\rangle - \left\langle V\right\rangle^2, \quad K_n = \left\langle V^n\right\rangle - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \left\langle V^m\right\rangle K_{n-m}$$

$$\text{independent } x, y: \quad F_{x+y}(k) = \left\langle e^{ik(x+y)}\right\rangle = \left\langle e^{ikx}\right\rangle\left\langle e^{iky}\right\rangle = F_x(k)\, F_y(k)$$

$$\ln F_{x+y}(k) = \ln F_x(k) + \ln F_y(k) \quad => \quad K_{x+y,n} = K_{x,n} + K_{y,n}$$

Характеристическая ф-ция для Р.Л.

$$F(k) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{(ik)^n}{n!}, \quad M_n \equiv \left\langle V^n \right\rangle$$

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikV} \frac{\pi^{-1} a \, \mathrm{d}V}{a^2 + (V-v)^2} = e^{ikv - a|k|}$$

$$\Phi(k) = \ln F(k) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{(ik)^n}{n!}$$

$$\Phi(k) = ivk - a\,|\,k\,|$$

Характеристическая ф-ция и псевдокумулянты

$$\Phi_{\mathrm{LD}}(k) = ivk - a\,|\,k\,| \qquad w_{\mathrm{LD}}(V) = \frac{\pi^{-1}a}{a^2 + (V - v)^2}$$

$$\Phi(k) = \ln\left\langle e^{ikV}\right\rangle \quad => \quad \Phi(-k) = \Phi^*(k)$$

$$\Phi(k) = -(a\,\mathrm{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2\,\mathrm{sign}(k))\frac{k^2}{2} - \\ - (q_3\,\mathrm{sign}(k) + ip_3)\frac{k^3}{3} - \ldots$$

«Псевдокумулянты» (“pseudocumulants”) W_n:

$$W_1 \equiv a - iv, \quad W_n \equiv q_n + ip_n$$

Геометрический смысл

$$\Phi = -(a\,\mathrm{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2\,\mathrm{sign}(k))\frac{k^2}{2} - (q_3\,\mathrm{sign}(k) + ip_3)\frac{k^3}{3} - \dots$$

$$\Phi(k) = \ln\left\langle e^{ikV}\right\rangle \quad => \quad \Phi(-k) = \Phi^*(k)$$

a: *width* of the "Lorentzian" part of the distrib, for QIFs is always firing rate;
v: always "*P.V. mean*" of the distribution;
q_2: an analogue of *kurtosis* for Gaussian;
p_2: an analogue of *skewness* for Gaussian.

$$w_{\mathrm{LD}}(V) = \frac{\pi^{-1}a}{a^2 + (V - v)^2}$$

$$w(V,t) = \left(1 + \frac{q_2(t)}{2}\frac{\partial^2}{\partial V^2} - \frac{p_2(t)}{2}\frac{\partial^2}{\partial V \partial a} + \dots\right) w_{\mathrm{LD}}(V,t)$$

Геометрический смысл: обычные кумулянты *vs* «псевдокумулянты»

$$\Phi = -(a\,\mathrm{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2\,\mathrm{sign}(k))\frac{k^2}{2} - (q_3\,\mathrm{sign}(k) + ip_3)\frac{k^3}{3} - \ldots$$

$$F(k) = \left\langle e^{ikV} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{(ik)^n}{n!}, \quad M_n \equiv \left\langle V^n \right\rangle$$

$$w_{V\to\infty} < \frac{C}{V^{1+\alpha}},$$

$$\left\langle V^n \right\rangle: \quad \int^{+\infty} V^n w(V)\,\mathrm{d}V \propto \int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}V}{V^{1+\alpha-n}} \propto \left.\frac{1}{V^{\alpha-n}}\right|^{+\infty}$$

Если $<V^n>$ $(n < \alpha)$ существуют, то $p_n = 0$ для чётных n,
$q_n = 0$ для нечёт. n;

все младшие элементы соответствуют «обычным» моментам/кумулянтам

Квадратичные нейроны–пороговые интеграторы (quadratic integrate-and-fire neurons, QIFs)

Популяция *N* синаптически связанных QIF:

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j\,, \qquad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma\xi_j(t)\,,$$

$$\langle \xi_j(t)\xi_n(t')\rangle = 2\delta_{jn}\delta(t-t')\,, \quad g(\eta) = \frac{\Delta}{\pi[\Delta^2 + (\eta-\eta_0)^2]}\,,$$

$$I_0(t) = I(t) + Js(t)\,.$$

Термодинамический предел бесконечного *N*: $s(t) = r(t)$ – средняя по ансамблю частота генерации импульсов

η-подансамбль:

$$I_\eta = I(t) + \eta + Jr(t)$$

Квадратичные нейроны–пороговые интеграторы

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j\,, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma\xi_j(t)$$

$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + Jr(t)$$

$$F_{\mathrm{LD}}(k) = e^{ikv - a|k|}, \qquad \Phi_{\mathrm{LD}}(k) = ivk - a\,|\,k\,| \qquad F(k) = e^{\Phi(k)}$$

$$\partial_t \Phi = ik\left[I_0 - \partial_k^2\Phi - (\partial_k\Phi)^2\right] - |\,k\,|\,\Delta - \sigma^2 k^2$$

$$\sigma = 0: \quad \Phi = ikv - a\,|\,k\,|,$$

$$\dot{v} = I_0 + a^2 - v^2, \qquad \dot{a} = 2av + \Delta, \qquad r = \frac{a}{\pi}$$

E. Montbrio, D. Pazo, A. Roxin, *Macroscopic description for networks of spiking neurons*, Phys. Rev. X **5**, 021028 (2015)

Квадратичные нейроны–пороговые интеграторы

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j\,, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma\xi_j(t)$$

$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + Jr(t)$$

$$\partial_t \Phi = ik\left[I_0 - \partial_k^2\Phi - (\partial_k\Phi)^2\right] - |k|\Delta - \sigma^2 k^2$$

$$\Phi = -(a\,\mathrm{sign}(k) - iv)k - (q_2 + ip_2\,\mathrm{sign}(k))\frac{k^2}{2} - (q_3\,\mathrm{sign}(k) + ip_3)\frac{k^3}{3} - \ldots$$

«Псевдокумулянты» (“pseudocumulants”) W_n:

$$W_1 \equiv a - iv, \quad W_n \equiv q_n + ip_n$$

$$\dot{W}_m = (\Delta - iI_0)\delta_{1m} + 2\sigma^2\delta_{2m} + im\left(-mW_{m+1} + \sum_{n=1}^{m} W_n W_{m+1-n}\right)$$

Псевдокумулянты & преобразование Фенхеля (Legendre–Fenchel transform)

$$\boldsymbol{F(k) = \left\langle e^{ikV} \right\rangle} \qquad\qquad \boldsymbol{F(H) = \left\langle e^{S_z H} \right\rangle}$$

A. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, (London: Gordon and Breach, 1998)

Tobias Kühn, Moritz Helias, *Expansion of the effective action around non-Gaussian theories*, J. Phys. A: Math. Theor. **51**, 459502 (2018)

Moritz Helias, David Dahmen, *Statistical Field Theory for Neural Networks*, Lecture Notes in Physics, vol. 970 (2020)

$$\dot V_j = V_j^2 + I_j\,, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma\xi_j(t)$$
$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + Jr(t)$$

Примеры

E. Montbrio, D. Pazo, A. Roxin, *Macroscopic description for networks of spiking neurons*, Phys. Rev. X **5**, 021028 (2015) + внутренний шум

$$\begin{aligned}
\dot r &= \Delta/\pi + 2rv + p_2/\pi,\\
\dot v &= I_0 - \pi^2 r^2 + v^2 + q_2,\\
\dot q_2 &= 2\sigma^2 + 4(p_3 + q_2 v - \pi p_2 r),\\
\dot p_2 &= 4(-q_3 + \pi q_2 r + p_2 v).
\end{aligned}$$

I. Ratas, K. Pyragas, *Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons*, Phys. Rev. E **100**, 052211 (2019)

MPR модель + шум + конечная продолжительность синапт. импульса

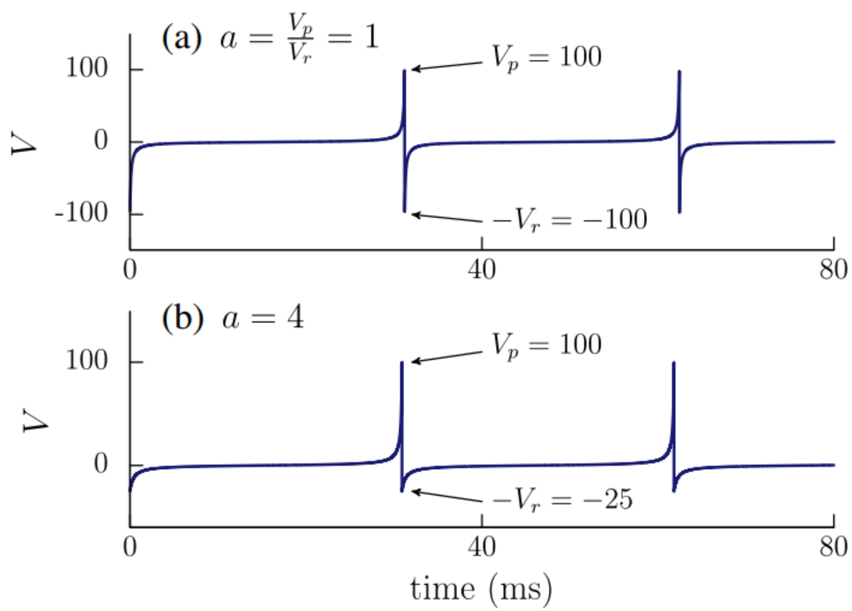
$$S = V_{\mathrm{th}} \int_{V_{\mathrm{th}}}^{+\infty} w(V,t)\,\mathrm{d}V = V_{\mathrm{th}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{V_{\mathrm{th}} - v}{a} + \frac{q_2 a(V_{\mathrm{th}} - v) + p_2[(V_{\mathrm{th}} - v)^2 - a^2]/2}{\pi[a^2 + (V_{\mathrm{th}} - v)^2]^2}\right)$$

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j\,, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma\xi_j(t)$$
$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + Jr(t)$$

Примеры

M. di Volo, A. Torcini, *Transition from Asynchronous to Oscillatory Dynamics in Balanced Spiking Networks with Instantaneous Synapses*, Phys. Rev. Lett. **121**, 128301 (2018)

$$\dot{r} = \left(\frac{g_0\Delta_0}{\pi} + 2v\right)r + \frac{p_2}{\pi}\,,$$
$$\dot{v} = \sqrt{K}(I_0 - g_0 r) - \pi^2 r^2 + v^2 + q_2\,,$$
$$\dot{q}_2 = g_0^2 r + 4(q_2 v - \pi p_2 r)\,,$$
$$\dot{p}_2 = -\frac{g_0^2\Delta_0}{\sqrt{K}} r + 4(\pi q_2 r + p_2 v)\,.$$



E. Montbrió, D. Pazó, *Exact Mean-Field Theory Explains the Dual Role of Electrical Synapses in Collective Synchronization*, Phys. Rev. Lett. **125**, 248101 (2020) + шум

$$\dot{V}_j = V_j^2 + I_j\,, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma\xi_j(t)$$

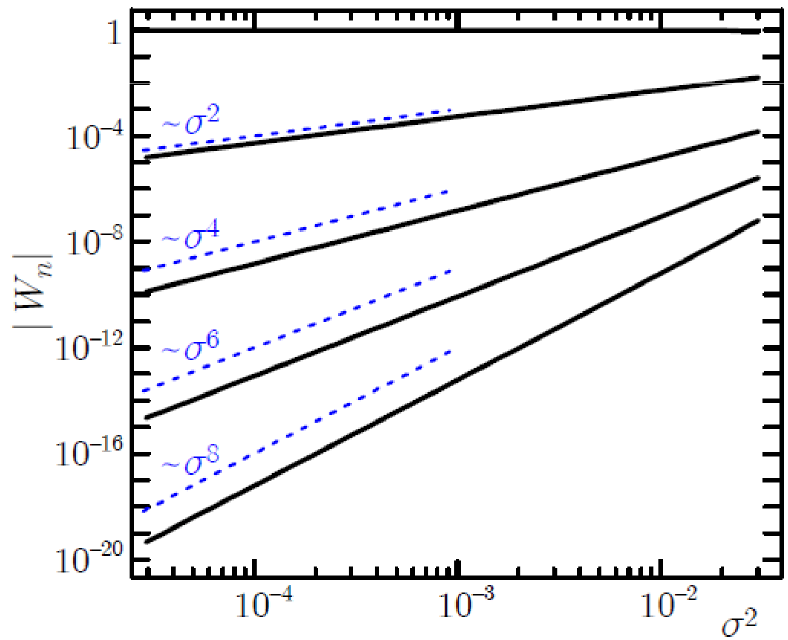
$$I_\eta(t) = I(t) + \eta + Jr(t)$$

Сходимость и обрывание

$$\dot{W}_m = (\Delta - iI_0)\delta_{1m} + 2\sigma^2\delta_{2m} + im\left(-mW_{m+1} + \sum_{n=1}^{m} W_n W_{m+1-n}\right)$$

При ненулевой гетерогенности и “вблизи” стационарных состояний:

$$W_m \sim \sigma^{2(m-1)}$$



$I_0 = 0.1$, $\eta_0 = -1$, $J_0 = 1$, $\Delta_\eta = 0.1$ and $\Delta_J = 0.1$.

$$\dot V_j = V_j^2 + I_j\,, \quad I_j = I_0(t) + \eta_j + \sigma \xi_j(t)$$

Моделирование больших (конечных) сетей

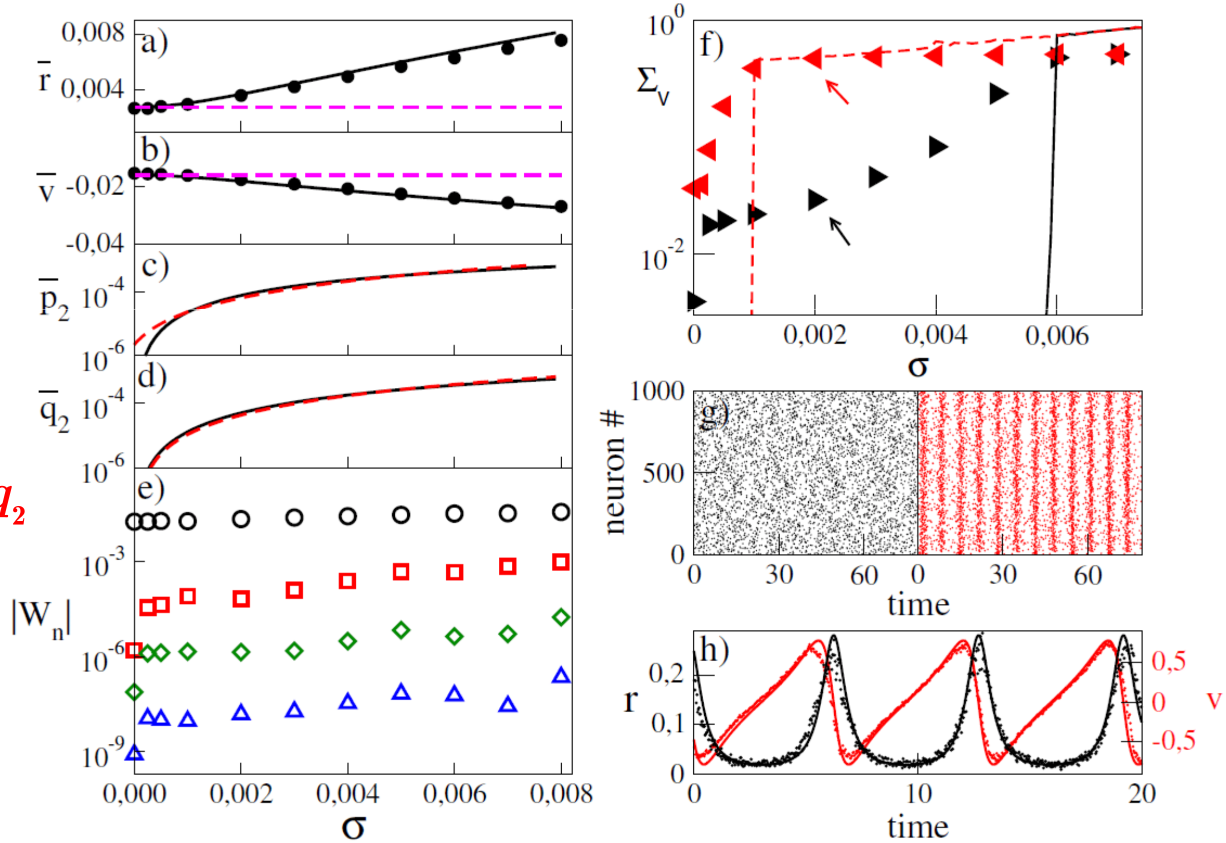
M. di Volo, A. Torcini, *Transition from Asynchronous to Oscillatory Dynamics in Balanced Spiking Networks with Instantaneous Synapses*, Phys. Rev. Lett. **121**, 128301 (2018)

$$\dot r = \left(\frac{g_0 \Delta_0}{\pi} + 2v\right) r + \frac{p_2}{\pi}$$

$$\dot v = \sqrt{K}\,(I_0 - g_0 r) - \pi^2 r^2 + v^2 + q_2$$

$$\dot q_2 = g_0^2 r + 2\sigma^2 + 4(q_2 v - \pi p_2 r)$$

$$\dot p_2 = -\frac{g_0^2 \Delta_0}{\sqrt{K}}\, r + 4(\pi q_2 r + p_2 v)$$



Заключение

DSG, MV, AT, *Reduction Methodology for Fluctuation Driven Population Dynamics*, PRL **127**, 038301 (2021)

- Формализм “***псевдокумулянтов***” (на основе характеристических ф-ций) может быть введен для работы с возмущенным р. Лоренца
- Формализм дает (в общем случае) бесконечную сходящуюся цепочку среднеполевых уравнений, которая может быть оборвана
- Маломодовые среднеполевые модели могут быть получены для макроскопической динамики ансамблей QIFs
- В частности, устойчивость многообразий Ott-Antonsen или Montbrio-Pazo-Roxin может быть исследована в рамках маломодовых моделей
- Маломодовые модели хорошо воспроизводят динамику конечных сетей

All science . . . has a twofold value . . . . There is its value as science, which is generally deemed to be its intrinsic, main worth, but which is, however, only of secondary importance; and there is its value as a kind of moral and intellectual gymnastics . . . and this is its primary importance.

Christian Morgenstern, 1910, *Aphorismen, Sprüche und andere Aufzeichnungen* (Munich and Zurich 1979: R. Piper & Co.).