

*О возможности аналитического описания  
универсального пристеночного профиля  
скорости турбулентного течения вязкой  
несжимаемой жидкости*

*О.Н. Хатунцева*

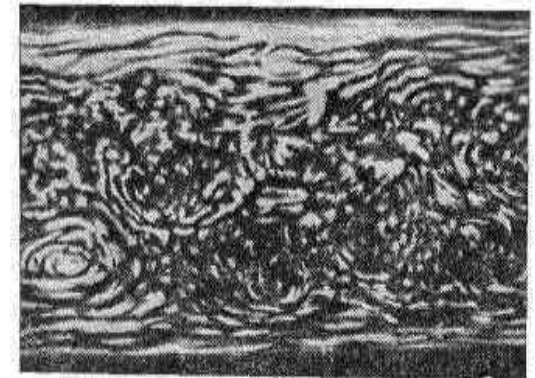
*г. Королев,  
ПАО «РКК «Энергия»,  
МФТИ*

## Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f} \\ \nabla \vec{V} = 0 \end{array} \right.$$

**Турбулентный и ламинарный режимы течения отличаются производством энтропии**

Уравнения Навье-Стокса не учитывают изменения импульса выделенного объема жидкости, происходящего за счёт возбуждения внутренних степеней свободы, в случае недетерминированного (стохастического) поведения жидкости



# Алгоритм описания физических систем с учетом случайных процессов

Детерминированный случай:

$$f(t, \vec{x}): df/dt = \hat{A} f$$

$$\Downarrow (t, \vec{x}) \rightarrow (t, \vec{x}; S\{\varphi[p(t, \vec{r}; \tau)]\}),$$

Стохастический случай:

$$f(t, \vec{x}) \rightarrow f(t, \vec{x}; S\{\varphi[p(t, \vec{r}; \tau)]\})$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S / \delta \varphi} \frac{dS}{dt}$$

$$S(t, \vec{r}; \tau) = - \int \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] \ln \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] d[p(t, \vec{r}; \tau)]$$

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle = - \frac{d}{d \varepsilon} \int (\varphi(p) + \varepsilon h(p)) \ln(\varphi(p) + \varepsilon h(p)) dp \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= - \int (\ln \varphi(p) + 1) h(p) dp = \langle -(\ln \varphi(p) + 1), h \rangle$$

$$\delta S / \delta \varphi = -\ln \varphi(p) - 1$$

$$-(\ln \varphi + 1) \delta \varphi = \delta(-\varphi \ln \varphi) \quad \rightarrow \quad \tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$$

$dS/dt = 1/\tau$  - временной масштаб, в котором энтропия изменяется на единицу

**Полная производная по времени в пространстве, расширенном с помощью дополнительной стохастической переменной:**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}$$

**Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в пространстве, расширенном с помощью дополнительной стохастической переменной**

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} \end{cases}$$

**Граничные условия:**

1. условие «прилипания» жидкости на стенке;
2. условие симметрии – нулевая производная скорости на оси канала или трубы;
3. условие на внешней границе пограничного слоя:  $V_* y_* / \nu \sim 1$

*Для больших чисел Рейнольдса аналитически найдены два решения в задаче Хагена-Пуазейля, плоской задаче Пуазейля и плоской задаче Куэтта. Одно из которых соответствует ламинарному режиму течения, второе - турбулентному.*

## Задача Хагена-Пуазейля

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\gamma}{\text{Re}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{4\gamma}{\text{Re}}$$

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{r}) - \tilde{r}^2$$

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{d\tilde{s}} = a \quad \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) = \frac{a \text{Re}}{\gamma} \tilde{r} F$$

$$\gamma = \frac{\tau U_0}{R} = \frac{\tau \nu \text{Re}}{R^2}$$

$$\text{Re} = \frac{R U_0}{\nu} = \frac{R^3 \Delta P}{4 \nu^2 \rho l}$$

$$U_0 = R^2 \Delta P / (4 \nu \rho l)$$

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = V(\tilde{r}, \tilde{s}) / U_0$$

$$\tilde{r} = r / R$$

$a = 0$  - это условие соответствует ламинарному режиму течения

$a \neq 0$  - это условие соответствует турбулентному режиму течения

$a \neq 0$

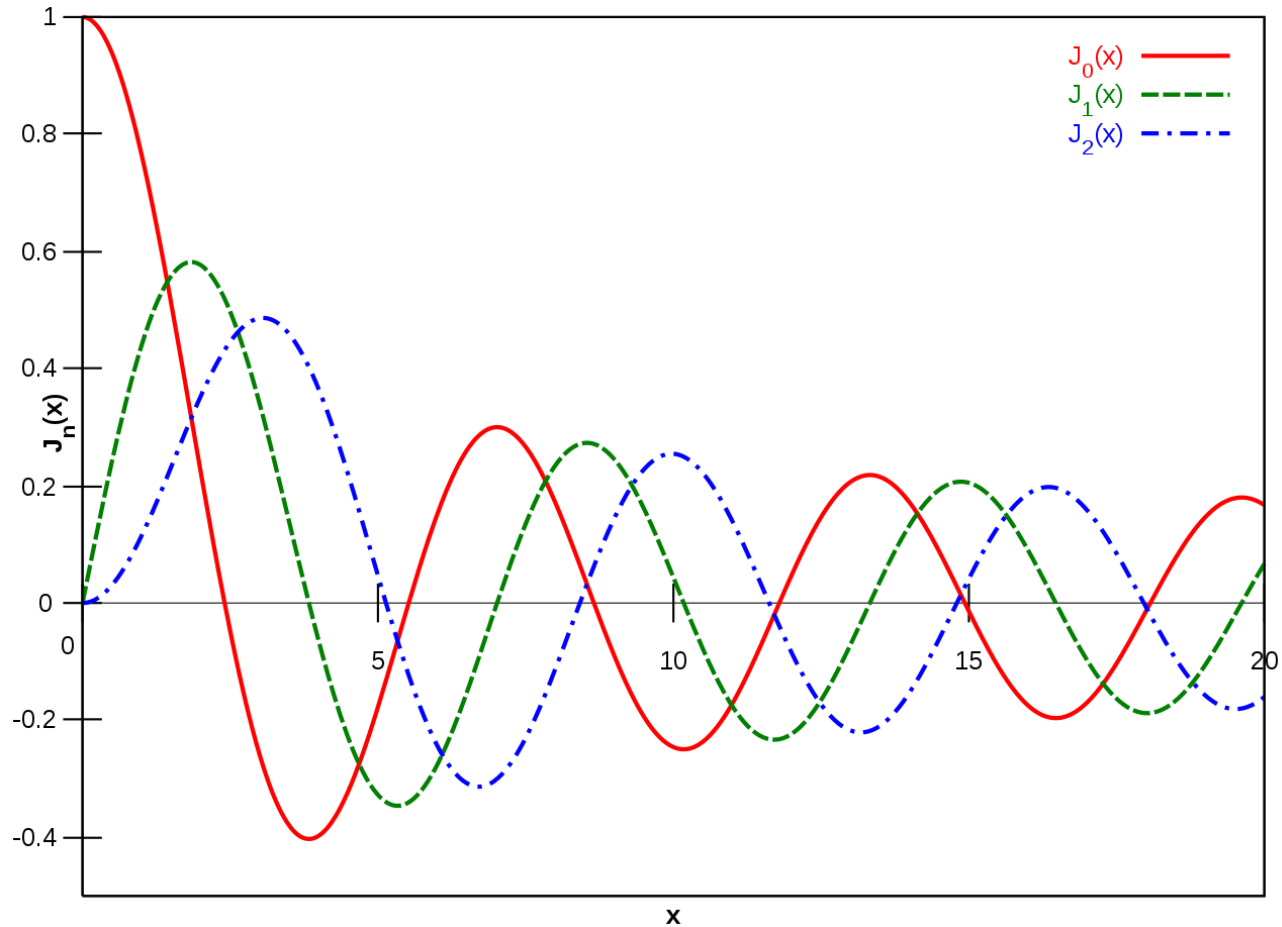
*Функция Бесселя первого рода нулевого порядка*

$$N(\tilde{s}) = N_0 e^{\pm |a| \tilde{s}} \quad F(\tilde{r}) = J_0(\tilde{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1)} \left( \frac{1}{2} \sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} \cdot \tilde{r} \right)^{2m}$$



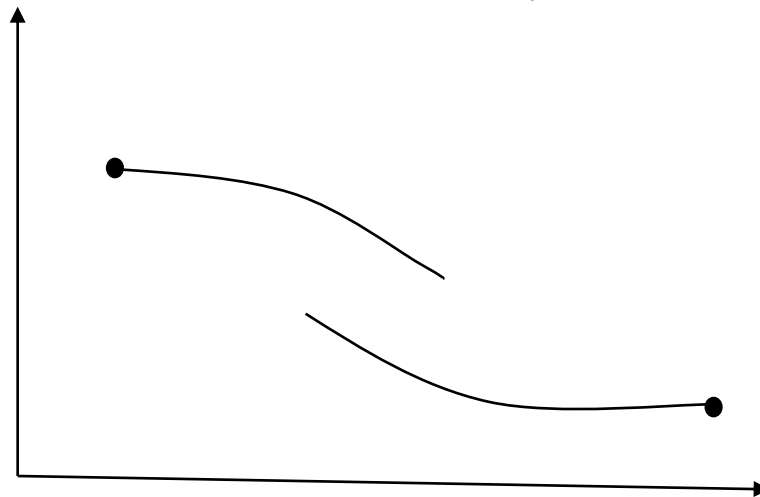
решение не удовлетворяет граничному условию "прилипания" жидкости к стенке трубы

Функции Бесселя





*Граничные условия, произвольно "фиксирующие" решение в двух или более точках, обычно не гарантируют существование гладкого решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или уравнений в частных производных (УЧП), даже если эти уравнения подчиняются теореме существования и единственности Коши. Отсутствие гладкого решения ОДУ или УЧП во всей исследуемой области можно рассматривать с точки зрения существования двух или более асимптот решения, а также областей неопределенности между ними.*



## Нахождение асимптоты решения вблизи стенки трубы

$$\frac{d^2 F}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{dF}{d\tilde{r}} \mp \frac{|a| \text{Re}}{\gamma} F = 0$$

$$a > 0 \quad \Downarrow$$

$$F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} (\tilde{r} + c)\right)$$



$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} (1 - \tilde{r})\right) e^{|a| \tilde{s}} - \tilde{r}^2$$

$$\Downarrow \quad a < 0$$

$$F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos\left(\sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} (\tilde{r} + b)\right)$$



$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos\left(\sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} (1 - \tilde{r})\right) e^{-|a| \tilde{s}} - \tilde{r}^2$$

$$V_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{R\Delta P}{2\rho l}} = \sqrt{\frac{2\nu}{R}} U_0 = \frac{2U_0}{\sqrt{2\text{Re}}}$$

$$V_* y_* / \nu \sim 1$$

$$\frac{y_*}{R} = \frac{y_* V_*}{\nu} \cdot \frac{\nu}{R V_*} \sim \frac{1}{\sqrt{2 R U_0 / \nu}} = \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}$$

$$y = R - r$$

$$\frac{V(y, \tilde{s})}{V_*} \sim \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{y V_*}{\nu}}} \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}} \frac{y V_*}{\nu} \right) e^{|a| \tilde{s}} - \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{y V_*}{\nu} \right)^2 \right) \quad a > 0$$

$$\frac{V(y, \tilde{s})}{V_*} \sim \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{y V_*}{\nu}}} \cos \left( \sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}} \frac{y V_*}{\nu} \right) e^{-|a| \tilde{s}} - \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{y V_*}{\nu} \right)^2 \right) \quad a < 0$$

$$V \Big|_{\substack{\tilde{s}=0 \\ y=y_*}} = V_*$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$

$$1 \sim \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) \text{ch} \left( \sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}} \right)$$

$$1 \sim \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) \cos \left( \sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}} \right)$$



$$a \approx -2\gamma / \sqrt{2\text{Re}}$$



$$y \rightarrow 0$$

$$\frac{V(y, \tilde{s})}{V_*} \approx \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu} \right) e^{-\frac{2\gamma}{\sqrt{2\text{Re}}} \tilde{s}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \frac{yV_*}{\nu}\right)^2 \right)$$



*Выражение для безразмерной скорости жидкости вблизи стенки трубы, удовлетворяющее условию "прилипания" на стенке:*

$$V^+ = \frac{5}{4} y^+ - \frac{1}{4} (y^+)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right), \quad V^+ = V/V_*$$

$$y^+ = yV_*/\nu = (R-r)V_*/\nu$$

*Разложение, рассматриваемое за границей вязкого слоя:*

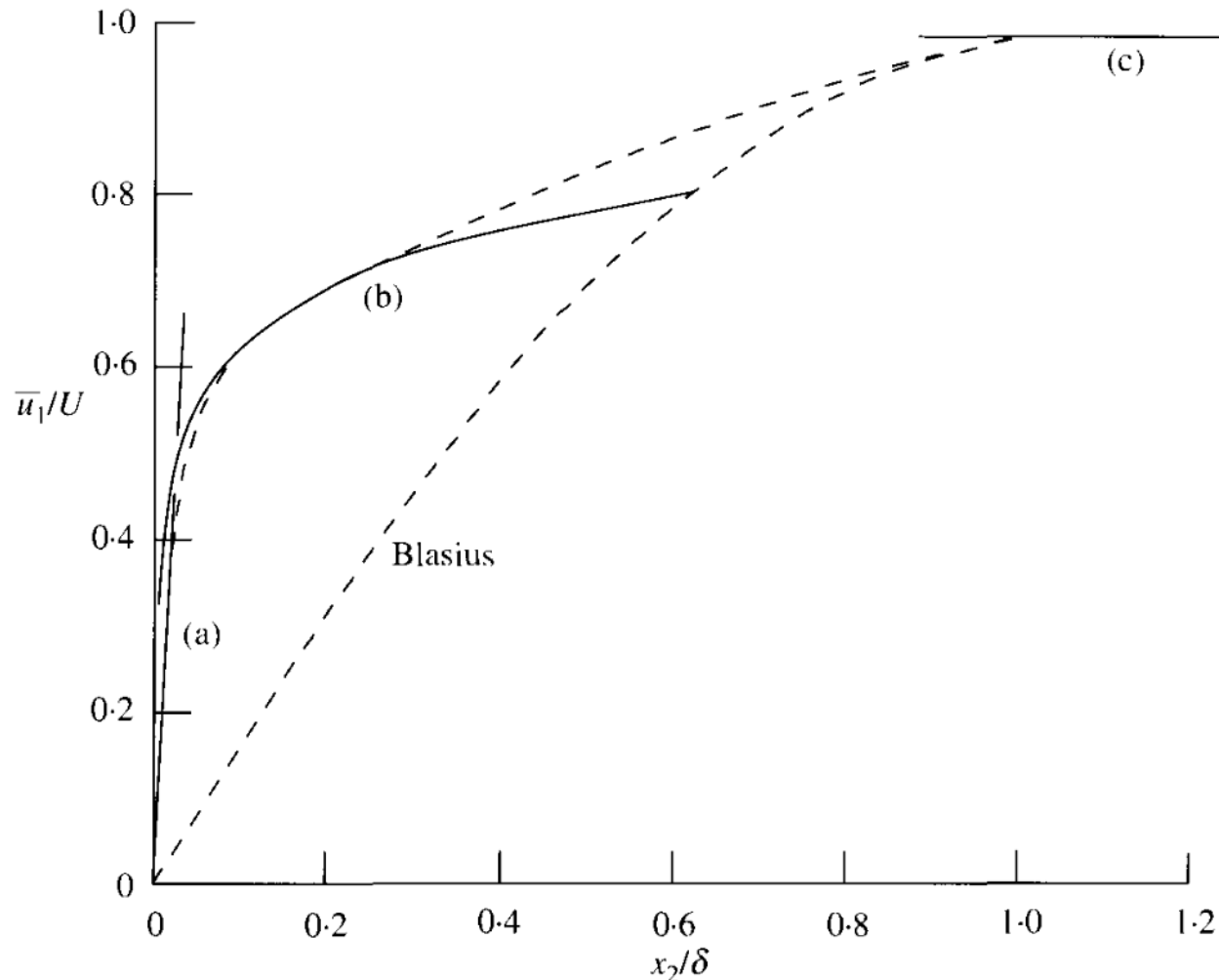
$$V^+ = \frac{5}{4} y^+ - \frac{1}{4} (y^+)^2 + \sum_{k \geq 3} c_k y^{+k} + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right),$$

*Устойчивый профиль скорости должен быть «выпуклым». Это условие приводит к выражению:*

$$V^+(y^+) \approx \frac{5}{2} \ln(1 + y^+/2) + O(1/\sqrt{2\text{Re}}) \underset{y^+ \gg 1}{\approx} \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \text{const}$$

$$\kappa \approx 0.4$$

**«Дефицит» скорости в центре трубы,  
описываемой логарифмической функцией**



Faber T.E. Fluid dynamics for physicists. Cambridge. 1995

$$V^+(y^+) \approx \frac{5}{2} \ln(1 + y^+/2) + O(1/\sqrt{2\text{Re}}) \underset{y^+ \gg 1}{\approx} \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \text{const}$$

Это выражение определяет асимптоту решения задачи, найденное вблизи стенки трубы и распространенное на всю площадь потока. Однако его нельзя считать общим решением задачи, поскольку оно точно не удовлетворяет второму граничному условию, которое определяет нулевую производную скорости на оси трубы.

$$V^+ \approx V_0^+ = \text{const}$$

Это выражение будет характеризовать наибольший масштаб случайных возмущений в турбулентном режиме течения жидкости в трубе и в то же время будет второй асимптотой решения задачи.

**Обобщенное решение задачи Хагена-Пуазейля для определения профиля скорости турбулентного потока жидкости в круглой трубе**

$$\langle V^+ \rangle \approx 5/2 \cdot \ln(1 + y^+ / 2) f(y^+) + V_0^+ \cdot g(y^+)$$

$$f(y^+) \Big|_{y^+=0} = 1 \qquad g(y^+) \Big|_{y^+=0} = 0$$

$$f(y^+) \Big|_{y^+=\sqrt{2\text{Re}}} = 0 \qquad g(y^+) \Big|_{y^+=\sqrt{2\text{Re}}} = 1$$

**Граничные условия для средней обобщенной скорости:**

$$\langle V(y^+) \rangle \Big|_{y^+=0} = 0 \qquad \langle V(y^+) \rangle' \Big|_{y^+=1} = 1 \qquad \langle V(y^+) \rangle' \Big|_{y^+=\sqrt{2\text{Re}}} = 0$$

$$\langle V^+ \rangle \approx \frac{5}{2} \ln \left( 1 + \frac{y^+}{2} \right) \left( 1 - \frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}} \right) + \frac{5}{2k} \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \right) \cdot \left( \frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}} \right)^k$$

$$k \approx 1 - \ln \left( \left( \sqrt{2\text{Re}}/15 + 1/3 + \ln 3/2 \right) / \ln \left( 1 + \sqrt{2\text{Re}}/2 \right) \right) / \ln \sqrt{2\text{Re}}$$



## Универсальный безразмерный профиль скорости вблизи гладкой стенки

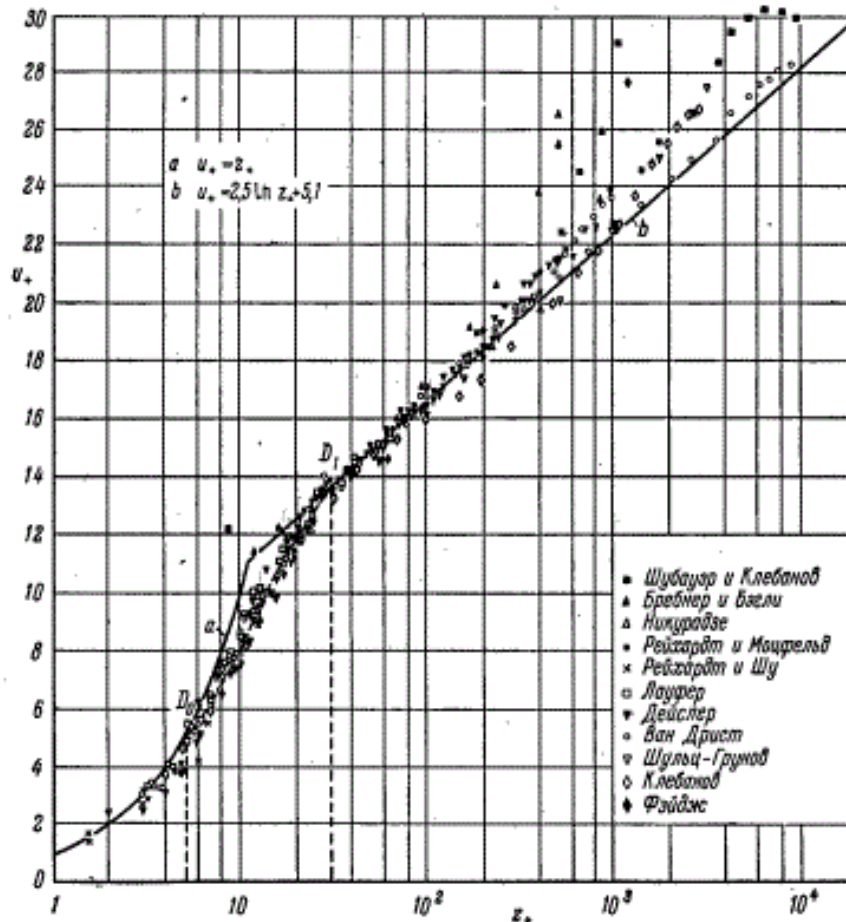
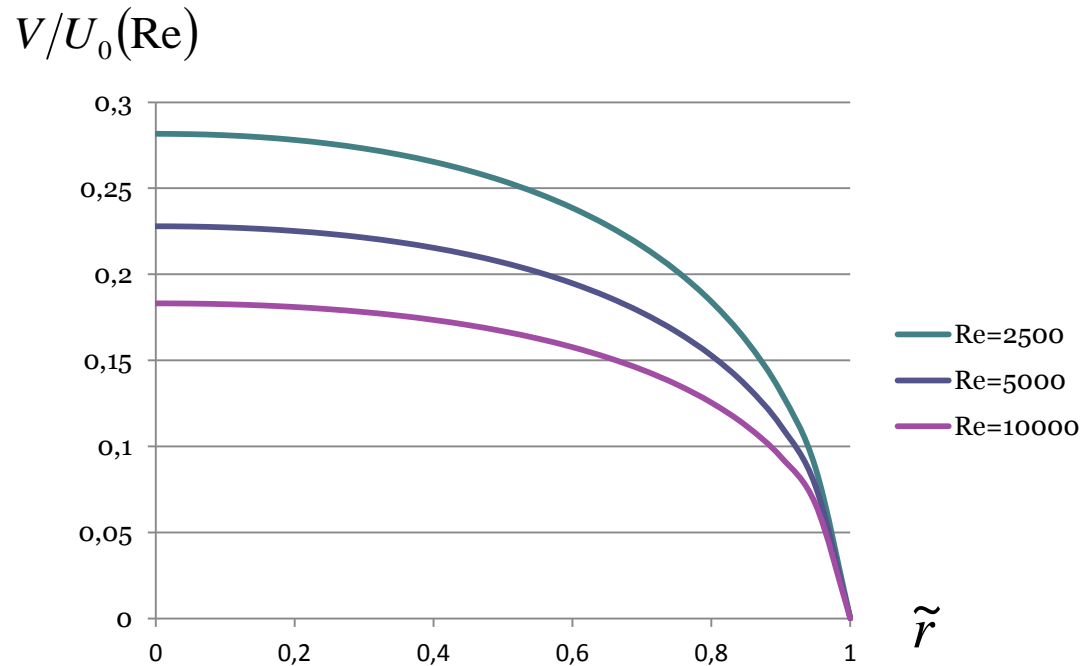


Рис. 25. Универсальный безразмерный профиль средней скорости турбулентного течения около гладкой стенки по данным измерений в трубах, каналах и пограничном слое (по Кестину и Ричардсону (1933)).

$$V^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,1$$





*Безразмерные аналитические профили скоростей турбулентного течения жидкости в задаче Хагена-Пуазейля для различных значений числа Рейнольдса*

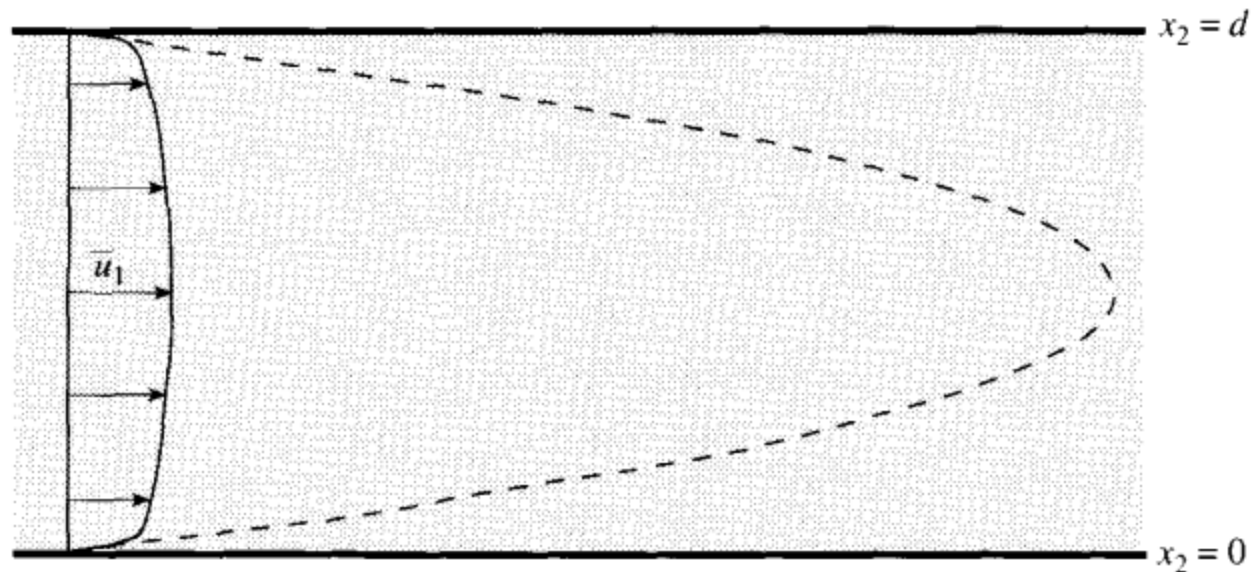



Figure 9.10 Profile of mean velocity for turbulent flow between stationary parallel plates, driven by a pressure gradient such that  $Re (= q/\nu, \text{ where } q \text{ is the discharge rate per unit width})$  is about  $1.4 \times 10^4$ . The profile for laminar flow at the same pressure gradient is shown as a broken curve; turbulence reduces the value of  $\bar{u}_1$  at the centre by a factor which in this case is 10.

[Based on data obtained at a larger value of  $Re$ , plotted in A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1976.]

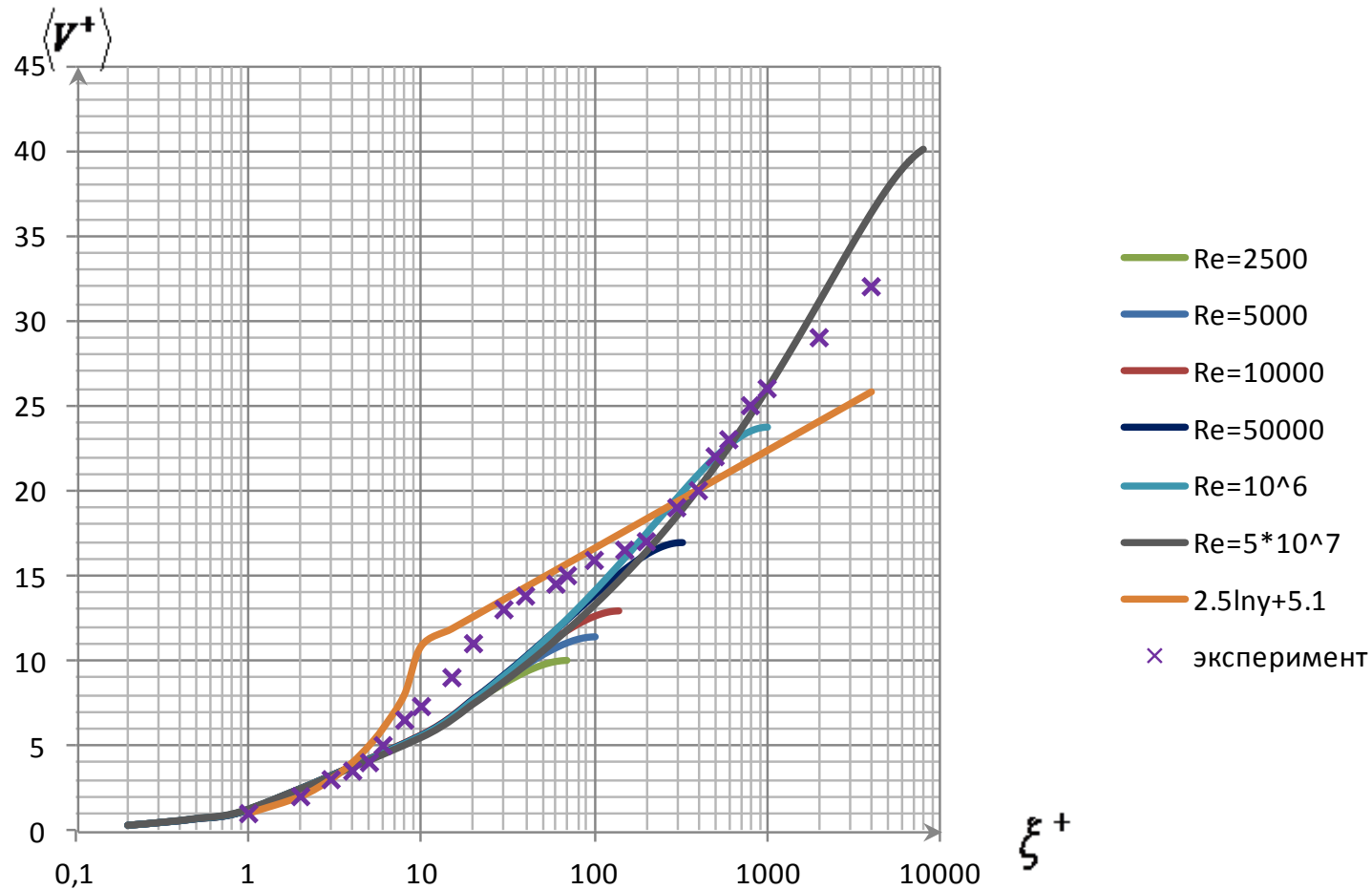
**Аналогичное решение получено в плоской задаче Пуазейля**

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} \end{cases}$$


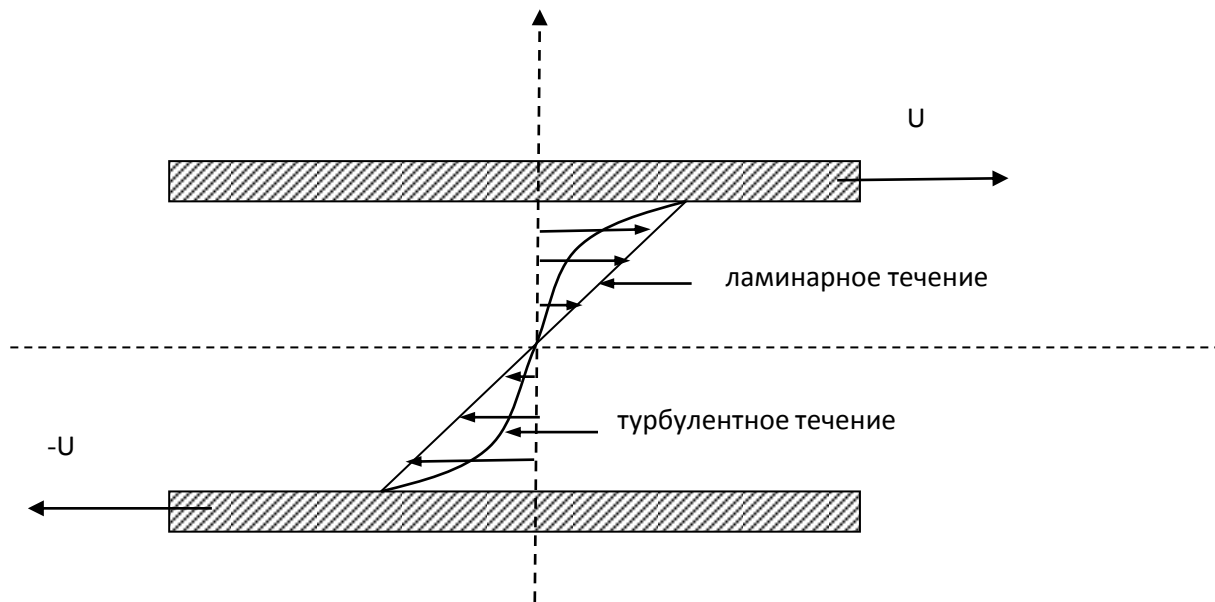
$$\langle V^+ \rangle \approx \frac{5}{2} \ln \left( 1 + \frac{\xi^+}{2} \right) \left( 1 - \frac{\xi^+}{\sqrt{2 \text{Re}}} \right) + \frac{5}{2k} \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2 \text{Re}}}{2} \right) \cdot \left( \frac{\xi^+}{\sqrt{2 \text{Re}}} \right)^k$$

$$k \approx 1 - \ln \left( \left( \sqrt{2 \text{Re}} / 15 + 1/3 + \ln(3/2) \right) / \ln \left( 1 + \sqrt{2 \text{Re}} / 2 \right) \right) / \ln \sqrt{2 \text{Re}}$$

## Аналитические и экспериментальные зависимости скорости от расстояния для различных значений числа Рейнольдса



## Плоское течение Куэтта



$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} \end{cases}$$

**Асимптоты решения, соответствующие турбулентному течению в центре канала и на его стенке:**

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{sh\left(\sqrt{a_{c,st}} \tilde{y}\right)}{sh\sqrt{a_{c,st}}} e^{\frac{4a_{c,st}}{Re} \tilde{s}}$$

$$8\left(\sqrt{a_c}\right)^3 sh\sqrt{a_c} \sim Re$$

$$8\left(\sqrt{a_{st}}\right)^3 \cdot th\sqrt{a_{st}} \sim Re$$



## Выражение для обобщенной скорости турбулентного режима течения в плоской задаче Куэтта

$$\langle \tilde{V}(\tilde{y}) \rangle = \frac{sh(\sqrt{a_c} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_c}} f(\tilde{y}) + \frac{sh(\sqrt{a_{st}} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_{st}}} g(\tilde{y})$$

$$f(\tilde{y})|_{\tilde{y}=0} = 1$$

$$g(\tilde{y})|_{\tilde{y}=0} = 0$$

$$f(\tilde{y})|_{\tilde{y}=1} = 0$$

$$g(\tilde{y})|_{\tilde{y}=1} = 1$$

**граничные условия для функций влияния асимптот в обобщенной скорости**

$$\langle \tilde{V}(\tilde{y}) \rangle = \frac{sh(\sqrt{a_c} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_c}} (1 - |\tilde{y}|) + \frac{sh(\sqrt{a_{st}} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_{st}}} |\tilde{y}|$$



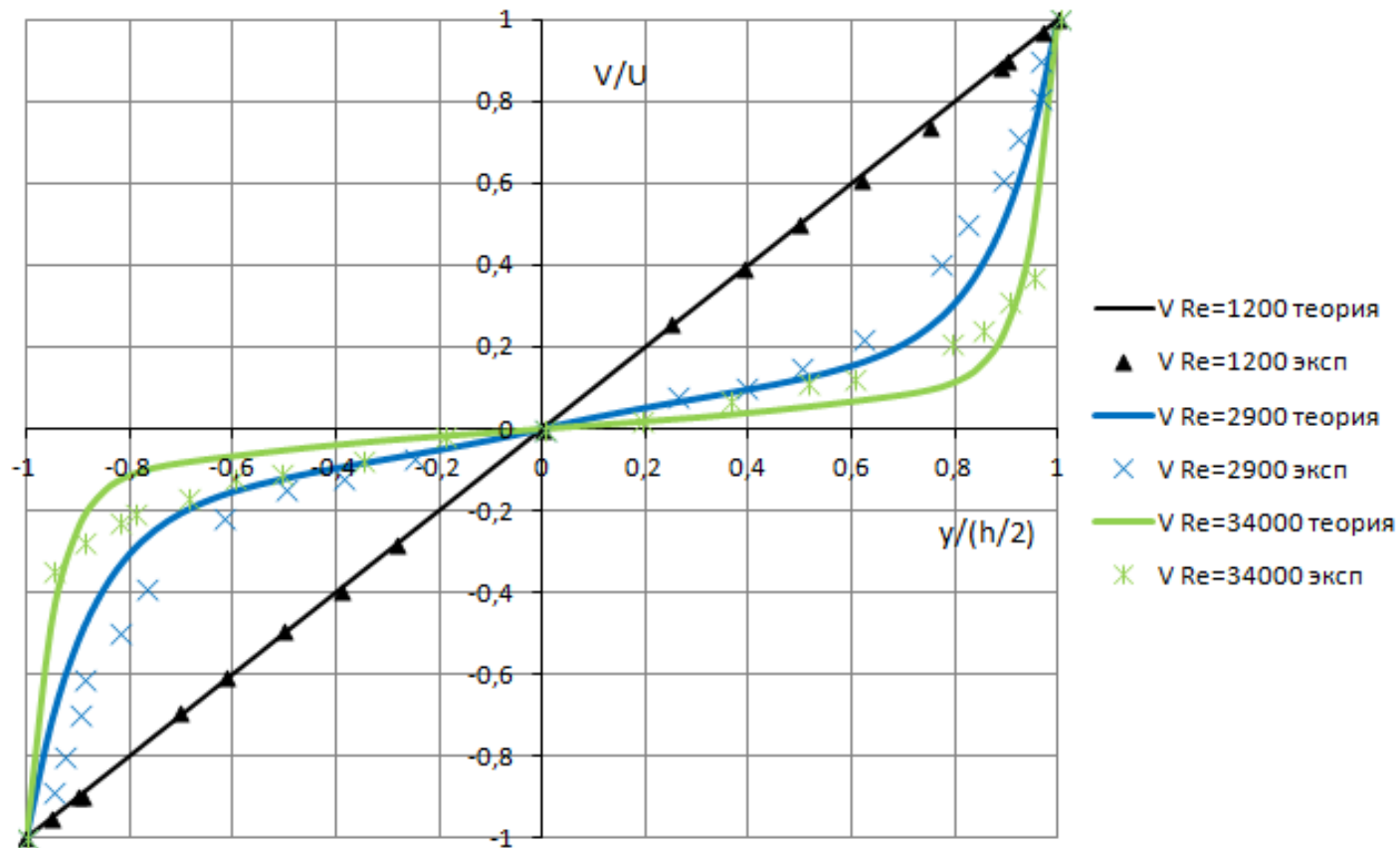
$$8(\sqrt{a_c})^3 sh\sqrt{a_c} \sim Re \quad \leftarrow \text{ в центре канала}$$

$$8(\sqrt{a_{st}})^3 \cdot th\sqrt{a_{st}} \sim Re \quad \leftarrow \text{ в области стенки канала}$$

$\sqrt{a}$ \ Re	Re=2900	Re=34000
$\sqrt{a_c}$	3	4,5
$\sqrt{a_{st}}$	7	16

$$\langle \tilde{V}(\tilde{y}) \rangle = \frac{sh(\sqrt{a_c} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_c}} (1 - |\tilde{y}|) + \frac{sh(\sqrt{a_{st}} \tilde{y})}{sh\sqrt{a_{st}}} |\tilde{y}|$$

## Сравнение экспериментальных и теоретических значений профиля скорости плоского течения Куэтта при различных числах Рейнольдса



## ***Выводы:***

1. Чтобы учесть разницу в производстве энтропии в ламинарном и турбулентном режимах течения, предлагается расширить фазовое пространство переменных и модернизировать уравнения Навье-Стокса, добавив дополнительный член в полную производную по времени.
2. В рамках этого подхода был проведен поиск аналитических решений для задачи Хагена-Пуазейля, плоского течения Пуазейля и плоского течения Куэтта.
3. В качестве обобщенного решения ОДУ или УЧП, имеющего две асимптоты решения, можно рассматривать функцию, представляющую собой сумму двух членов, каждый из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияния этой асимптоты на общее решение в каждой точке исследуемой области.

4. С использованием этого подхода были получены обобщенные решения задачи Хагена-Пуазейля, плоской задачи Пуазейля и плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости. Приведено сравнение решений, найденных для различных значений числа Рейнольдса, с экспериментальными. Показано, что в широком диапазоне значений аргументов наблюдается хорошее соответствие найденных аналитических зависимостей с экспериментальными данными.

5. Одной из причин различия в поведении аналитических и экспериментальных значений для задачи Хагена-Пуазейля и плоской задачи Пуазейля в диапазоне  $10 < y^+ < 100$  может быть явление перемежаемости. Этот вопрос требует дальнейших исследований.

## Публикации по теме доклада:

Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165492>

Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=164194>

Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=158211>

Хатунцева О.Н. О стохастических свойствах динамического хаоса в системах автономных дифференциальных уравнений, типа системы Лоренца// Труды МАИ. 2020. № 112. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=116313>

Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108.  
URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109382>

Khatuntseva O.N. Generalized Analytical Solution of the Problem of Determining the Universal Profile of the Turbulent Flow of an Incompressible Fluid // O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's. Book of abstracts. St.Petersburg, 2022. P. 61

Спасибо большое  
за Ваше внимание